系统科学与数学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
18(2) (1998, 4), 225–229

抽象 Cauchy 问题的适定性与算子半群

彭济根 宋德功 王绵森
(西安交通大学数学系，西安 710049)
朱广田
(中国科学院系统科学研究所，北京 100080)

摘要 在算子 A 非稠定、问题解非指数有界的情况下，研究抽象 Cauchy 问题的适定性及其与 A 生成的算子族之间的关系. 首先，引进 (ACP_1) 的 C 适定性概念和 C 半群生成元的全新定义，证明：(ACP_1) 是 C 适定的充要条件是 A 生成 C 半群. 并给出 A 生成非指数有界 C 半群的充分条件. 另外，引进 (ACP_2) 的 (n,k) 适定性定义，并讨论 (n,k) 适定性与积分余弦函数的关系.

关键词 抽象 Cauchy 问题，C 半群，生成元，C 适定，(n,k) 适定.

1 引言

设 E 是复域上的 Banach 空间，$A: D(A) \subset\to E$ 是闭线性算子 (不假设稠定). 考虑以下抽象 Cauchy 问题：

$$u'(t) = Au(t),\ u(0) = x; \tag{ACP_1}$$

$$u''(t) = Au(t),\ u(0) = x,\ u'(0) = y. \tag{ACP_2}$$

抽象 Cauchy 问题 (ACP) 的适定性问题是 (ACP) 研究中的一个核心问题，因为不同的适定性定义规定了 (ACP) 可解初值集合的大小和解对初值的依赖关系，而后者又决定了解随时间 t 变化的方式. 对于 (ACP_1), 最古典的是 Hadamard 适定性 [1,2]: 即指存在 E 的稠子集 D 和局部有界函数 $P(t) \geq 0$, , 使得对每个 $x \in D$, (ACP_1) 有唯一的解 $u(t,x)$, 且 $\|u(t,x)\| \leq P(t)\|x\| (t \geq 0)$.

事实上，Hadamard 定义中初值集 D 的稠密性间接地规定了 A 的稠定性. 众所周知，在许多实际问题中 A 并非稠定，因而许多实际问题不是 Hadamard 适定的. 考虑到 A 的非稠定性，Neubrander 引入了 (n,k) 适定性，即指：存在 $n \in N, k \in N \cup \{0\}, 0 \leq k \leq n$, 及局部有界函数 $P(t)$, 使得 $\forall x \in D(A^n)$, (ACP_1) 有唯一解 $u(t,x)$, $\|u(t,x)\| \leq P(t)\sum\limits_{i=0}^{k}\|A^i x\|$. 特别，若 $P(t) = Me^{\omega t}$, (ACP_1) 称为指数 (n,k) 适定.

关于 (ACP_2), 传统的适定性是 [1]: 存在 E 的稠子集 D 和局部有界函数 $P(t) \geq 0$, 使得 $\forall x, y \in D$, (ACP_2) 有唯一解 $u(t,x,y)$, 且 $\|u(t,x,y)\| \leq P(t)\ (\|x\| + \|y\|)$. 特别地，若 $P(t) = Me^{\omega t}$, 则 (ACP_2) 称为指数适定.

1993 年 9 月 11 日收到，1997 年 10 月 20 日收到修改压缩稿.

在抽象 Cahchy 问题的研究中，另一个重要课题是研究 (ACP) 的适定性与算子 A 生成的半群或余弦函数族之间的关系. 众所周知，(ACP_1) 是 Hadamard 适定的充分必要条件是 A 生成 C_0 半群 [1,2]. 1988 年 Neubrander 在假设 A 稠定的情况下，证明了 (ACP_1) 指数 $(n, n-1)$ 适定的充要条件是 A 生成 $n-1$ 次积分半群 [4]. 另外，(ACP_2) 指数适定的充要条件是 A 生成指数有界余弦函数族 [1]. 以往的工作之所以要在 A 稠定且相应 (ACP) 的解为指数有界的条件下进行，是因为指数有界和 A 稠定能够保证古典 Laplace 方法的应用和 (ACP) 的解算子在整个空间上的延拓. 但是，已有例子表明 (ACP) 的解不一定是指数有界的 (见例 4.1). 在文 [5] 中也有例子表明：存在非指数有界的积分半群或 C 半群.

本文的主要目的是：在不假设 A 稠定和 (ACP) 的解指数有界的情况下，讨论 (ACP) 的适定性及其与 A 生成的半群类或余弦函数类之间的关系. 为此，引进 (ACP_1) 的 C 适定性概念，Hadamard 适定性和 (n,k) 适定性都是这种 C 适定性的特例. 并且，考虑到 C 半群非指数有界的情形，引入 C 半群生成元的新定义，在指数有界的情况下，这种定义与文 [6] 的定义等价. 另外，引入 (ACP_2) 的 (n,k) 适定性，讨论 (n,k) 适定与积分余弦函数族的关系.

应该指出的是，如果考虑到 C 半群 (或积分半群) 的非指数有界性，那么算子 A 在什么条件下生成 C 半群或积分半群？在现代算子半群理论中，这是个非常重要但又十分困难的问题. 目前，国内外没有文献涉及这个问题. 本文尝试对这个问题作一定的探讨，并给出 A 生成非指数有界 C 半群的充分条件.

2 C 半群的生成元

设 $B(E)$ 是定义在 Banach 空间 E 上的有界线性算子全体构成的 Banach 空间，$C \in B(E)$ 为单射 (不假设 C 有稠值域), 单参数强连续算子族 $\{S(t): t \geq 0\} \subseteq B(E)$ 称为 C 半群，是指：$S(0) = C, CS(t+s) = S(t)S(s)$ $(\forall t, s \geq 0)$. 如果 $\|S(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$, 则称 $S(t)$ $(t \geq 0)$ 是指数有界的. 对于指数有界 C 半群，Davies 与 Pang 是这样定义其生成元 A 的 [5]: 记 $L_\lambda x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} S(t) x \mathrm{d}t (x \in E, \lambda > \omega)$, $D(A) = \{x \in E : Cx \in R(L_\lambda)\}, Ax = L_\lambda^{-1}(\lambda L_\lambda - C)x$. 明显地，若 C 半群非指数有界，那 Davies-Pang 的定义是毫无意义的. 因此，有必要将生成元的定义作适当的改进.

定义 2.1 设 $S(t)$ 为 C 半群，$D(A) = \{x \in E : S(t)x$ 在 $[0, \infty)$ 中连续可微，且存在 $y \in E$ 使 $S'(t)x = S(t)y\}$, 则线性算子 $A: D(A) \to E, Ax = y$ 称为 $S(t)$ 的生成元.

注 1 因为 $S(0) = C, C$ 是单射，所以对每个 $x \in D(A)$, 由 $S'(t)x = S(t)y (t \geq 0)$ 所确定的 y 是唯一的，从而算子 A 的定义是有意义的. 进一步有

引理 2.1 设 $S(t) (t \geq 0)$ 为 C 半群，A 为生成元，则下列命题成立.

1) A 是满足下列条件的算子中定义域最大者：$B: D(B) \to E, \forall x \in D(B)$, $S(t)x$ 在 $[0, \infty)$ 中连续可微，且 $S'(t)x = S(t)Bx$. 从而生成元是唯一的.

2) $\forall x \in D(A), Cx \in D(A)$, 且 $CAx = ACx$.

3) 生成元 A 是闭算子.

引理 2.2 设 $S(t) (t \geq 0)$ 为 C 半群，$\|S(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$, A 为生成元. 则 $\forall x \in E, Cx \in R(\lambda - A) (\mathrm{Re}\lambda > \omega)$, 且 $(\lambda - A)^{-1} Cx = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} S(t) x \mathrm{d}t$, $x \in E$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega$.

注 2 显然，在指数有界的情况下，生成元定义 2.1 与 Davies-Pang 定义 [5] 等价.

$\forall t \geq 0$, 定义闭算子 $T(t)$ 为 [5]: $D(T(t)) = \{x \in E : S(t)x \in R(C)\}, T(t)x = C^{-1}S(t)x$, 易

知在 $R(C^2)$ 上 $T(t)(t\geq 0)$ 满足半群关系： $T(t+s)x=T(t)T(s)x$. 定义 $T(t)$ 的无穷小生成元 G 为 [5]: $D(G)=\{x\in R(C):\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t}$ 存在 $\}$, $Gx=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t}$.

引理 2.3 1) $D(G)\subseteq D(A)$, $\forall x\in D(G)$, $Ax=Gx$. 并且 $C(D(A))\subseteq D(G)$.

2) G 可闭. 记 $\overline{G}$ 为 G 的闭包，则 $C^{-1}\overline{G}C=A$.

3) 若 C 的值域稠密，即 $\overline{R(C)}=E$, 则 $\overline{D(G)}=E$. 从而 A 稠定.

3 抽象 Cauchy 问题 (ACP) 的适定性

设 $A:D(A)\to E$ 为闭线性算子 (不假设稠定), $C\in B(E)$ 为单射 (不假设有稠值域).

定义 3.1 对于 ($\mathrm{ACP_1}$), 如果存在局部有界函数 $P(t)\geq 0(t\geq 0)$; $\forall x\in C(D(A))$, ($\mathrm{ACP_1}$) 有以 x 为初值的唯一解 $u(t,x)$, 且 $\|u(t,x)\|\leq P(t)\ (\|x\|+\|C^{-1}x\|)$, 则称 ($\mathrm{ACP_1}$) 是 C 适定的.

注 4 Hadamard 适定性是在定义 3.1 意义下，取 $C=I$(恒等算子) 且假设 A 稠定的 C 适定. 若 A 的预解集 $\rho(A)\neq\emptyset$, 则 $(n,n-1)$ 适定是取 $C=(\lambda-A)^{-n+1}$ 的 C 适定 $(\lambda\in\rho(A))$.

定理 3.1 设 A 的预解集 $\rho(A)=\emptyset$, $ACx=CAx(x\in D(A))$, 则 ($\mathrm{ACP_1}$) 为 C 适定的充要条件是： A 为某个 C 半群的生成元.

证　必要性. 设 ($\mathrm{ACP_1}$) 是 C 适定的. 不妨假设 $0\in\rho(A)$(否则，用 $A-\lambda$ 代替 A).

设 $x\in C(D(A))$, $u(t,x)$ 是相应的解，由解的存在唯一性易知 $u(t,x)$ 关于 x 线性，故可记为 $V(t)x=u(t,x)$, 即 $\forall t\geq 0, V(t)$ 是定义在 $C(D(A))$ 上的线性算子. $\forall x\in E$, 记 $S(t)x=AV(t)CA^{-1}x$, 则 $\forall t\geq 0$, $S(t)$ 是定义在 E 上的线性算子，并且

1) $S(0)x=AV(0)CA^{-1}x=Au(0,CA^{-1}x)=ACA^{-1}x=Cx$, $S(t)x=Au(t,CA^{-1}x)=u'(t,CA^{-1}x)$ 连续 (其中 $x\in E$).

2) $\forall x\in C(D(A))$, 易验证 $CV(t)x$ 与 $V(t)Cx$ 都是 ($\mathrm{ACP_1}$) 相应于初值 $u(0)=Cx$ 的解，因此由唯一性知， $CV(t)x=V(t)Cx(t\geq 0)$. 于是， $\forall x,s\geq 0,x\in E$,

$$S(t)S(s)x=AV(t)CA^{-1}(AV(s)CA^{-1}x)=AV(t)CV(s)CA^{-1}x=CAV(t)V(s)CA^{-1}x, \quad (3.1)$$

于是， $\forall x\in C(D(A))$, $V(t)V(s)x=V(t+s)x$, $S(t)S(s)=CS(t+s)x$.

3) $\forall t>0$, 令 $x_n\to x(n\to\infty)$, $S(t)x_n\to y_t$, 则 $\overline{x_n}=CA^{-1}(x_n-x)$ 满足 $\|\overline{x_n}\|+\|C^{-1}\overline{x_n}\|\to 0(n\to\infty)$. 于是 $\|V(t)CA^{-1}(x_n-x)\|\leq P(t)(\|C^{-1}\overline{x_n}\|+\|\overline{x_n}\|)\to 0$. 另外由 A 的闭性， $AV(t)CA^{-1}x=S(t)x=y_t$, 于是 $S(t)$ 是闭的，从而是有界的.

由 1)—3) 知， $S(t)(t\geq 0)$ 是 C 半群.

设 $\overline{A}$ 是 $S(t)$ 的生成元，由 $S(t)$ 的定义及引理 2.1 易知 $A\subseteq\overline{A}$. 另一方面，任取 $x\in D(\overline{A})$, $S'(t)x=S(t)\overline{A}x=AV(t)CA^{-1}\overline{A}x$. 而由 $S(t)$ 的定义， $S'(t)x=AV'(t)CA^{-1}x=A^2V(t)CA^{-1}x$, 于是 $V(t)CA^{-1}\overline{A}x=AV(t)CA^{-1}x(t\geq 0)$, 特别当 $t=0$ 时， $CA^{-1}\overline{A}x=ACA^{-1}x$, 即得 $x=A^{-1}\overline{A}x\in D(A)$, 且 $Ax=\overline{A}x$, 所以 $\overline{A}\subseteq A$. 于是 A 是 $S(t)$ 的生成元.

充分性. 设 A 是 C 半群 $S(t)(t\geq 0)$ 的生成元. $\forall x\in C(D(A))$, 令 $u(t,x)=C^{-1}S(t)x=S(t)C^{-1}x$, 则 $u'(t,x)=S'(t)C^{-1}x=S(t)AC^{-1}x$. 由引理 2.3 知 $x\in D(G)\subseteq D(A)$, 即 $S(t)AC^{-1}x=T(t)Gx=GT(t)x=GC^{-1}S(t)x=AC^{-1}S(t)x=Au(t,x)$ $(t\geq 0)$. 于是 $u(t,x)$ 是 ($\mathrm{ACP_1}$) 以 x 为初值的解，并且 $\|u(t,x)\|\leq\|S(t)\|\cdot\|C^{-1}x\|\leq\|S(t)\|\ (\|x\|+\|C^{-1}x\|)$. 从而 ($\mathrm{ACP_1}$) 是 C 适定的. 证毕.

推论 3.1 设 $\rho(A)\neq\emptyset$, 则 (ACP_1)Hadamard 适定的充要条件是 A 生成 C_0 半群.

推论 3.2 设 $\rho(A)\neq\emptyset$, 则 $(ACP_1)(n+1,n)$ 适定的充要条件是 A 生成 n 次积分半群.

显然, 推论 3.2 将 [4, Th3.2, Th4.5] 推广到了 A 非稠定及半群非指数有界的情形.

对于抽象 Cauchy 问题 (ACP_2), 我们引入 (n,k) 适定性.

定义 3.2 如果存在局部有界函数 $P(t)\geq 0(t\geq 0), n,k\in N\cup\{0\}, 0\leq k\leq n$, 使得 $\forall x,y\in D(A^n)$, (ACP_2) 有唯一解 $u(t,x,y)$, $\|u(t,x,y)\|+\|u'(t,x,y)\|\leq P(t)\cdot(\sum\limits_{i=0}^{k}\|A^iy\|+\sum\limits_{i=0}^{k}\|A^{i+1}x\|)$. 则称 (ACP_2) 是 (n,k) 适定的.

定理 3.2 设 $\rho(A)\neq\emptyset$, 则 (ACP_2) 为 $(n+1,n)$ 适定的充分必要条件是: A 生成 $2n$ 次积分余弦函数 $C(t)(t\geq 0)$.

证 由 [3] 知, A 生成 $2n$ 次积分余弦函数 $C(t)$ 的充要条件是 $\overline{A}=\begin{bmatrix}0 & I\\ A & 0\end{bmatrix}$ 在乘积空间 $E\times E$ 上生成 $2n+1$ 次积分半群 $S(t)(t\geq 0)$.

设 $\overline{u}(t)=(u(t),u'(t))^{\mathrm{T}}$, $z=(x,y)^{\mathrm{T}}\in E\times E$, 则 (ACP_2) 等价于 $E\times E$ 中的抽象 Cauchy 问题 $\overline{(ACP)}$: $\overline{u'}(t)=\overline{A}\overline{u}(t)$, $\overline{u}(0)=z$.

仅证充分性: 设 A 生成 $2n$ 次积分余弦函数 $C(t)$, 则由推论 3.2 知, $\overline{(ACP)}$ 是 $(2n+2,2n+1)$ 适定的 (因为 $\rho(\overline{A})=\rho(A)\neq\emptyset$), 即: $\forall z=(x,y)^{\mathrm{T}}\in D(\overline{A}^{2n+2})$, $\overline{(ACP)}$ 有唯一解 $\overline{u}(t,z)=(u_1(t,x,y),u_2(t,x,y))^{\mathrm{T}}$, $\|\overline{u}(t,z)\|=\|u_1(t,x,y)\|+\|u_2(t,x,y)\|\leq P(t)\sum\limits_{i=0}^{2n+1}\|\overline{A}^iz\|$ $=P(t)(\sum\limits_{i=0}^{n}\|\overline{A}^{2i}z\|+\sum\limits_{i=0}^{n}\|\overline{A}^{2i+1}z\|)$ ($P(t)$ 是局部有界非负函数). 于是, 由 $\overline{A}$ 的定义知, $\|\overline{u}(t,z)\|\leq P(t)[\sum\limits_{i=0}^{n}\|A^ix\|+\|A^iy\|)+\sum\limits_{i=0}^{n}(\|A^iy\|+\|A^{i+1}x\|)]\leq 2P(t)(\sum\limits_{i=0}^{n}\|A^iy\|+\sum\limits_{i=0}^{n}\|A^{i+1}x\|)$. 设 $x,y\in D(A^{n+1})$, 则 $z=(x,y)^{\mathrm{T}}\in D(\overline{A}^{2n+2})$. 若 $\overline{u}(t,z)=(u_1(t,x,y),u_2(t,x,y))^{\mathrm{T}}$ 是 $\overline{(ACP)}$ 的解, 则 $u(t,x,y)=u_1(t,x,y)$ 是 (ACP_2) 的解, 且 $u'(t,x,y)=u_2(t,x,y)$, 于是, (ACP_2) 是 $(n+1,n)$ 适定的. 证毕.

注 5 由定理 3.2 知, 古典的 (ACP_2) 的适定性是假设 A 稠定时的 $(1,0)$ 适定性.

4 非指数有界 C 半群的生成

设 A 为闭的, $C\in B(E)$ 为单射. 本节尝试研究非指数有界 C 半群的生成问题.

定理 4.1 如果 $-A$ 生成 C 半群 $T(t)(t\geq 0)$, $\forall t\geq 0$, $T(t)$ 为单射, 且 $R(C^2)\subseteq R(T(t))$, 则 $S(t)\triangleq T(t)^{-1}C^2$ $(t\geq 0)$ 满足 C 半群关系. $S(0)=C, CS(t+s)=S(t)S(s)(t,s\geq 0)$. 进一步, 若 $S(t)(t\geq 0)$ 强连续, 则 $S(t)$ 是 A 生成的 C 半群.

证 因为 $\forall t\geq 0, T(t)^{-1}$ 是闭的, 所以 $S(t)\triangleq T(t)^{-1}C^2\in B(E)$. $S(0)=T^{-1}(0)C^2=C$, $CS(t+s)=T(t+s)^{-1}C^3=(CT(t+s))^{-1}C^4=(T(t)T(s))^{-1}C^4=S(t)S(s)(t,s\geq 0)$. 于是, 若 $S(t)(t\geq 0)$ 强连续, 则 $S(t)$ 是 C 半群.

设 $\overline{A}$ 是 $S(t)$ 的生成元, $x\in D(A)$. 因为 $T(t)x=-\int_0^tT(r)Ax\mathrm{d}r+Cx$, 所以

$$\begin{aligned}C^2x&=-\int_0^tT(t)^{-1}C^2T(r)Ax\mathrm{d}r+S(t)Cx\\&=-\int_0^tS(t-r)CAx\mathrm{d}r+S(t)Cx=-\int_0^tS(r)CAx\mathrm{d}r+S(t)Cx,\end{aligned}\tag{4.1}$$

于是， $S(t)Cx = CS(t)x$ 连续可微，且 $CS'(t)x = CS(t)Ax$. 由定义 2.1 知， $x \in D(\overline{A})$ 且 $\overline{A}x = Ax$, 即得 $A \subseteq \overline{A}$. 另一方面， $\forall x \in D(\overline{A})$, $T(t)^{-1}C^2x \doteq S(t)x = \int_0^t S(r)\overline{A}x\mathrm{d}r + Cx$. 于是，$C^3x = \int_0^t T(t-r)C^2\overline{A}x\mathrm{d}r + C^2T(t)x$. 因 C 为单射，所以 $Cx = \int_0^t T(r)\overline{A}x\mathrm{d}r + T(t)x (t \geq 0)$, 即 $T(t)x$ 连续可微，且 $T'(t)x = -T(t)\overline{A}x$, 由定义 2.1 知， $x \in D(-A)$ 且 $-Ax = -\overline{A}x$, 于是， $\overline{A} \subseteq A$. 从而 $A = \overline{A}$ 是 $S(t)$ 的生成元. 证毕.

例 4.1 设 $E = l^2, a_n = n + 2^{2^n}\pi i (n \in N)$, $A: D(A) \to l^2$, $D(A) = \{x = \{x_n\} \in l^2 : \{a_n x_n\} \in l^2\}$, $Ax = \{a_n x_n\}$. 明显 $0 \in \rho(A)$, 取 $C = A^{-1}$, 则由定理 4.1 知， A 生成 C 半群 $S(t)(t \geq 0)$. 显然， $D(A) = R(C)$ 不稠密，且 $S(t)(t \geq 0)$ 非指数有界.

参 考 文 献

[1] Fattorini H O. The Cauchy Problem. London: Addison–Wesley, 1983.

[2] Hille E and Phillips R S. Functional Analysis and Semigroups. Providence R I: *Amer. Math. Soc. Colloqu. Publ.*, 1957, **31**.

[3] 郑权. 积分半群与抽象 Cauchy 问题. 数学进展, 1992, **21**(3): 257–273.

[4] Neubrander F. Integrated Semigroups and their applications to the abstract Cauchy problems. *Proc. J. Math.*, 1988, **135**(1): 111–155.

[5] Davies E B and Pang M M H. The Cauchy problem and a generalization of the Hille-yosida theorem. *Proc. London Math. Soc.*, 1987, **55**(3): 181–208.

[6] Miyadera I and Tanada N. Exponentially bounded C–semigroups and generation of semigroups. *J. Math. Anal. Appl.*, 1989, **143**(2): 358–378.

[7] Neubrander F. Wellposedness of higher order abstract Cauchy problems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1986, **295**(2): 257–290.

[8] Miyadora I. On the generators of exponentially bounded C-semigroups. *Proc. Japan Acad.*, 1986, **62**: 239–242.

THE WELLPOSEDNESS OF ABSTRACT CAUCHY PROBLEM AND SEMIGROUPS OF OPERATORS

Peng Jigen Song Degong Wang Miansen

(*Department of Mathematics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

Zhu Guangtian

(*Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing* 100080)

Abstract In the case where A is not defined densely and the solutions are exponentially unbounded, we consider the wellposedness of the abstract Cauchy problem and its relation to the semigroups generated by A. First, we introduce a new concept–C-wellposedness of (ACP_1) and a new generator of C-semigroups, and prove that (ACP_1) is C-wellposed if and only if A is a generator of C-semigroups; furthermore, we give a condition for A to generate a C-semigroup exponentially unbounded. Secondly, we introduce a new concept–the (n, k)-wellposedness of (ACP_2), and prove that (ACP_2) is $(n+1, n)$-wellposed if and only if A is a generator of $2n$ times integrated cosine function of operators.

Keywords The abstract Cauchy problem, C-semigroup, generator, C-wellposedness, (n, k)-wellposedness.