第13卷　第2期
1996年6月

工　程　数　学　学　报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 13 No. 2
Jun. 1996

$L^p(\Omega)$ 中非齐次抽象 Cauchy 问题周期解的存在性*

彭济根　　王绵森

（西安交通大学理学院，西安 710049）

摘　要

通过对 $L^p(\Omega)$ 值函数Fourier 分析，本文得到了 $L^p(\Omega)$ 中非齐次抽象Cauchy 问题

(IALS)　$u'(t) = Au(t) + f(t)$,　$0 < t < T$；$u(0) = x$.

的周期解的存在性条件。从而将 Haraux[1] 在 Hilbert 空间中所获的结果推广到了 $L^p(\Omega)$ 空间中。

关键词　非齐次 Cauchy 问题，周期解，C_0 半群

分类号　47D06

1　引　言

设 E 是任意 Banach 空间，给定 E 中非齐次抽象 Cauchy 问题如下：

(IALS)　$u'(t) = Au(t) + f(t)$　$(t \in (0,T))$；$u(0) = x$.

其中 $f:[0,T) \to E$ 是任一 Bochner 可积函数，$A:D(A) \to E$ 生成 C_0 半群 $T(t)(t \geqslant 0)$.

定义 1[2]　一个函数 $u:[0,T) \to E$ 称为(IALS) 在$[0,T)$ 上的解，如果 u 在$[0,T)$ 上连续且在$(0, T)$ 上连续可微，同时 $u(t) \in D(A)(0 < t < T)$ 和(IALS) 得到满足。(IALS) 的解 $u(t)$ 称为以 $l(0 < l < T)$ 为周期的，如果 $u(0) = u(l)$.

如果(IALS) 的解存在，则解 $u(t)$ 可以表示成[2]：

$$u(t) = T(t)u(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s \tag{1}$$

通常称(1) 决定的函数 $u(t)$ 为(IALS) 的 mild 解。由此可知，在很大程度上(IALS) 解 $u(t)$ 的性质可由 mild 解的性质反应出来。1981 年 Haraux[1] 关于(IALS) 周期解的存在性问题证明了如下结论：设 E 为 Hilbert 空间，存在常数 $M > 0$ 使 A 满足：$\{2\pi ni/l\}_{n\in z} \subset \rho(A)$ 且 $\left\|R\left(\frac{2\pi ni}{l},A\right)\right\| \leqslant \frac{M}{n}$($|n|$ 充分大)，则(IALS) 具有以 l 为周期的 mild 解。

Haraux 的证明基于下面这样一个事实：若 E 是 Hilbert 空间，则 $L^2(0,T,E)$ 与 $l^2(z,E)$

---

* 本文1994年12月27日收到。

等距同构(见第2节具体陈述)。众所周知，在一般的Banach空间中，这样的事实并不一定成立(见下节的反例)。本文的主要目的是，通过对$E \triangleq L^p(\Omega)(1<p<\infty, p\neq 2)$向量值函数的Fourier分析，证明Haraux结论在$E = L^p(\Omega)$空间中也是成立的。作为推论可得到$L^p(\Omega)$空间中C_0半群增长阶的估计式。

应该指出的是，1984年Pruss[6]在保持状态空间E为Hilbert空间不变的情况下，将Haraux的结论中的条件做了一定的改进。

2　$L^p(\Omega)$值函数的Fourier分析

设$f(\cdot)$：$[0,1)\to E$是Bochner可积函数，定义其Fourier系数为：$f_n = \int_0^1 e^{-2n\pi ir}f(r)\mathrm{d}r$，相似于数值函数，如果$E$是Hilbert空间，则当$f(\cdot)\in L^2([0,1),E)$时，$\sum\limits_{n\in z}\|f_n\|^2 = \int_0^1\|f(r)\|^2\mathrm{d}r$，即$\{f_n\}_{n\in z}\in l^2(z,E)$($z$记为整数集)。但是，在非Hilber空间中，这样的等式是不成立的。

例1　设$f(\cdot)$：$[0,1)\to E\triangleq l^\infty$，$f(t) = (1, e^{2\pi it}, \cdots e^{2ni\pi t}, \cdots)$则$f_n = \int_0^1 f(t)e^{-2n\pi it}\mathrm{d}t = (0,0,\cdots 1,0,\cdots)$，于是$\|f_n\|_\infty = 1$，即得$\sum\limits_{n\in z}\|f_n\|^2 = +\infty$，另外显然有$f(\cdot)\in L^2([0,1),E)$.

设(Ω,Σ,μ)是有限测度空间，则$L^2(\Omega)$是Hilber空间，因此对任意$f(t)\in L^2([0,1), L^2(\Omega))$，其Fourier系数$\{f_n\}_{n\in z}\in l^2(z, L^2(\Omega))$. 由此想到的是，对于空间$L^p(\Omega)(1<p<\infty, p\neq 2)$，若$f(t)\in L^2([0,1), L^p(\Omega))$，其Fourier系数$f_n$是否满足$\{f_n\}_{n\in z}\in l^p(z, L^p(\Omega))$? 以下对$p>2$的情形作了肯定的回答。

引理1　设$1<p<\infty$，$f(\cdot)$：$[0,1)\to E\triangleq L^p(\Omega)$连续，记$f(t)$在$[0,1]$上作为$L^p(\Omega)$向量值函数的Bochner积分为$(L^p)\int_0^1 f(r)\mathrm{d}r$，则下列命题成立：

i)　若$f(t)$可表示成$f(t) = g(t)\cdot x$，其中$g(s)$为数值函数，$x\in L^p(\Omega)$，记$(L)\int_0^1 g(r)\mathrm{d}r$是$g(s)$的Lebesgue积分，则

$$(L^p)\int_0^1 f(r)dr = (L)\int_0^1 g(r)\mathrm{d}r\cdot x.$$

ii)　定义$f(t)$的绝对值函数$|f(t)|(\cdot) = |f(t)(\cdot)|$，则$|f(t)|$：$[0,1)\to L^p(\Omega)$连续且对任意$t\in[0,1)$，$\|f(t)\|_p = \||f(t)|\|_p$.

证明由定义即可得，略证。

因为(Ω,Σ,μ)是有限测度空间，因此若$p>2$，则$L^p(\Omega)\to L^{\frac{p}{2}}(\Omega)$是连续嵌入，即存在$M_p$，使$\|x\|_{p/2}\leqslant M_p\cdot\|x\|_p(x\in L^p(\Omega))$. 由此易得如下引理。

引理2　设$f(t)$，$|f(t)|$如引理1，则

i)　$f_k = (L^p)\int_0^1 f(t)e^{-2k\pi it}\mathrm{d}t = \left(L^{\frac{p}{2}}\right)\int_0^1 f(r)e^{-2k\pi it}\mathrm{d}r$;

ii)　对任意$t\in[0,1)$，$|f(t)|^2(\cdot)\triangleq|f(t)(\cdot)|^2\in L^{\frac{p}{2}}(\Omega)$且$|f(t)|^2$：$[0,1)\to L^{\frac{p}{2}}(\Omega)$可积；

iii)　对任意$f(t)\in L^p([0,1), L^p(\Omega))$，若定义$\overline{f(t)}(\cdot) = \overline{f(t)(\cdot)}$,

则 $(L^p)\int_0^1 \overline{f(r)e^{-2k\pi i t}}\mathrm{d}r = \overline{(L^p)\int_0^1 f(r)e^{-2k\pi i r}\mathrm{d}r}$；

iv) 记 $f(t)$ 的 Fourier 系数为 $f_k = \int_0^1 f(r)e^{-2k\pi i t}\mathrm{d}r$，则对任意 $t \in [0,1), g(t) \triangleq f(t)e^{-2k\pi i t}\bar{f}_k \in L^{\frac{p}{2}}(\Omega)$，且

$$(L^{\frac{p}{2}})\int_0^1 \bar{f}_k f(r)e^{-2k\pi i t}\mathrm{d}r = |f_k|^2 = \bar{f}_k \cdot f_k.$$

定理 1　设 $f(t)$: $[0,1) \to L^p(\Omega)(p > 2)$ 连续，它的 Fourier 系数记为 $f_k = (L^p)\int_0^1 f(r)e^{-2k\pi i r}\mathrm{d}r$，则　$\{f_k\}_{k\in z} \in l^p(z, L^p(\Omega))$.

证明　因为 Ω 是有限测度空间，故 $\forall\, q \in [1,p)$，$L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ 是强连续嵌入，即存在常数 $M(p,q)$ 使

$$\|x\|_q \leqslant M(p,q)\|x\|_p,\qquad x \in L^p(\Omega).$$

任取 $n \in N$(自然数集)，$\forall\, t \in [0,1)$.

$$|f(t) - \sum_{-n}^{n} f_k \cdot e^{2k\pi i t}|^2(\cdot) = (f(t)(\cdot) - \sum_{-n}^{n} f_k \cdot e^{2k\pi i t})\overline{(f(t)(\cdot) - \sum_{-n}^{n} f_k \cdot e^{2k\pi i t})}$$

$$= |f(t)(\cdot)|^2 - \sum_{-n}^{n}\overline{f_k(\cdot)}(f(t)e^{2k\pi i t}(\cdot)) - \sum_{-n}^{n} f_k(\cdot)\overline{(f(t)e^{-2k\pi i t})(\cdot)}$$

$$+ (\sum_{-n}^{n} f_k(\cdot)e^{2k\pi i t})(\sum_{-n}^{n}\overline{f_k(\cdot)}e^{-2k\pi i t})$$

于是由引理 1 及引理 2 得

$$(L^{\frac{p}{2}})\int_0^1 |f(t) - \sum_{k=1}^{n} f_k e^{2k\pi i t}|^2\mathrm{d}t = (L^{\frac{p}{2}})\int_0^1 |f(t)|^2\mathrm{d}t - \sum_{-n}^{n}|f_k|^2$$

从而，$(\sum_{-n}^{n}|f_k(\cdot)|^2 \leqslant ((L^{\frac{p}{2}})\int_0^1 |f(t)|^2\mathrm{d}t)(\cdot)$ 几乎处处成立。又因

$$\sum_{-n}^{n}|f_k(\cdot)|^2 = \sum_{-n}^{n}|f_k(\cdot)|^2 \cdot \sum_{-n}^{n}\frac{|f_k(\cdot)|^2}{\sum_{-n}^{n}|f_k(\cdot)|^2}$$

$$\geqslant \sum_{-n}^{n}|f_k(\cdot)|^2 \cdot \sum_{-n}^{n}\left(|f_k(\cdot)|^2 / \sum_{-n}^{n}|f_k(\cdot)|^2\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$= \left(\sum_{-n}^{n}|f_k(\cdot)|^2\right)^{1-\frac{p}{2}} \cdot \sum_{-n}^{n}|f_k(\cdot)|^p \qquad (a.e)$$

即，$\sum_{-n}^{n}|f_k(\cdot)|^p \leqslant \left(\sum_{-n}^{n}|f_k(\cdot)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant ((L^{\frac{p}{2}})\int_0^1 |f(t)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{p}{2}}(\cdot)$ $(a.e)$. 两边积分得，$\sum_{-n}^{n}\int_\Omega |f_k(s)|^p\mathrm{d}\mu \leqslant \int_\Omega |((L^{\frac{p}{2}})\int_0^1 |f(t)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{p}{2}}(s)|\mathrm{d}\mu \doteq \|((L^{\frac{p}{2}})\int_0^1 |f(t)|^2 dt)\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}$，于是 $\sum_{-n}^{n}\|f_k\|_p^p \leqslant \left(\int_0^1 \||f(t)|^2\|_{\frac{p}{2}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{2}} = \left(\int_0^1 \|f(t)\|_p^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{2}} < \infty$，由 $n \in N$ 的任意性知定理成立。

注　定理 1 是在 $p > 2$ 情况下所得的结果。当 $1 < p < 2$ 时是否有相同的结论，由文献[5] 知 $L^p(\Omega)(1 < p < 2)$ 不是 Cotype 型空间，因此猜想可能是否定的。

3　l — 周期 mild 解

为方便起见，以下不妨令 $l=1$。

引理 3[6] 设 E 为任意 Banach 空间，$T(t)(t\geqslant 0)$ 是由 A 生成的 C_0 半群，则 $1\in\rho(T(1))$ 的充要条件是 $\forall f\in C([0,T),E)$ 且以 1 为周期，(IALS) 具有以 1 为周期的 mild 解。

推论 1 若 $1\in\rho(T(1))$，则 $\forall f\in L^1([0,T),E)$ 且以 1 为周期，(IALS) 都有以 1 为周期的 mild 解。

证明由引理 3 及(1.1)式即得。略证。

引理 4[7] 设 E 为任意 Banach 空间，$\forall x\in E, Q(k)x\triangleq\int_0^1 e^{-2k\pi it}T(t)x\mathrm{d}t$，$\{2\pi ik:k\in z\}\subset\rho(A)$，则下列条件等价：

i) $x\in(I-T(1))E$，

ii) $\{R(2k\pi i,A)Q(k)x\}_{k\in z}$ 是 Ceser0 可积的，即

$$C_1-\sum\nolimits_{k\in z}R(2k\pi i,A)Q(k)x \quad 存在 \tag{2}$$

定理 2 设 $E\triangleq L^p(\Omega)(p>2)$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，若 $\{2k\pi i:k\in z\}\subset\rho(A)$ 且存在常数 $M>0$，$0<r<q$，使得

$$\|R(2k\pi i,A)\|\leqslant\frac{M}{|k|^r}, k\in z \tag{3}$$

则 $\forall f\in L^1([0,T),E)$ 且以 1 为周期，(IALS) 有以 1 为周期的 mild 解。

证明 由推论 1，仅证 $1\in\rho(T(1))$.

若 $x\in L^p(\Omega)$，$T(1)x=x$，则由以下等式

$$(A-2\pi ik)Q(k)y=e^{-2k\pi i}T(1)y-y=(T(1)-I)y,\quad y\in E \tag{4}$$

得 $(2k\pi i-A)Q(k)x=0$. 由于 $2k\pi i\in\rho(A)$，故 $Q(k)x=0(k\in z)$. 另外由 Fejer 定理[5]，

$$0=C_1-\sum_{k\in z}Q(k)x=\frac{1}{2}(I+T(1))x$$

即得 $x=\frac{1}{2}(I-T(1))x=0$，$I-T(1)$ 为单射。

对任意 $x\in E\triangleq L^p(\Omega)$ 任意有限整数集 $\overline{N}$

$$\|\sum_{k\in\overline{N}}R(2k\pi i,A)Q(k)x\|\leqslant(\sum_{k\in\overline{N}}\|R(2k\pi i,A)\|^q)^{\frac{1}{q}}\cdot(\sum_{k\in\overline{N}}\|Q(k)x\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

由定理 1 并注意到 $Q(k)x=\int_0^1 e^{-2k\pi i}\cdot T(t)x\mathrm{d}t$ 是 $T(t)x$Fourier 系数，$\sum_{k\in z}\|Q(k)x\|^p$ 收敛，而条件(3) 保证了 $\sum_{k\in z}\|R(2k\pi i,A)\|^q$ 收敛，于是由 $\overline{N}$ 的任意性知 $\sum_{k\in z}R(2k\pi i,A)Q(k)x$ 收敛，特别 Cesero 可知，由引理 4，$x\in(I-T(1))E$，即 $I-T(1)$ 是满射。

综合以上所证，$1\in\rho(T(1))$.

利用定理 2 的结论，下面将对定义在 $L^p(\Omega)$ 空间中 C_0 半群的增长指数 $\omega(A)\triangleq\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|T(t)\|$ 作以估计。

推论 2 设 $E\triangleq L^p(\Omega)(p>2)$，$T(t)$ 是 $L^p(\Omega)$ 上由 A 生成的 C_0 半群，则 $\forall t_0>0$

$\rho(T(t_0))\supset\{0\neq\mu\in\mathbb{C}:t_0^{-1}\mathrm{Log}\,\mu=\{\lambda\in\mathbb{C}:e^{\lambda}=\mu\}\subset\rho(A)$ 且 $\exists\ 0<r<q, M$

$$> 0, \forall \lambda \in t_0^{-1}\mathrm{Log}\ \mu, \|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{M}{|I_m\lambda|^r}\} \triangleq Q$$

证明　令 $B = t_0A - \mathrm{Log}\ \mu$，则 B 生成 C_0 − 半群 $u(t) = \exp\ (-t\log\ \mu)T(t_0t)$，因为 $t_0^{-1}\mathrm{Log}\ \mu + t_0^{-1}2k\pi i \in \rho(A)(k \in z)$，故 $2k\pi i \in \rho(B)$ 且 $\|R(\lambda, A)\| = \|R(2k\pi i, B)t_0\| \leqslant \frac{t_0M}{|2k\pi|^r}$，由定理 2 知 $1 \in \rho(u(1))$，即 $\exp(\mathrm{Log}\mu) = \mu \in \rho(T(t_0))$.

推论 3　设 $E \triangleq L^p(\Omega)$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则

$\omega(A) \leqslant \inf\{\omega \in R: \exists\ 0 < r < \min(q,p) M > 0$ 使

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|I_m\lambda|^r}, \forall\ \mathrm{Re}\lambda > \omega\} \tag{5}$$

证明　由文献[3]。$\omega(A) = \inf\{\omega \in R: \forall\ \mu \in C, \mathrm{Re}\mu > \omega$ 时，$e^\mu \in \rho(T(1))\}$ 因此，若 $p > 2$，则由定理 2 及推论 2 知(5) 成立。

当 $p < 2$ 时，$L^p(\Omega)$ 的共轭空间是 $L^q(\Omega)(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$，只须考察 $T(t)$ 的对偶半群 $T^*(t)$，结合 $p > 2$ 的情形即可得证(5) 式成立。

参考文献

[1] Haraux A., Nonlinear evolution equation. Lect Notes in Math., Springer—Velarg. 1981.

[2] Pazy A., Semigroups of Linear operators and applications to partial differential equations, Springer—Verlag. New York, 1983.

[3] Hille E., Phillips, R. S. Functional analysis and semigroups, Amer Math Soc. Providence. Rhode Island. 1957.

[4] Amerio. L, Prouse. G. Almost — periodic functions and functional equations. Van Nostrand Reinhold, London, 1971.

[5] Diestel J. Sequenes and series in Banach spaces. Springer—Verlag. New York. 1984.

[6] Pruss J. On the spectrum of C_0 —Semigroups, Tran. Amer. Math. Soc., 1984, 284:847—857.

[7] Wrobel V. Asymptotic behavior of C_0 —Semigroup ib B—Convex spaces, Indinana Univ. Math. J, 1984, 38:101—114.

Existence of the Periodic Solution of Inhomogenous Abstract Cauchy Problem on $L^p(\Omega)$

Peng Jigen　　Wang Miansen

(Xi'an Jiaotong University)

Abstract

By analysising the Fourier coefficient of $L^p(\Omega)$ vector—value functions, we obtain the condition of the existence of the periodic solution of inhomogeneous abstract cauchy problem:

(IALS)　$u'(t) = Au(t) + f(t)$　$t \in (0, T)$　$u(0) = x$.

therefore, the result by A. Haraux[7] in Hilbert is generalized to $L^p(\Omega)$.