西安交通大學　数学与统计学院

一种新的Banach空间常数及应用

A Novel Banach Space Constant And its Applications

报告人：彭济根

精勤求学　敦笃励志　果毅力行　忠恕任事

2012-7-30

1. 引 言

12个黑色五边形

20个白色六边形

图1. 足球图案

1. 引 言

足球表面图案

- 标准足球（5号）的直径约21.5 cm;
- 足球表面有 32 个多边形（其中12个黑色五边形，20个白色六边形），其中每个多边形的面积约为181.433125cm^2
- 每个多边形的半径大约是7.6013978
- 将足球半径单位化，则每个多边形的半径大约是

0.35355359 (远小于1)

可以任意给定

当然是指有限个!

意义： 在整个足球表面可以画出若干个给定大小的均匀图案。

1. 引 言

问题：对于抽象空间中的“足球”，是否也可以在其表面画出若干个任意给定大小的图案？

问题分析

- 答案与空间的紧性相关；
- 在无穷维（线形）空间，任何球面都是非紧的；
- Riesz引理

在无穷维空间的单位球体表面上能画出的均匀图形的最小半径应不小于1

1. 引 言

结论: 在无穷维空间的标准“足球”表面上不可能画出与真实足球图案一样大小的图案，即使个数不限！

问题: 在一个给定无穷维空间中，其单位球体表面上能均匀画出的图案的最小半径有多大？

□ 数学描述

设 X 为赋范线性空间，$r>0$ 为给定的常数。记 $S(x,r)$ 为以 x 为心，r 为半径的球体，则是否在 $S(0,1)$ 的表面 $\partial S(0,1)$ 存在有限个 x_i，使得 $\partial S(0,1)\subseteq\bigcup_i S(x_i,r)$ ？

2. Riesz指数

Riesz指数

定义 1. 设 X 为赋范线性空间，记 $S(x,r)$ 为以 x 为心，r 为半径的球体。定义

$$\varepsilon(X)=\inf\left\{r>0:\ \exists\text{有限个}x_i\in\partial S(0,1),\ s.t.\ \partial S(0,1)\subseteq\bigcup_i S(x_i,r)\right\}$$

并称之为空间 X 的 Riesz 指数

显然，对于给定r，只有当 $r>\varepsilon(X)$时，才可以在空间X的单位球表面上画出若干个半径不超过r 的均匀图案。

2. Riesz指数

基本结论（一）

定理 1.1 赋范线性空间X是有限维的，当且仅当$\varepsilon(X)=0$。

定理 1.2 赋范线性空间X是无限维的，当且仅当$\varepsilon(X)\geq 1$。

定义 2. 设X是赋范线性空间，定义

$$\delta(X)=\inf\left\{r>1:\ \exists\text{有限 } x_i\in\partial S(0,1), s.t.\ S(0,1)\subseteq\bigcup_i S(x_i,r)\right\}。$$

定理 1.3 X是有限维的，当且仅当$\delta(X)=1$。

定理 1.4 X是无限维的，当且仅当$\varepsilon(X)=\delta(X)$。

2. Riesz指数

基本结论（二）

定理 1.5 下列命题成立：

1. 若 X 为 Hilbert 空间，则 $\varepsilon(X)=\sqrt{2}$；

2. 当 $1<p\le 2$ 时，$\varepsilon(L^p(E))=2^{\frac{1}{p}}$；

3. 当 $2<p<\infty$ 时，$2^{\frac{1}{p}}\le \varepsilon(L^p(E))\le 2^{\frac{1}{p'}}$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$；

4. 当 $p=1\ or\ \infty$ 时，$\varepsilon(L^p(E))=2$；

5. $\varepsilon(l^p)=2^{\frac{1}{p}}\ (1\le p<\infty)$; $=1(p=\infty)$；

6. $\varepsilon(C[a,b])=2$。

2. Riesz指数

在经典的Banach空间C[a, b] 和 L^1 的单位球面上，不可能画出两个以上的均匀图案。

$\varepsilon(X)=\sqrt{2}$ 不是Hilbert空间的等价特征。如，考虑空间

$$X=\oplus_2 X_n=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}:\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\}$$

并赋予范数 $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2}$. 则易证 $\varepsilon(X)=\sqrt{2}$

3. Daugavet性质

应用一：Daugavet 性质

定义 3. 设 X 是赋范线性空间。如果对每个紧算子 T 皆成立等式 $\|I+T\|=1+\|T\|$，则称 X 具有 Daugavet 性质。

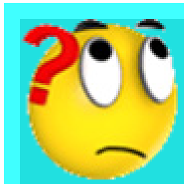
定义 4. 设 X 是赋范线性空间，定义

$$daug(X)=\max\{m\geq 0 \mid : \|I+T\|\geq 1+m\|T\|,\ T\in K(X)\}$$

并称之为 X 的 Daugavet 指数

容易证明：X 具有Daugavet性质当且仅当 $daug(X)=1$

3. Daugavet性质



已知经典的Banach空间C[a,b]，L^1和L^∞ 的Riesz指数都等于2，而这些空间都具有Daugavet性质。

猜想：$\varepsilon(X)=2$ 是空间X具有Daugavet性质的一个特征。

定理1.6 设X具有Daugavet性质，则 $\varepsilon(X)=2$。

定理1.6的逆命题不成立。例如l^1 的Riesz指数等于2，但它不具有Daugavet性质。

4. 空间几何性质

应用二：空间几何性质

定理 1.7 若 $\varepsilon(X)=2$，则 X 包不是自反空间；

定理 1.8 若 $\varepsilon(X)=2$，则 X 包含一个与 l^1 近似的子空间。

定理 1.9 如果 $\varepsilon(X)=2$，则 X 和它的共轭空间 X^* 的单位球面上没有互为支撑的光滑端点。

设 x_0 是 Banach 空间 X 单位球的一个端点。如果 $\exists x_0^* \in S_{X^*}$，$x_0^*(x_0)=1$，称 x_0 是 B_X 的光滑端点，x_0^* 称为 x_0 的光滑支撑

4. 数值指数

Banach空间的数值指数

定义 5. 设 T 是 X 上的有界线性算子，定义T的数值域$V(T)$和数值半径$v(T)$分别为

$$V(T)=\left\{x^*(Tx)\,\middle|\,x\in X,\ x^*\in X^*,\ \|x\|=\|x^*\|=x^*(x)=1\right\}$$

$$v(T)=\sup\left\{|\lambda|\,\middle|\,\lambda\in V(T)\right\}$$

则称$n(X)=\inf\left\{v(T)\,\middle|\,T\in L(X),\ \|T\|=1\right\}$为$X$的数值指数。

定理 1.10 设 X 为 Banach 空间，则

$$n(X)=\inf\{\max(\omega(-T),\omega(T))\,|\,T\in L(X),\ \|T\|=1\}$$

其中$\omega(T)=\sup V(T)$。

4. 数值指数

定理 2.11 设X为无穷维 Banach 空间，则

$$daug(X)=\inf\{\omega(T)\,|\,T\in K(X),\ \ \|T\|=1\}。$$

通常称为算子T的 Dahlquist常数，它通过下式计算：

$$\omega(T)=\lim_{\alpha\to 0+}\frac{\|I+\alpha T\|-1}{\alpha}=\lim_{r\to+\infty}\|r+T\|-r$$

易见，Daugavet指数是满足$\omega(T)\geq m\|T\|$ $(\forall T\in K(X))$的最大m；而数值指数则是满足$|\omega(T)|\geq m\|T\|(\forall T\in K(X))$的最大$m$。

5. 研究展望

研究展望

- Riesz指数、Daugavet指数以及数值指数之间的关系;
- Riesz指数为 $\sqrt{2}$ 的空间几何性质;
- Riesz指数对Banach空间及其对偶空间单位球的弱紧性的刻画;
- Riesz指数对无穷维空间的分类作用;
- 当p〉2时，确定L^p 空间的Riesz指数;
- Banach空间的Riesz指数与其对偶空间的Riesz指数之间的关系。

Thank You!