西安交通大學 数学与统计学院

从有限维空间到无穷维空间

Move Towards Infinite Dimensional Spaces Starting from Finite Dimensional Spaces

报告人：彭济根

电子信箱：jgpeng@mail.xjtu.edu.cn

个人主页：http://jgpeng.gr.xjtu.edu.cn

内容提要

- ☺ 引言
- ☺ 一维实空间
- ☺ 有限维空间
- ☺ 无穷维空间
- ☺ 距离空间
- ☺ 实例展示

一、引言

关键词：有限维，无限维，空间

➔ 维数：是指用以“表征”（唯一表示）对象的最少参数的个数。称一个对象是**n**维的，如果它可由且仅由**n**个有序参数表征。

➔ 空间：是指赋予一定结构的集合。数学上的结构一般可分为三大类：拓扑结构、代数结构、序结构。其中

- 拓扑结构（广义几何）是通过定义元素之间的“邻近方式”而构建的。相关的基本概念是开集、极限、连续等;
- 代数结构是通过定义集合元素间的运算而构建的。例如，加法运算、数乘运算、乘法运算等;
- 序结构是通过定义元素间的某种“传递”关系而构建的。

一、引言

- 有限维空间：如果存在某个常数n，使得空间中每个点都可以由至多n个有序参数表征，则称该空间为有限维空间。这样的最小n称为空间的维数，同时，该空间称为n 维空间。
- 无穷维空间：非有限维空间。

值得注意的是，空间的维数与被用来表征的参数的选择紧密相关。例如，一个平面若以复数来表征，它是1维的，而若以实数来表征，它是2维的。

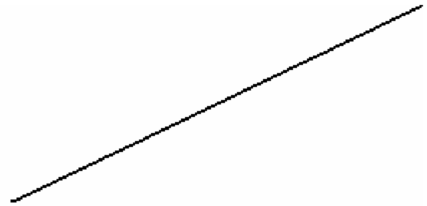
一般地，一个以复数表征的n维空间，在实数表征下是2n维的。

一、引言

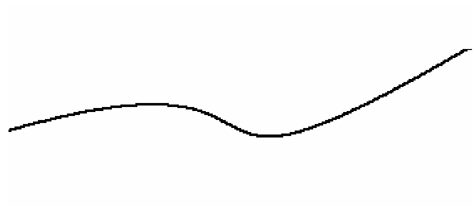
熟知，当一个空间具有（或被赋以）线性结构时（即，定义有加法和数乘运算，且满足8条运算定律，此时该空间称为线性空间），空间的维数可以通过确定最大无关向量集来定义。若最大无关向量集是有限集，则空间中每个点都可以唯一地表示为无关向量的线性组合，因而每个元素都可以这个线性组合的系数来表征。因此，由定义知，这个空间的维数就是最大无关向量集中向量的个数。

线性空间是许多数学研究特别是应用研究最基本的空间结构形式。为此，本讲义将针对线性空间而展开。

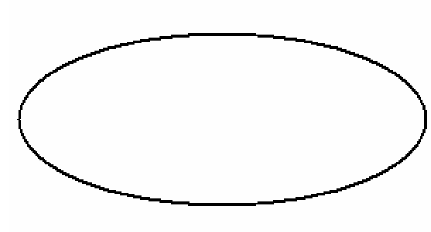
一、引言



1维，线性

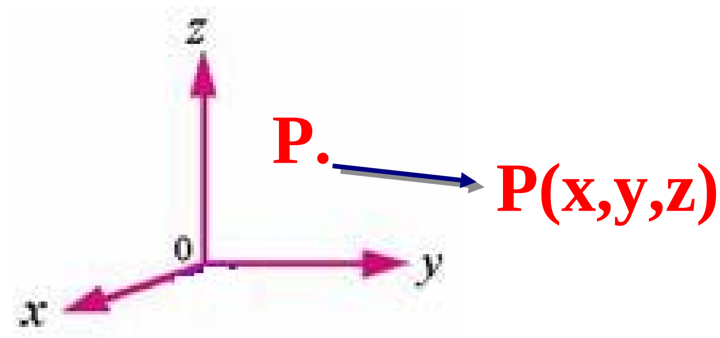


1维，非线性



1维，非线性

2维，非线性



3维，线性

一、引言

- 设 $P_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k : a_k \in R \right\}$。易见，$\mathbf{P}_n$中的每个元素都可用 n 元有序组（$a_1, a_2, \ldots, a_n$）表征。因此，$\mathbf{P}_n$ 是 n 限空间。
- 设 $S_m = \left\{ \sum_{k=0}^{m} b_k \sin kx : b_k \in R, x \in R \right\}$。易见，$\mathbf{S}_m$ 中的每个元素都可以用 $m+1$ 元有序组（$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$）表征。因此，$\mathbf{S}_m$ 是 $m+1$ 维空间。
- 设**C**[0,1]表示所有在区间[0,1]上连续的函数全体。该集合中的元素不可能由有限个参数组来表征。因此，它是无穷维的。

一、引言

从定义形式看，空间结构与空间维数是两个独立的概念。但在实际问题中，空间结构往往是通过空间的表征参数组来定义的。自然地，空间的维数越高，其表征的参数就越多，因此，随着维数的增大，空间结构性质就越复杂。

问题1：随着维数的增加，特别是“达到”无穷维时，空间结构性质将呈现出怎样的变化？

一、引言

值得指出的是，数学的许多领域处理的往往不是空间本身的性质，而是空间中的变换（或称算子），因此

问题2：随着维数的增加，特别是在无穷维空间中，空间变换将呈现出怎样的复杂性？

周知，实数是集三大数学结构于一体的最基本的空间，是数学研究的本体。为此，我们就从实数这个1维空间开始，在分析框架内，围绕空间的拓扑性质及其空间变换性质而展开讨论。

二、一维实空间：实数

一 基本概念

1. 序列的极限：

如果序列$\{x_n\}$满足条件：存在x_0使得，$\forall \varepsilon > 0$，必有N_ε，当$n > N_\varepsilon$时$|x_n - x_0| < \varepsilon$，则称序列$\{x_n\}$收敛，$x_0$称为它的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

2. 函数（映射）的极限：

如果函数$f(x)$与x_0满足条件：存在y_0使得，$\forall \varepsilon > 0$，必有$\delta_\varepsilon > 0$，当$|x - x_0| < \delta_\varepsilon$时，$|f(x) - y_0| < \varepsilon$，则称$f(x)$在$x_0$处的极限存在，并称$y_0$为其极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$

二、一维实空间：实数

3. 映射（函数）的连续性：

如果映射 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，且满足条件：$\forall \varepsilon > 0$，必有 $\delta_\varepsilon > 0$，当 $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ 时，$|f(x) - f(y_0)| < \varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续。若 $f(x)$ 在其定义域上每一点处连续，则称 $f(x)$ 为连续映射。

4. 聚点、闭集、开集等

极限存在的判别准则：

1. 单调增上有界序列必有极限；
2. 序列收敛当且仅当它是Cauchy列（或基本列）。
3. 映射的极限定义中，“$x \to x_0$” 可以用 “$\forall x_n \to x_0$” 代替。

定积分定义中的收敛性不能用序列的收敛性来刻画！

二、一维实空间：实数

二 实数的基本性质

1. 线　性：实数空间是线性的。
2. 完备性：前面有关序列收敛的第二个判定准则表明，实数是完备的。即，每个Cauchy列都有极限。
3. 可分性：第三个判别准则表明，实数是可分的（事实上它以有理数集这个可数集为稠密子集）。
4. 致密性（列紧性）：任何有界序列必有收敛子列。
5. 紧　性：有界闭集的任何开覆盖都有有限的子覆盖。
6. 区间套性质：单调减的闭区间族$[a_n, b_n]$的交集非空。

致密性定理、有限覆盖定理以及闭区间套定理三者等价。

二、一维实空间：实数

三 连续映射的性质

1. 线性函数的表征：映射$F(x)$为线性的，当且仅当存在常数 a 使$F(x)=ax$。
2. 连续函数在有界闭区间（闭集）上必取到极值。
3. 连续函数在有界闭区间（闭集）上是一致连续的。
4. 闭区间（闭集）在连续映射下的原像是闭集。
5. 开区间上的凸函数一定连续。
6. 可微函数是凸的当且仅当它的导函数是单调增的。

回想，函数 f 单调增当且仅当，对任意$x, y\in \mathrm{R}$, $(f(x)-f(y))\cdot(x-y)\geqslant 0$。

二、一维实空间：实数

四 线性系统的可解性

1. 线性系统 $x'(t) = ax(t) + bu(t),\ t \geq 0$ 的解为：

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-r)}bu(r)dr,\ t \geq 0$$

2. 线性系统 $x'(t) = ax(t),\ t \geq 0$ 零解稳定的必要条件是 $a \leqslant 0$。

3. 线性系统 $x'(t) = ax(t),\ t \geq 0$ 零解渐近稳定（指数稳定）的充分必要条件是 $a<0$。

4. 函数 $T(t)$（$t \geqslant 0$）是指数函数的充分必要条件是：

(1) $T(0)=I$，$T(t+s)=T(t)T(s)$; 且

(2) $T(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上连续。

二、一维实空间：实数

孰知，实数是数学研究的本源，绝大多数数学研究的分支领域都可以在实数中找到其源头。但无论是数学研究内在驱动，还是应用需求，仅限于一维实数的研究是远不够的。许多问题需要多个变量进行描述，需要置于多维空间中进行研究。因此，有必要发展多维空间理论。

问题3：典型的多维空间，如平面，立体空间等，在这些空间中，点的表示与坐标的建立密不可分。那么，坐标系的建立其本质意义是什么？

三、有限维实空间

有限维空间（多维空间）概念的引入源于**18**世纪末几何学的发展。由前面的定义知，本讲义所指的有限维空间具有更为广泛的意义，它可以包括诸如由红、黄、蓝三种基色复合而成的“颜色空间”，也可以包括由压力、浓度、温度为参数的气体状态空间，等等。

在 n 维空间中，每个点都可以用 n 个有序参数组（a_1, a_2, …, a_n）表征，即每个 n 维空间都与 $\mathbf{R}^n$ 一一对应，因此，下面我们就以 $\mathbf{R}^n$ 为例探讨多维空间拓扑结构的建立与相关性质。

三、有限维实空间

一 基本概念

R^n空间的结构多是通过与实数作类比而建立起来的！

以下设 $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，$b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)\in R^n$。

1. 实数的绝对值→向量的"模"：

$$\|a\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \text{距离}\ d(a,b) =: \|a-b\|$$

2. 实数的乘积→向量的内积：

$$\langle a,b\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \longrightarrow \text{夹角}\ \varphi = \arccos\frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|}$$

易见，$\|a\|^2=\langle a,a\rangle$。表明："模"与内积是相容的！

三、有限维实空间

以上通过类比而引进的概念在很大程度上延续了实数的性质。例如，二项式展开可在形式上推广到多维情形：

- （一维情形）二项式展开式:

$$|a-b|^2=|a|^2+2a\cdot b+|b|^2,\quad \forall a,b\in \mathrm{R}$$

- 多维情形的二项式展开（平行四边形准则）：

$$\|a-b\|^2=\|a\|^2+2\langle a,b\rangle+\|b\|^2,$$

$$\forall a=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\ b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in \mathrm{R}^n$$

进一步表明，内积是实数乘积的一种推广！

三、有限维实空间

1. 序列的极限:

设$\{x_n\}$为 R^n 中的序列。如果存在$x_0 \in \mathrm{R}^n$使得，$\forall \varepsilon > 0$有$N_\varepsilon > 0$，当$n > N_\varepsilon$时，$\|x_n - x_0\| < \varepsilon$，则称序列$\{x_n\}$收敛，$x_0$称为其极限。记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$。

2. 映射的极限:

设f是映 R^n到 R^m的映射，$x_0 \in \mathrm{R}^n$。如果存在$y_0 \in \mathrm{R}^m$使得，$\forall \varepsilon > 0$有$\delta_\varepsilon > 0$，当$\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$时，$\|f(x) - y_0\| < \varepsilon$，则称$f$在$x_0$处的极限存在，记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$。

3. 映射（函数）的连续性:

设$f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$，$x_0 \in \mathrm{R}^n$。如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称$f$在$x_0$处连续。

如果f在定义域的每一点处连续，则称f为连续函数。

三、有限维实空间

4. 函数 F: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$的可微性： 若每个分量函数$F_i$对每个分量的偏导数存在，则称 F 可微，并称$m \times n$ 阶矩阵

$$A(x) = \left(\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \right)_{m \times n}$$

为F 在x处的导数，记为$F'(x)$。

5. 函数f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$的单调性：若对任意$x, y \in \mathbf{R}^n$,

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq 0$$

则称f 是单调的。

这基于"内积是实数乘积的推广"。这给我们进一步认识"内积"以深刻的启示。后面将看到，内积又是"共轭内积"的一种特殊情形，因而，单调性可以进一步推广。

三、有限维实空间

6. 开球、闭球、

$$U(x,r)=\{x\in \mathrm{R}^n:\|x-x_0\|<r\},\quad \overline{U}(x,r)=\{x\in \mathrm{R}^n:\|x-x_0\|\le r\}$$

7. 领域、内点、开集、闭集

- x 称为集合A的内点，若存在$r>0$, 使得$U(x,r)$包含于A。
- 若A的每个点都是其内点，则称A为开集。
- 开集的余集称为闭集。

开集（闭集）的公理特征:

1. 全空间$\mathbf{R}^n$和空集既是开集也是闭集;

2. 任意多个开集(闭集)的并(交)仍是开集(闭集);

3. 有限多个开集(闭集)的交(并)仍是开集(闭集)。

三、有限维实空间

二 极限收敛准则

赋予"大小"关系：
$a \leqslant b$ 当且仅当 $a_i \leqslant b_i$

1. 单调增有界序列必有极限;
2. 任何Cauchy列（或称基本列）必有极限;
3. 映射的极限定义中，"$x \to x_0$"可用"$\forall x_n \to x_0$"代替;
4. $\mathbf{R}^m$ 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当每个分量数列 $\{x_{ni}\}$ 收敛，即，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall i = 1,2,\Lambda\ ,m,\ \lim_{n\to\infty} x_{ni} = x_{0i},$$

其中 $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \Lambda\ , x_{nm}),\ x_0 = (x_{01}, x_{02}, \Lambda\ , x_{0m}) \in \mathrm{R}^m$

序列x_n收敛 当且仅当，对任意a, 数列<a, x_n>收敛。

三、有限维实空间

三 R^n的基本性质

1. 线　性：加法运算 $a+b=:(a_1+b_1,a_2+b_2,\Lambda\ ,a_n+b_n)$,

　　数乘运算 $\lambda a=:(\lambda a,\lambda a_2,\Lambda\ ,\lambda a_n)$。

2. 完备性：每个Cauchy列都有极限。
3. 可分性：以分量为有理数的点集为稠密子集。
4. 致密性（列紧性）：任何有界序列必有收敛子列。
5. 紧　性：有界闭集的任何开覆盖都有有限的子覆盖。
6. 闭集套性质：单调减的闭集族的交集非空。

三、有限维实空间

四 连续映射的性质

1. 线性映射的表征：映射F: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$为线性的，当且仅当存在$m \times n$ 阶矩阵A 使$F(x)=Ax$。
2. 线性函数的表征：映射f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$为线性的，当且仅当存在$a \in \mathbf{R}^n$ 使$f(x) = \langle a, x \rangle$。（证明？）
3. 连续函数在有界闭集上必取到极值。
4. 连续映射在有界闭集上是一致连续的。
5. 闭集在连续映射下的原像是闭集。
6. 开集上的凸函数一定连续。
7. 可微函数是凸的当且仅当它的导函数是单调的。

三、有限维实空间

五 线性系统的性质

1. 线性系统 $x'(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t \geq 0$的解为:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-r)}Bu(r)dr,\ t \geq 0$$

其中 $e^{At} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$

2. 线性系统零解稳定的必要条件是，矩阵A不能有特征值位于右半复平面。

3. 线性系统零解渐近稳定（指数稳定）的充分必要条件是，矩阵A的特征值全部位于左半复平面。

三、有限维实空间

4. 单参数 $n\times n$ 阶矩阵族 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是矩阵指数函数的充分必要条件是:

(1) $T(0)=I$，$T(t+s)=T(t)T(s)$;

(2) 对任意的 $x\in \mathbf{R}^n$, 映射 $t\to T(t)x$ 在 $[0,\infty)$ 上连续。

不难证明，此时矩阵A由下面的极限所定义:

$$Ax=\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t},\quad \forall x\in \mathrm{R}^n$$

这也表明，在有限维空间中，每个矩阵唯一地对应一个满足上述条件的矩阵族。后面我们将提到，这样的矩阵族称为算子半群。

三、有限维实空间

对照一维实空间与多维空间，可以看出，在适当的拓扑结构下，一维实空间的许多拓扑性质在多维空间中得到保持。

（事实上，由定义可以看出，R^n 中的许多问题可转化为一维实空间中的 n 个相关问题。如作为建立拓扑结构基础的极限问题，R^n 中序列极限的存在性等同于 n个实数列的极限“同步”存在性。在有限范畴内，个数的增加不会影响这种“同步”的定性性质。但是，当个数“达到”无穷多时，要取得“同步”是一件非常困难的事情。由此可以预见，无穷维空间将呈现出非常复杂的拓扑性质）

四、无穷维空间

总体上讲，无穷维空间理论的形成与发展受到来自两个方面因素的推动:

1. 数学内在因素

19世纪至20世纪初，对变分，弦的振动、积分方程、微分方程边值、函数逼近等<u>以函数为基本处理单元</u>的问题的研究，使人们逐渐认识到研究以函数为元素的空间理论的重要性。另外，公理化思潮也对无穷维空间理论的形成和发展起到了重要的促进作用。

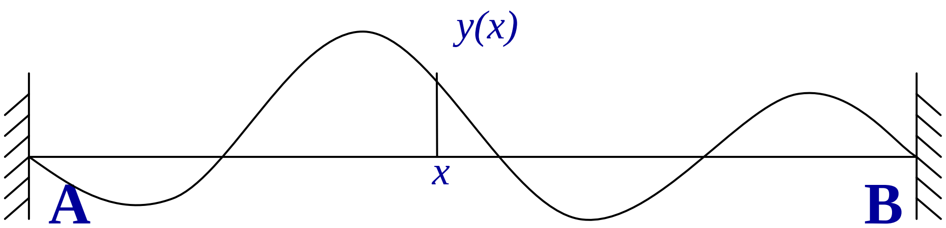
四、无穷维空间

2. 外部因素

20世纪初的理论物理学（特别是量子力学理论）、航空航天、核理论与技术等学科领域的理论发展和技术进步，对无穷维空间理论的形成与发展提供了强有力的外部动力。事实上，即便是在当今的信息化时代，其它学科的发展仍然是无穷维空间理论发展的重要推手。（数据挖掘、机器学习、稀疏信息处理、大数据处理等，无不需要无穷维空间理论）

四、无穷维空间

例1. 弹性系统的振动问题:



已知系在A、B两端的均匀弹性细线，在某种外力下被拉离平衡位置，形成曲线$y(x)$，那么松开外力后，细线在t时刻后的形状如何？最终状态如何？

显然，这是一个以连续函数为处理单元的问题，因此，需要置于以连续函数为元素的空间中进行处理。

四、无穷维空间

t 时刻神经活性强度分布

例2. 神经动力场系统:

$$\tau \dot{u}(x,t) = -u(x,t) - h + \int_{\Omega} w(x,x')\,\theta(u(x',t))\,dx' + s(x,t)$$

τ 为时间常数, $-h$为神经场的静息活性

$$\theta(u) = \begin{cases} 0, & u \le 0 \\ 1, & u > 0 \end{cases}$$

一般选为Mexican hat函数。动力神经场一般被假设为一个各向同性的齐次场,此时$w(x,x')$可以写成$w(x-x')$的形式

该系统描述的是神经活性分布随时间变化的演化趋势。易见，这是一个以分布函数为处理单元的问题。

四、无穷维空间

例3. 图像匹配问题:

彭济根

他是彭济根吗?

图中有彭济根吗?
若有，请找出来。

四、无穷维空间

✦ 图像匹配

给定两个集合 X 和 Y（代表两幅图像），确定适当的变换 F 使得F（X）与Y或Y的子集相“吻合”。

✦ 数学描述

若设 d 是刻画两个大小相当的数据集之间“相似程度”的函数，则两个数据集X和Y之间的匹配问题可以描述为：

$$(F^*, Cor^*) := \arg\min_{F,Cor} d(F(X), Cor(X)).$$

其中Cor表示X与Y的子集之间的对应关系。

易见，这是一个以“变换”为基本处理单元的数学问题。因此，需要置于以某种“变换”为元素的空间中进行处理。

四、无穷维空间

一 拓扑结构的建立

由前面的讨论知，有限维空间的拓扑结构是通过引入所谓向量的“模”而建立的，而这样的模又是由向量的表征参数组（即分量）来定义的。由于无穷维空间中的向量不能由有限个参数组表征，因而，那种由实数类比而建立拓扑结构的方法不能直接适用于无穷维空间。

问题4：该如何入手建立无穷维空间中的结构？什么是向量的“模”？

四、无穷维空间

对比实数的“模”（绝对值）与R^n中向量“模”的定义。易见，它们实际上是一个定义在各自空间上的非负实函数，若以统一的符号$\|\cdot\|$记之，则易验证它们具有如下共性：

1. $\| x \| = 0$当且仅当$x=0$;
2. 对任意的实数a和向量x, $\| ax \| = |a| \| x \|$;
3. 对任意向量x, y, $\| x+y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

四、无穷维空间

易见，以上性质不依赖于“模”的具体定义方式，特别是不依赖于表征向量的有序参数组。

定义1（**Banach,1922**）. 设X是数域**K**上的线性空间，若定义在X上的非负函数‖·‖满足以下三个性质：

1. $\| x \| = 0$ 当且仅当 $x=0$;
2. 对任意的实数 a 和向量 x, $\| ax \| = |a| \| x \|$;
3. 对任意向量 x, y, $\| x+y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$

则称‖·‖为X上的范数（norm）。此时，称X为赋范线性空间 **(normed linear space)**。

➔ 距离：$\mathbf{d}(x, y) =: \| x-y \|$ ➔ ……

四、无穷维空间

无穷维赋范线性空间的例子:

1. $C[a,b]: \|f\| = \max\{|f(x)|: x \in [a,b]\}$

2. $C^k[a,b]: \|f\| = \sup\{|f(x)|, |f'(x)|, \cdots, |f^{(k)}(x)|: x \in [a,b]\}$

3. $L^\infty(a,b): \|f\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in (a,b)} |f(x)|$

4. $L^p(a,b)(1 \le p < \infty): \|f\| = \left(\int_{(a,b)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

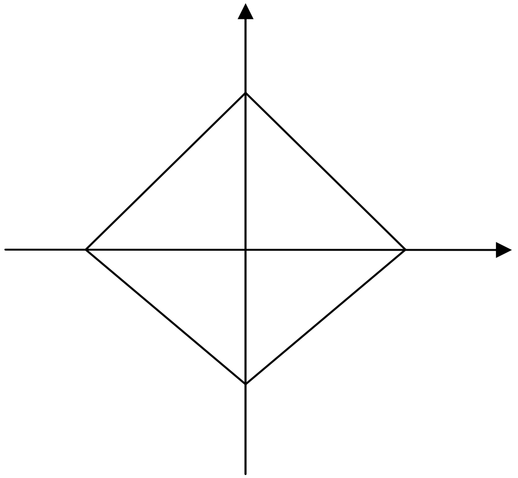
5. $l^p \ (1 \le p < \infty): \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

6. $l^\infty: \ \|x\| = \sup_{1 \le k < \infty} |x_k|$

四、无穷维空间

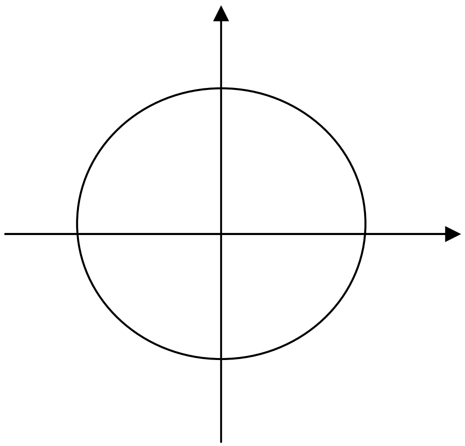
注1. 在同一个线性空间中可以定义不同的范数，不同的范数所诱导的拓扑结构（几何结构）是不尽相同的。例如，在定义1下，我们可以在有限维空间中引入不同的范数。下面以$\mathbf{R}^2$为例展现这一点：

1. l^1 - norm：$\|x\| = |x_1| + |x_2|$

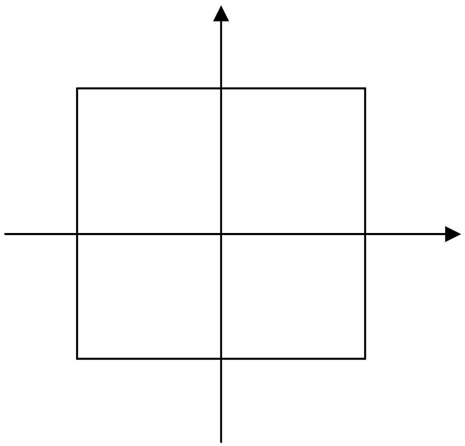


四、无穷维空间

2. l^2-norm：$\|x\| = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}$



3. l^∞-norm：$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$



四、无穷维空间

注2. 同一线性空间中可以定义不同的范数，而且不同的范数所诱导的拓扑结构（几何结构）是不尽相同的。但有些范数所诱导的拓扑性质是等价的。

1. 强等价：设 $\|\cdot\|_1$和 $\|\cdot\|_2$为线性空间上的两个范数，若存在非负常数**m, n**使得

$$n\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le m\|x\|_1, \quad \forall x \in X$$

2. 拓扑等价：设 $\|\cdot\|_1$和 $\|\cdot\|_2$为线性空间上的两个范数，

若 $\lim\|x_n - x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \lim\|x_n - x\|_2 = 0$

有限维空间中，任何范数都是强等价的！

四、无穷维空间

1. 序列的极限:

设$\{x_n\}$为赋范线性空间 X 中的序列。如果存在$x_0 \in X$使得，$\forall \varepsilon > 0$有$N_\varepsilon > 0$，当$n > N_\varepsilon$时，$\|x_n - x_0\| < \varepsilon$，则称序列$\{x_n\}$收敛，$x_0$称为其极限。记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

2. 映射的极限:

设 X, Y 是同一个数域上的范线性空间，f是映赋 X 到 Y 的映射，$x_0 \in X$。如果存在$y_0 \in Y$使得，$\forall \varepsilon > 0$有$\delta_\varepsilon > 0$，当$\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$时，$\|f(x) - y_0\| < \varepsilon$，则称$f$在$x_0$处的极限存在，记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$。

3. 映射（函数）的连续性:

设$f: X \to Y$，$x_0 \in X$。如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称$f$在$x_0$处连续。

如果f在定义域的每一点处连续，则称f为连续函数。

四、无穷维空间

4. 开球、闭球

$$U(x,r)=\{x\in X:\|x-x_0\|<r\}$$
$$\overline{U}(x,r)=\{x\in X:\|x-x_0\|\le r\}$$

5. 内点、开集、闭集

- x 称为集合A的内点，若存在$r>0$, 使得$U(x,r)$包含于A。
- 若A的每个点都是其内点，则称A为开集。
- 开集的余集称为闭集。

开集（闭集）的公理特征:

1. 全空间和空集既是开集也是闭集;
2. 任意多个开集(闭集)的并(交)仍是开集(闭集);
3. 有限多个开集(闭集)的交(并)仍是开集(闭集)。

四、无穷维空间

二 关于极限的收敛性

回顾一下R^n空中的收敛性准则:

- 单调增有界序列必有极限;
- 任何Cauchy列（或称基本列）必有极限;
- 映射的极限定义中，“$x \to x_0$”可用“$\forall x_n \to x_0$”代替;
- 序列$\{x_n\}$收敛当且仅当每个分量数列收敛。

等价地，序列x_n收敛的充分必要条件是，对任意a, 数列$\langle a, x_n \rangle$收敛。

四、无穷维空间

以上准则在无穷维赋范线性空间中是否成立?

1. 性质1 ╳
2. 性质2 ╳
3. 性质3 ╳
4. 性质4 ╳

➔ 问题1：在无穷维空间如何定义单调性? → 涉及序结构

➔ 问题2：什么情况下，Cauchy列有极限? → 完备性问题

➔ 问题3：什么情况下拓扑性质可以用序列来刻画? → 可分性问题

➔ 问题4：什么是分量? → 线性泛函的作用

四、无穷维空间

以上问题 1 导致如下概念:

定义2（偏序）. 若集合X上元素之间的关系“≤”满足:

$$1.\ \forall x \in X,\ x \le x,$$
$$2.\ 若 x \le y,\ y \le x,\ 则 x = y,$$
$$3.\ 若 x \le y,\ y \le z,\ 则 x \le z,$$

则称“≤”为X上的偏序，此时X称为偏序集。若X中的任意 两个元素x, y皆有x ≤ y或y ≤ x, 则称X为全序集。

四、无穷维空间

- 定义3（上界）. 设A是偏序集X的子集，b∈X称为A的上界，如果对任意x∈A, 皆有x≤b。
- 定义4（极大元）. 设x∈X。若“x≤y（y≤x）”隐含“x=y”，则称x为X的极大元（极小元）。
- 定义5（上确界）. 设A是偏序集X的子集，则A的所有上界中的极小元称为A的上确界。

四、无穷维空间

关于偏序集的几个公理:

1. 全序公理: 每个集合都可以赋予一个全序。

2. Zermelo选择性公理: 设$\Lambda=\{A_\alpha:\ \alpha\in\Gamma\}$为一族非空集合，则存在映射$f:\Lambda\to\cup A_\alpha$使得$f(A_\alpha)\in A_\alpha$ 。

3. Zorn引理: 设（X, ≤）为偏序集，若X的每个全序子集都有上界，则X必有极大元。

4. Zermelo不动点定理: 设（X, ≤）为偏序集，X的每个全序子集都有上界。若映射$f:X\to X$满足: 对任意$x\in X$，$x\leq f(x)$，则f必有不动点。

回到问题1: 在偏序的单调意义下，单调有界序列是否一定有极限?

四、无穷维空间

针对问题2，我们引入如下概念：

- 定义5（Banach空间）. 若赋范线性空间X的每个Cauchy列都在X中有极限，则称X为完备的。此时称X为Banach空间。

1. $C[a,b]$: $\|f\| = \max\{|f(x)|: x \in [a,b]\}$
2. $C^k[a,b]$: $\|f\| = \sup\{|f(x)|, |f'(x)|, \cdots, |f^{(k)}(x)|: x \in [a,b]\}$
3. $L^\infty(a,b)$: $\|f\| = \underset{x\in(a,b)}{ess\,\sup}|f(x)|$
4. $L^p(a,b)(1 \le p < \infty)$: $\|f\| = \left(\int_{(a,b)} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$
5. l^p $(1 \le p < \infty)$: $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\right)^{\frac{1}{p}}$
6. l^∞: $\|x\| = \sup_{1 \le k < \infty} |x_k|$

四、无穷维空间

值得注意的是，同一线性空间在不同范数下的完备性不一定相同。例如，若在连续函数空间C[a,b]定义如下范数，则C[a,b]不是完备的：

$$\|f\| = \left(\int_{[a,b]} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

但是，C[a,b]在该范数下是可完备化的，而且其完备化空间就是L^P（a,b）。

以上针对问题1和问题2发展了相应的概念。对于问题3和问题4，因其涉及到更多的概念，每个问题都是更深层次空间性质的本源，因此我们将结合后面的内容对其进行探讨。

四、无穷维空间

三 赋范线性空间的基本性质

回顾R^n的基本性质：

1. 线　性：在加法运算以及数乘运算下是线性的。
2. 完备性：每个Cauchy列都有极限。
3. 可分性：以分量为有理数的点集为稠密子集。
4. 致密性（列紧性）：任何有界序列必有收敛子列。
5. 紧　性：有界闭集的任何开覆盖都有有限的子覆盖。
6. 闭集套性质：单调减的闭集族的交集非空。

有限维空间在任何范数下都是Banach空间！

四、无穷维空间

对照有限维空间的性质，逐一考察无穷维赋范线性空间的性质：

1. 线　性：前提假设。
2. 完备性：不一定（例如，……）。
3. 可分性：不一定（例如，$L^{\infty}(0,1)$，l^{∞}……）。
4. 致密性（列紧性）：不成立。例如，在l^{p}中的序列：

$$x_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$$

5. 紧　性：不成立。（事实上，无穷维赋范空间的单位球都是非紧的）
6. 闭集套性质：不成立。

四、无穷维空间

$L^p, l^p (1 \leqslant p < \infty), C[a,b]$ 等都是可分的，但 l^∞, L^∞ 不是可分的

以上问题导致如下概念:

- 定义7（可分性）：若X存在可数的稠密子集，则称X是可分的。
- 定义8（致密性或列紧性）. 若集合A中的任何有界序列都有收敛子列，则称A是致密集（或称列紧集）；
- 定义9（紧集）. 若A的任何开覆盖都有有限的子覆盖，则称A是紧集。
- 定义10（有限交性质）. 设 $\Lambda = \{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ 为一族子集。若 Λ 任意有限个子集相交都非空，则称 Λ 具有有限交性质。

四、无穷维空间

关于以上概念的几个性质：

紧性是区分有限维与无穷维的本质特性！

1. 紧集一定是闭集；
2. 紧集一定是列紧集。反之，闭的列紧集一定是紧集；
3. 若A是紧的，则任何具有有限交性质的A的子集族，其交集都非空；反之也然。
4. 在赋范线性空间中，若集合A是紧的，则对任意 $\varepsilon>0$，都存在有限的 ε —网（即，存在 $x_1, x_2, \cdots, x_k$, 使得A包含于开球 $U(x_k, \varepsilon)$ 的并集。对于闭集而言，反之也成立。

若任意 $\varepsilon>0$，都存在A的有限 ε —网，则称A是完全有界的（**totally bounded**）

四、无穷维空间

<u>几个典型空间中紧集的判定准则：</u>

1. 在有限维空间中，集合A是紧的当且仅当A是有界闭集；

2. （Arzela-Ascoli）在C[a,b]中，闭集A是紧的当且仅当（1）A一致有界，且（2）A等度连续；

3. （Frechet）在$L^p(a,b)$中，闭集A是紧的当且仅当（1）A是有界集，且（2）对任意ε>0，存在δ>0使得

$$\forall 0<h<\delta,\ \forall x\in L^p(a,b), \int_{(a,b)}\left|x_h(r)-x(r)\right|^p dr<\varepsilon,$$

其中$x_h(r)=\dfrac{1}{2h}\int_{r-h}^{r+h}x(s)ds$

四、无穷维空间

关于赋范线性空间的几个典型性质:

1. 赋范线性空间X是有限维的，当且仅当任何有界闭集皆为紧集，当且仅当其单位球是紧集;

2. （Riesz引理）设X_0是赋范线性空间X的任意一个子空间，则对任意的ε>0，必在单位球面上存在x_ε，使得

$$\forall x \in X_0, \ \|x - x_\varepsilon\| > 1 - \varepsilon$$

注：易知在有限维空间中ε可取0。在无穷维空间中呢?

3. Banach空间是第二纲的，即任何可数多个无内点的闭集的并仍然无内点。

四、无穷维空间

四 无穷维空间中“坐标系”的建立

有界线性算子和泛函的例子？

定义11（线性算子与泛函的有界性）：设X，Y是同一数域上的赋范线性空间，T：X→Y为线性映射（或称算子）。若存在常数M使得

$$\forall x \in X,\ \|Tx\| \le M\|x\|$$

则称T是有界的。此时称最小的M为T的范数，记为‖T‖。（当Y为数域时，称线性算子为线性泛函）

对于R^n中分量，若定义f_i 为 $f_i(x)=x_i$，则易验证，f_i是一个R^n 有界线性泛函。这样，R^n中的序列x_k收敛当且仅当，对每个$1\leqslant i\leqslant n$，数列 $f_i(x_k)$ 收敛。事实上，对R^n中的任意向量a，函数$f_a(x)=\langle a, x\rangle$是$R^n$上的有界线性泛函。

四、无穷维空间

1. （Hahn-Banach）设X为赋范线性空间，G是它的一个子空间。若f是G上的一个有界线性泛函，则一定存在X上的有界线性泛函F，使得

$$(1)\ \forall \boldsymbol{x} \in G,\ F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x});\quad (2)\ \|F\|_X = \|f\|_G$$

注：定理的证明要用到Zorn引理。

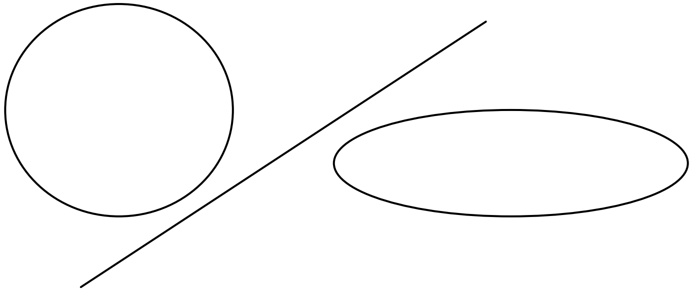
2. （点的分离性）设$x, y \in X$。若$x \neq y$，则必有X上的有界线性泛函f，使得$f(x) \neq f(y)$。

在赋范线性空间X中，任何点 x 都唯一由数族｛$f(x)$: f为X上的所有有界线性泛函｝表示。即

四、无穷维空间

Hahn-Banach定理的意义：

（1）凸集的分离性（机器学习的分类问题）



（2）空间点集的数族表征（分量的推广）

设X^*为X的有界线性泛函的全体，并用算子范数定义其空间范数，则X^*为Banach空间，并称其为X的对偶空间。进一步地，X^*的对偶空间称为X的二次对偶空间，记为X^{**}。易见，

$$\boxed{\forall x\in X,\ x\Leftrightarrow \{f(x)\}_{f\in X^*}}$$

四、无穷维空间

典型空间的对偶空间的表征:

定义12（等距同构）：设X，Y是同一数域上的赋范线性空间。若存在一一的线性映射T：$\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$，使得对任意$x\in\mathbf{X}$，$\|Tx\|=\|x\|$，则称**X**和**Y**等距同构，其中T称为等距同构映射。

注：易见，在等距同构下，两个空间具有完全相同的拓扑性质，因而，两个空间可互为表征。

定义13（等距嵌入）：设X，Y是同一数域上的赋范线性空间。若存在线性单射T：X→Y，使得对任意$x\in$X，$\|Tx\|=\|x\|$，则称X等距嵌入到Y。

四、无穷维空间

在等距同构意义下，几个经典空间的对偶空间如下:

1. $(L^p(a,b))^* = L^q(a,b)$, 其中 $1 < p,q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

2. $(l^p)^* = l^q$, 其中 $1 < p,q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

3. $(L^1(a,b))^* = L^\infty(a,b)$

4. $(l^1)^* = l^\infty$。

问题：$\mathbf{R}^n$ 空间的对偶空间是什么？
（值得注意的是，空间的对偶与所赋予的范数相关）

四、无穷维空间

五 对偶空间的性质与作用

1. 任何赋范线性空间的对偶空间都是完备的。

2. 对任意x，存在$f\in \mathbf{X}^*$，使得$f(x)=\|x\|$.（由**Hahn-Banach**定理易证）

3. 收敛性的推广：

① 弱收敛（按分量收敛的推广）：若对任意$f\in \mathbf{X}^*$，数列$\{f(x_k)\}$收敛，则称序列x_k弱收敛;

② 弱*收敛：设f_k为$\mathbf{X}^*$中的序列。若对任意$\mathbf{x}\in \mathbf{X}$，数列$\{f_k(x)\}$收敛，则称序列f_k弱*收敛。

四、无穷维空间

4. 紧性的推广：

① 弱序列紧：若集合A中的每个序列都有弱收敛的子列，则称A是弱序列紧的。

② 弱紧：若

问题：弱序列紧与弱紧之间的关系呢？

③ 同样可定义弱*序列紧和弱*紧。

注1. 收敛一定弱收敛，（在对偶空间中）弱收敛一定弱*收敛。反之不然。(例子呢？)

注2. 紧一定弱紧，（在对偶空间中）弱紧一定弱*紧。反之不然。

注3. 在三种拓扑下，（凸集）的闭性，有界性是等价的。

四、无穷维空间

Eberlein-Smulian定理： Banach空间中，集合的弱紧性等价于弱序列收敛性。在可分的情况下，弱*紧性等价于弱*序列紧性。

5.单位球的弱*紧性:

对任意x∈X, 定义X*上的线性泛函J_x如下:

$$\forall f \in X^*,\ J_x(f) = f(x)$$

则易验证$J_x \in X^{**}$，且$\| J_x \| = \| x \|$。这样在X与X**样之间建立了一个等距映射$x \to J_x$（称为典则映射），即X等距嵌入到它的二次对偶空间。一般情况下，典则映射不一定是满射。若典则映射是满射，则称X是自反的。

四、无穷维空间

- 二次对偶空间的闭单位球一定是弱*紧的;
- 若X是自反的，则它的单位球一定是弱紧的;
- （James定理）Banach空间自反的充要条件是

  ① 闭单位球是弱紧的;

  ② 每个有界线性泛函在单位球上达到上确界;

  ③ 对偶空间中的每个弱闭集都是弱*闭集。

自反Banach空间的例子:

1. $L^p(a,b)$, $1 < p < \infty$
2. l^p, $1 < p < \infty$
3. 任何有限维空间都是自反的。

四、无穷维空间

六 连续线性映射的性质

这表明，R^n上的线性算子必连续且有界。而且逆映射（只要存在）一定连续

回顾R^n的性质:

- 线性映射的表征：映射$F: R^n \to R^m$为线性的，当且仅当存在$m \times n$ 阶矩阵A 使$F(x)=Ax$。
- 线性函数的表征：映射$f: R^n \to R$为线性的，当且仅当存在$a \in R^n$ 使$f(x)=<a, x>$。
- 连续函数在有界闭集上必取到极值。
- 连续映射在有界闭集上是一致连续的。
- 闭集在连续映射下的原像是闭集。
- 开集上的凸函数一定连续。
- 可微函数是凸的当且仅当它的导函数是单调的。

四、无穷维空间

对照有限维空间的性质，我们逐一考察无穷维赋范线性空间中连续映射的性质:

性质1: ╳

性质2: ╳

性质3: ╳

性质4: ╳

性质5: √

性质6: ╳

性质7: ?

➔ 导致如下问题:

四、无穷维空间

问题1：是否每个线性算子都连续或有界？若逆映射存在，逆映射是否连续？

问题2：如何表征赋范线性空间特别是经典的**Banach**空间上的有界或连续线性算子？

问题3：怎样的空间中线性泛函可以用“内积”表征？（➔ **Hilbert**空间）

问题4：在怎样的集合上连续函数取到极值？（紧集）

问题5：在怎样的集合上连续映射一致连续？（紧集）

问题6：在什么情况下开集上的凸函数一定连续？

问题7：怎样定义无穷维空间中函数的可导性和单调性？

四、无穷维空间

对于问题1

首先要说的是，在无穷维空间中，并不是每个线性算子都是有界的。例如，在C[a,b]中定义的算子:

$$A: D(A) \to X, \ (Af)(x) = f'(x)$$

其中$D(A) = C^1[a,b]$ 。

（In fact, 给定函数列 $f_n(x) = \sin nx$ 。易见，该函数列有界在空间C[0,1]中有界，但是 $Af_n(x) = n\cos nx$ 是无界的）

四、无穷维空间

虽然许多诸如上述定义的算子A是无界的，但它们具有一种非常重要的性质：它们的图像是闭的。由此，我们引入如下概念。

闭算子：若算子A的图像｛（x, Tx）：$x \in D(A)$｝是乘积空间X×Y的闭集，则称A是闭算子。

闭图像定理：设X，Y为Banach空间，A：D(A)→Y闭算子，且D(A)是X的闭集，则A是有界的。

启示：若定义算子D(A)上的图范数

$$\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$$

则，闭算子算子A一定有界。微分算子是闭算子，因而在图范数下有界。

四、无穷维空间

关于无穷维空间中的线性算子，有如下性质:

1. 一点处的连续性隐含整体空间上的连续性。
2. 任何线性算子的有界性与连续性等价。
3. （共鸣定理）设**X**为**Banach**空间，**Y**是赋范空间, $\{T_\alpha: \alpha \in \Gamma\}$ 为一族映**X**到**Y**的有界线性算子。若对任意$x \in$ **X**, $\sup\{\|T_\alpha x\|: \alpha \in \Gamma\}<\infty$，则

$$\sup\{\|T_\alpha\|: \alpha \in \Gamma\}<\infty$$

4. （逆映像定理）设X, Y皆为Banach空间，T是映X到Y的有界线性算子。若T是一一映射，则T的逆也是有界线性算子。

四、无穷维空间

逆映像定理等价于开映像定理:

设X,Y为Banach空间，T是映X到Y的有界线性算子。若T的值域是第二纲的，则T是开映射。（开映射？）

- 开映射：若映射A映任何开集为开集
- 第二纲：拓扑空间X成为第二纲的，若任何可数个在X中稠密的开集，其交集仍在X中稠密。（或者，任何可数个无内点的闭集的并仍无内点）

注：任何Banach空间都是第二纲的。

四、无穷维空间

关于问题2，我们所能做的工作很少。

- 可分Hilbert空间上的有界线性算子可以表示为无穷矩阵;
- l^p 中的有界线性算子可用一个无穷"矩阵"表征，参见

  J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces. Springer-Verlag, New York, 1984

- 关于L^1上的有界线性算子的表征，参见

  J. Diestel, J. J. Uhl. JR, *Vector Measures*. AMS, Providence, Rhode Island, 1977

四、无穷维空间

对于问题3

我们需要发展所谓"内积"的概念（在实空间上）。

定义14（内积）：所谓内积是指定义在乘积空间$X \times X$上一个二元函数，记为<.,.>，满足如下性质：

(1) 共轭对称性：$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

(2) 对第一变元的线性性：$\langle ax+bz, y\rangle = a\langle x, y\rangle + b\langle z, y\rangle$;

(3) 非负性：$\langle x, x\rangle \geqslant 0$, 且$\langle x, x\rangle = 0$当且仅当$x=0$。

赋予内积的线性空间称为内积空间。

四、无穷维空间

这表明，内积可以诱导一种拓扑结构。完备的内积空间称为Hilbert空间

关于内积，有如下性质:

1. (Cauchy-Schwartz不等式) $|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$
2. 令 $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$，则 $\|\cdot\|$ 是范数;
3. 四边形准则:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

4. 极化恒等式:

➔ 在实域空间: $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

➔ 在复域空间: $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$

四、无穷维空间

基于内积这个概念，我们可以将R^n中的许多概念和性质推广到内积空间中。

1. 正交、正交补

2. 正交投影、正交分解、正交基

3. （投影定理）：设 M 为X 的闭子空间，则对任意 $x\in X$，皆有$y\in M$，使得

$$\|x-y\|=\text{dist}(x, M)$$

4. （正交分解定理）：设 M 为 X 的闭子空间，则对任意$x\in$ X，皆有唯一的$y\in$ M 和 $z\in$ M$^{\perp}$，使得$x=y+z$。

四、无穷维空间

Lax-Milgram 定理（Riesz定理推广）：设B（x, y）是Hilbert空间H上的有界的共轭双线性泛函，且有正常数r，使得 $|B(x, x)| \geqslant r\|x\|^2$，则对任意有界线性泛函 f，存在 $x_0 \in H$，使得 $f(x)=B(x, x_0)$，且 $r\|x_0\| \leqslant \|f\|$。

6. （Helinger-Toeplitz定理）设A 是映Hilbert空间H到自身的线性算子。若

$$<Ax, y>=<x, Ay>, \text{对任意的的} x, y \in H$$

则A是有界的。

易见，Riesz表现定理正面地回答了问题3. 即在Hilbert空间中，线性泛函可以由内积得到表征。

四、无穷维空间

事实上，由Riesz表现定理，我们还可以得到有关Hilbert空间的许多很好的性质：

1. 标准正交基的存在性：任何可分的Hilbert空间中都存在至多可数的标准正交基。

2. Hilbert空间与它的对偶空间是复共轭同构的。

3. 任何可分的无穷维Hilbert空间都与l^2等距同构。

注1. 从任何向量出发我们都可以通过Schmidt正交化方法生成一个标准正交基。

注2. Hilbert空间理论在函数逼近论、信号处理、机器学习等领域都有深刻的应用！

四、无穷维空间

前面对问题1至问题3进行了探讨，至于问题6与问题7，这涉及到许多方面的知识，在此我们不作讨论。有兴趣的朋友，可阅读有关非线性分析的文献。例如

1. 游兆永，龚怀云，徐宗本. 非线性分析. 西安：西安交通大学出版社，1991
2. 郭大钧. 非线性泛函分析. 济南：山东科学技术出版社， 1985
3. 钟承奎，范先令，陈文塬. 非线性泛函分析引论. 兰州：兰州大学出版社，1998
4. V. Benci and A. Masiello, Nonlinear analysis and applications to physical sciences, **Springer, New York, 2004**
5. **K. Deimling,** Nonlinear functional analysis, **Springer-Verlag, Berlin, 1985**

七 线性系统的性质

回顾$\mathbf{R}^n$中有关线性系统的性质:

1. 线性系统 $x'(t)=Ax(t)+Bu(t),\ t\geq 0$ 的解为:

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-r)}Bu(r)dr,\ t\geq 0$$

2. 线性系统零解稳定的必要条件是，矩阵**A**不能有特征值位于右半复平面。

3. 线性系统零解渐近稳定（指数稳定）的充分必要条件是，矩阵**A**的特征值全部位于左半复平面。

4. 单参数$n\times n$ 阶矩阵族$\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$是矩阵指数函数的充分必要条件是: (1) $T(0)=I$，$T(t+s)=T(t)T(s)$; (2) 对任意的$x\in\mathbf{R}^n$, 映射$t\to T(t)x$在$[0,\infty)$上连续。

四、无穷维空间

对照有限维空间的性质，我们逐一考察无穷维赋范线性空间中线性系统的性质：

性质1:　　?

性质2:　　?

性质3:　　?

性质4:　　?

➔ 导致如下问题:

问题1: 如何定义e^{At}?

问题2: 什么是特征值?

四、无穷维空间

对于问题1，有如下结论：

1. 若A是有界线性算子，$e^{At}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k A^k}{k!}$，则系统的解为：

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-r)}Bu(r)dr,\ t\geq 0$$

2. 若A无界，但存在有界线性算子族｛$T(t)$: $t\geqslant 0$｝满足：

(1) $T(0)=I$，$T(t+s)=T(t)\,T(s)$；

(2) 对任意的 $x\in X$，映射 $t\to T(t)\,x$ 在 $[0,\ \infty)$ 上连续；

且 $Ax=T'(0)x$，则系统的解可表示为：

$$x(t)=T(t)x(0)+\int_0^t T(t-r)Bu(r)dr,\ t\geq 0$$

此时，称｛$T(t)$: $t\geqslant 0$｝为由A生成的单参数算子半群。

四、无穷维空间

对于问题2，需要发展如下概念：

定义15（谱）. 设A是复Banach空间X上的线性算子，λ是复数。若λI-A是一一映射，则称λ为A的正则值，否则称为A的谱点。

定义16（谱的分类）. 设λ为A的谱点。

① 若存在非零x，使得λx=Ax，则称λ为点谱或称特征值;

② 若λI-A是单射，但它的值域稠密，则称λ为点谱为连续谱;

③ 若λI-A是单射，且它的值域不稠密，则称λ为剩余谱。

四、无穷维空间

关于谱和正则点，我们有如下性质

1. 所有谱点所组成的集合(记为 σ (A)是闭集;
2. 所有正则点所组成的集合(记为 σ (A) 是开集;
3. 第一预解方程:

$$(\lambda I-A)^{-1}-(\mu I-A)^{-1}=(\mu-\lambda)(\lambda I-A)^{-1}(\mu I-A)^{-1}$$

4. 预解式(λI−A)−1关于λ的可微性;
5. （Riesz-Schauder定理）设T是紧算子，则

(1) 任意非零复数λ要么是T的特征值要么是正则值;

(2) σ (A)要么是有限集，要么是以零为唯一聚点。

四、无穷维空间

基于以上概念，我们考察线性系统的渐近性质：

1. 线性系统零解稳定的必要条件是，算子A不能有谱点位于右半复平面。

2. 若对应的算子族T(t)是紧算子，则线性系统零解指数稳定的充分条件是，A的谱点特征值全部位于左半复平面。

问题1：在什么情况下系统存在满足条件的算子族$T(t)$？

问题2：如何估计谱点的分布？（谱界，数值域，算子测度）

四、无穷维空间

七 赋范线性空间的推广：距离空间

定义17. 设 X 为一个非空集合，若存在二元函数 d 使得

$$1.\ d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$$
$$2.\ \forall x,y \in X, d(x,y)=d(y,x)$$
$$3.\ \forall x,y,z, d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$$

则称 d 为 X 上的距离，此时称 X 为度量空间。

易验证，在赋范线性空间中 $d(x,y)=\|x-y\|$ 是距离。因此，赋范线性空间是距离空间。在度量空间中，我们可以定义收敛性、极限、紧性、致密性、完备性等概念。一般地，度量空间不一定是紧的，但是它在具有下面更为广义的“紧性”。

四、无穷维空间

度量空间的仿紧性:

设X是度量空间，则X的每个开覆盖都有有限的开加细，即，若Γ为X的开覆盖，则存在X的另一个开覆盖Λ，满足（1）对任意x，存在x的某个邻域U(x)，它只与Λ中有限个开集相交，（2）对每个A∈Λ，必有B∈Γ使得A包含于B。

Banach压缩定理:

设X是度量空间，T是X上的映射，若存在常数 $0<r<1$使得$d(Tx, Ty) \leqslant rd(x, y)$，则对任意x，序列$T^n x$是Cauchy列，且当X完备时，它收敛于T的唯一不动点。

四、无穷维空间

度量空间向Banach空间的嵌入

任何度量空间都可以等距嵌入一个Banach空间。

（事实上，设X上所有Lipschitz连续函数全体记为Lip(X),给定X中的一点e, 记$Lip_e(X)=\{f\in Lip(X):\ f(e)=0\}$。定义$Lip_e(X)$上的非负函数为

$$L(f)=\sup_{x,y\in X,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}$$

则易证 $L(\cdot)$ 为$Lip_e(X)$上的范数，而且$Lip_e(X)$在该范数下为Banach空间。定义映射

$$\tau:\ X\to Lip_e(X)^*$$

为 $\tau(x)=x^{*1}$，其中$x^{*1}(f)=f(x)$。易证，τ是等距映射。）

四、无穷维空间

以上嵌入定理及其证明，表明

1. 度量空间中的许多问题可以置于Banach空间中进行讨论，从而利用后者的线性;

2. 非线性Lipschitz 连续函数空间可以作为度量空间的基本“参照系”。在这种参照系下，许多非线性对象可以延拓为线性的。

（例如，对于映度量空间 X 到度量空间 Y 的非线性Lipschitz连续映射T, 定义T^{l*}： $Lip_e(Y)\rightarrow Lip_e(X)$ 为

$$T^{l*}(g)(x)=g(Tx),\quad \forall g\in Lip_e(Y),\quad x\in X$$

则 T^{l*} 是有界线性算子，其共轭算子是 T 向 $Lip_e(X)^*$上的一种延拓，即，$(T^{l*})^*(\tau x)=\tau(Tx)$。）

五、结束语

谢谢！

彭 济 根

2012年7月