收敛序列的一个序特征及其应用

An Order Characteristic of Convergent Sequence In Metric Space and its Applications

报告人：彭济根

精勤求学 敦笃励志 果毅力行 忠恕任事

1. 出发点与动机

数列收敛的有界单调准则

任何上（下）有界的单调增（减）实数序列都有极限。

！该准则建立了实数序结构与拓扑结构之间的关系。但是，直观地看，这种关系不是逆向的，或者说，直观上看，上有界和单调增不是序列收敛的本质特征！

- 直观：在实数固有的大小关系下，按顺序排列的一列数最终必终止于某个数;
- 这种直观的前提是实数的“固有大小关系”;
- 直观往往会蒙蔽发现“真理”的眼睛！

1. 出发点与动机

难道，收敛序列的序特征被实数“固有大小关系”的表象所掩盖？

核心问题：

- ➔ 何谓序列的“单调增（减）”?
- ➔ 何谓序列的“上（下）有界”?

- 单调减： **for all n, $x_n \leqslant x_{n-1}$;**
- 下有界： **there exists a real number b s.t. $x_n > b$.**

1. 出发点与动机

等价地

- 单调减：for all n, $|x_n - x_{n-1}| \leqslant x_{n-1} - x_n$。

  若定义函数 v 为 $v(x)=x$，则

x_n单调减 $\Longleftrightarrow$ x_n 与 x_{n-1} 的距离不大于$v(x_{n-1}) - v(x_n)$

- 下有界：there exists a real number b s.t. $v(x_n) > b$.

  即，

x_n下有界 $\Longleftrightarrow$ v 在$\{x_n: n>0\}$上的值域$\{v(x_n): n>0\}$下有界

2. 度量空间中的序结构

设（X, d）为度量空间，v 是定义在 X 上的实函数。定义X上的一种关系“$\leqslant_{d,\ v}$”如下：对任意 x, $y \in X$,

$$x \leqslant_{d,v} y \Longleftrightarrow d(x,y) \leqslant v(y) - v(x).$$

容易验证，“$\leqslant_{d,v}$”是X上的一种偏序，即它满足:

- 对任意 x 皆有 $x \leqslant_{d,v} x$
- 若 $x \leqslant_{d,v} y$ 且 $y \leqslant_{d,v} x$, 则 $x = y$
- 若 $x \leqslant_{d,v} y$ 且 $y \leqslant_{d,v} z$, 则 $x \leqslant_{d,v} z$

2. 度量空间中的序结构

定义1. 设（X, d）为度量空间，x_n 是X 中的序列。若存在与d 拓扑等价的度量 ρ 和函数v，使得

$$x_n \leqslant_{\rho, v} x_{n-1},$$

则称 x_n 是单调减序列。

进一步地，若函数 v 在集合$\{x_n : n>0\}$上的取值下有界，则称 x_n 下有界。

容易证明：若函数 v 下半连续，则

x_n 下有界 $\Longleftrightarrow$ 存在$x_b \in X$ 使得 $x_b \leqslant_{\rho, v} x_n$， for all n。

因而，下有界与序结构是相容的

2. 度量空间中的序结构

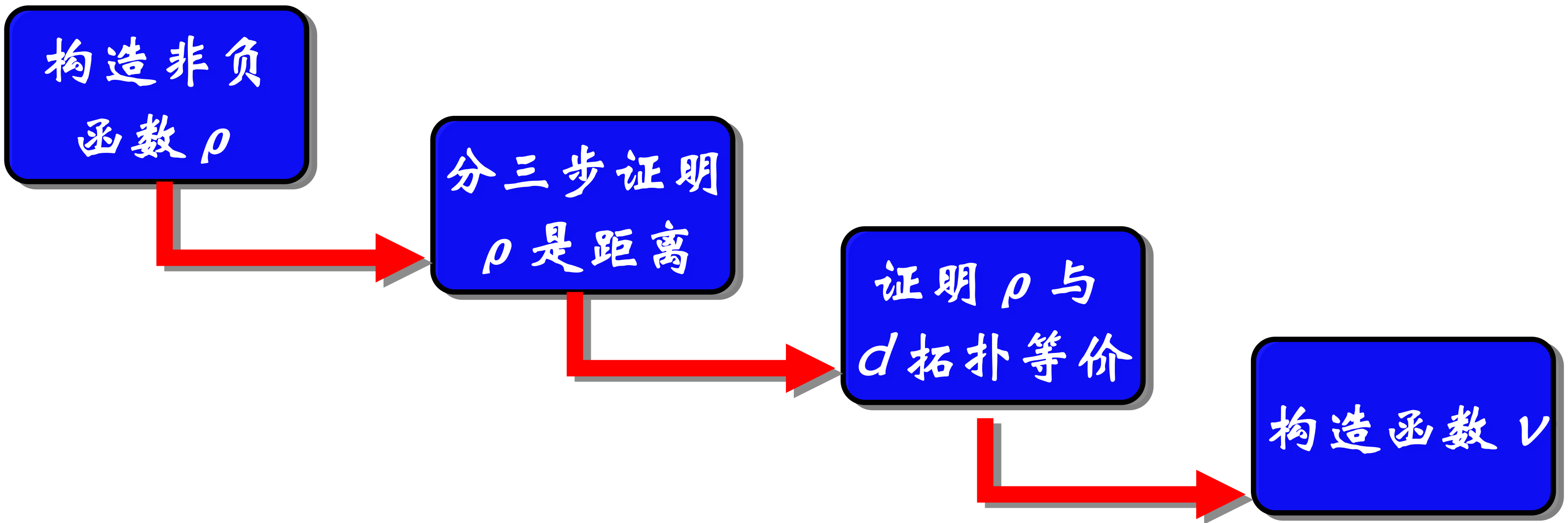
收敛序列的序特征:

定理1. 设（X, d）为完备的度量空间，x_n 是X 中的序列，则 x_n 收敛的充分且必要条件是，它是单调减且下有界的。

关于定理的证明

- 充分性： 易见，若 x_n 是单调减且下有界的，则数列 $v(x_n)$ 是单调减且下有界的，因而收敛，再由不等式 $d(x_n, x_{n-1}) \leqslant v(x_n) - v(x_{n-1})$ 可得 x_n 的收敛性
- 必要性：这是整个定理证明的困难所在，它具有很强的构造性，主要分以下 4步：设x_n 收敛于x_0

2. 度量空间中的序结构



步1: 构造距离函数 ρ:

Let $A_0 = X$ and for each $n \in \mathbb{N}$ let

$$A_n = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r_n\}$$

where $r_n = \sup\limits_{i \geq n} d(x_i, x_0)$. Obviously, the sequence $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ of subsets of X possesses

2. 度量空间中的序结构

the following properties:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = X,\ A_{n+1} \subset A_n,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

and $dia(A_n) \longrightarrow 0$ as $n \longrightarrow \infty$, where $dia(A) = \sup\{d(x,y) : \ x, y \in A)\}$ is the diameter of subset A.

For each $x \in X$ let $n_x = \sup\{n \in \mathbb{N} : \ x \in A_n\}$. Then, we have that $n_{x_0} = \infty$ and $n_x < \infty$ for all $x \neq x_0$. For every pair of $x, y \in X$ let

$$\Gamma_{xy} = \Big\{ \{a_i\}_{i=1}^{m+1} : \ a_1 = x, a_{m+1} = y; m \in \mathbb{N} \Big\}.$$

It is clear to see that sequence $\{a_i\}_{i=1}^{m+1} \in \Gamma_{xy}$ if and only if $\{a_{m+2-i}\}_{i=1}^{m+1} \in \Gamma_{yx}$. Hence, for each pair $x, y \in X$, $\Gamma_{xy} = \Gamma_{yx}$. Let $\alpha \in (0,1)$ and define a nonnegative

2. 度量空间中的序结构

function ρ on $X \times X$ as follows:

$$\rho(x,y) = \inf_{\{a_i\}_{i=1}^{m+1} \in \Gamma_{xy}} \sum_{i=1}^{m} \alpha^{\min\{n_{a_i}, n_{a_{i+1}}\}} d(a_i, a_{i+1})$$

步2: 分三步证明如上定义的函数 ρ 是X上的距离（略）

步3: 证明 ρ 与 d 拓扑等价（略）

步4: 构造 X 上的实函数 v

Let $v_0 : A \to \mathbb{R}$, where $A =: \{x_0, x_n : n \in \mathbb{N}\}$, be defined as follows: $v(x_0) = 0$ and $v(x_n) = \sum_{i=n}^{\infty} \rho(x_i, x_{i+1})$ for all $n \in \mathbb{N}$. Since x_0 is the unique accumulation point of A, v_0 is a continuous function of A. Hence, the extension theorem of continuous functions gives a continuous function v defined on the whole space X. ■

2. 度量空间中的序结构

主要推论

Corollary 1. (Cristi's Theorem) *Let X be a complete metric space with metric d, T a mapping from X into itself. If there exists a lower semi-continuous and lower bounded function f such that*

$$d(Tx, x) \le f(x) - f(Tx), \ \forall x \in X,$$

then T possesses a fixed point.

Remark：Cristi-Kirk 不动点定理是与Ekeland变分原理等价的一个重要定理，在非线性分析中具有广泛的应用。

2. 度量空间中的序结构

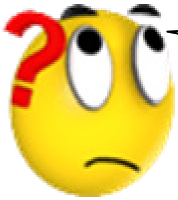
Corollary 2. *Let X be a complete metric space with metric d, and let T be a mapping from X into itself. If there exists a positive real number $\alpha < 1$ such that*

$$d(Tx, T^2x) \leq \alpha d(x, Tx),\ \forall x \in X,$$

then for all $x \in X$ the iteration sequence $\{T^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent. Therefore, if T is continuous, then the fixed point set $Fix(T)$ of T is not empty and every iteration sequence $\{T^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges to a fixed point.

现有的压缩型不动点定理都可以纳入到定理1 的框架内!

3. 线性空间中的序结构



在线性空间中情形又会如何？

若X为Banach空间，v 是有界线性泛函，则容易证明

$$x \leqslant_{d,v} y \Longleftrightarrow y - x \in X^{+,v} =: \{z \in X: \|z\| \leqslant v(z)\}$$

其中$d(x,y)=\|x-y\|$。进一步可以验证

- $X^{+,v}$ 是X 的一个正锥（**positive cone**），因而 $(X, X^{+,v}, \leqslant_{d,v})$ 构成一个序Banach空间（**ordered Banach space**）；
- $X^{+,v}$是真的（**proper**）且正规的（**normal**），但不一定是生成的（**generating**）

3. 线性空间中的序结构

序Banach空间(X, X^+, $\leqslant d, v$)的特征定理

定理2. 设（X, X^+, ≤）是序 **Banach** 空间，则下列命题等价:

（1） 存在有界线性泛函 v 使得 X^+ 包含于 $X^{+,v}$;

（2） X^+ 有基（**base**）.

集合 K 称为 X^+ 的基，如果对任意 $x \in X^+$ 皆有非负实数 λ 使得 $\lambda x \in K$

在命题（1）中，X^+ 可以严格包含于 $X^{+,v}$。例子如下:

3. 线性空间中的序结构

Example 1. *In the ordered Banach space* $L^1[0,1]$ *the bounded linear functional* v *of* $L^1[0,1]$ *defined by*

$$v(x) = \int_0^{1/2} x(t)dt + 4\int_{1/2}^{1} x(t)dt,\ x \in L^1[0,1]$$

satisfies that $L^1_+[0,1] \subseteq \{x \in L^1[0,1] : \|x\| \le v(x)\}$, *where* $L^1_+[0,1]$ *denotes the positive cone of positive elements* $L^1[0,1]$, *and whereas the nonpositive element* $x_0 \in L^1[0,1]$ *defined by* $x_0(t) = -1$ *for* $t \in [0,1/2)$ *and* $x_0(t) = 1$ *for* $t \in [1/2,1]$ *satisfies that* $\|x_0\| = 1 < 3/2 = v(x_0)$.

猜想：序 Banach 空间（$X, X^+, \leqslant$）有基，当且仅当存在有界线性泛函 v 使得 $X^+ = X^{+,v}$。 Still open！

4. 应用举例：残疾人口系统渐近性态

算子半群

定义2. 设 X 为Banach空间，$\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一族定义在 X 上的有界线性算子。如果

（1）$T_0=I$, 且对任意 t，$s\geqslant 0$, $T_{t+s}=T_t T_s$;

（2）对任意x ∈ X，映射 $t\rightarrow T_t x$ 连续

则称 $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 为单参数强连续算子半群，简称 C_0 -半群。

定义3（生成元，infintesimal generator）：$A: D(A)\rightarrow X$

$$Ax=\lim_{t\rightarrow 0} t^{-1}(T_t x-x)$$

其中 $D(A)=\{x\in X$：极限 $\lim_{t\rightarrow 0} t^{-1}(T_t x-x)$ 存在$\}$

4. 应用举例：残疾人口系统渐近性态

生成元的基本性质

（1）生成元是闭的、稠定的线性算子;

（2）对任意$x \in X$，$t>0$，皆有$\int_0^t T_s x\, ds \in D(A)$;

（3）对任意$x \in D(A)$，$T_t x$关于t连续可微，且

$$T'_t x = A T_t x = T_t A x,\quad t>0$$

（4）当复数λ的实部充分大时， λ是A的正则值，且

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \int_0^t e^{-\lambda s} T_s x ds$$

4. 应用举例：残疾人口系统渐近性态

与抽象微分方程的关系

线性算子A生成C_0-半群的充分且必要条件是，抽象Cauchy问题$x'(t)=Ax(t)$，$x(0)=x$是适定的。

- 至于如何判定算子A生成C_0–半群，可参见著名的Hille–Yosida条件，或Hille-Lumer-Phillips条件。
- 1998年，本人建立了一个仅涉及预解式一次幂的判定准则。

即，存在X的稠密子集D，使得对任意 $x \in$ D，问题皆有唯一解，且解连续依赖于初始值。

4. 应用举例：残疾人口系统渐近性态

序Banach空间中算子半群的渐近性态：

Theorem 3. *Suppose that $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ is a positive C_0-semigroup of ordered Banach space X with base K. Let $v \in X^*$ be determined as in Theorem 2. If $v \in D(A^*)$ and $A^*v \leq \lambda v$ for a certain real number λ, then*

$$\|T(t)x\| \leq \|v\| \cdot e^{\lambda t} \cdot \|x\|, \ \forall x \in X^+, t \geq 0.$$

Therefore, there exists a real constant $\alpha \geq 1$ such that $\|T(t)\| \leq \alpha \|v\| \cdot e^{\lambda t}$ for all $t \geq 0$ if the positive cone X^+ is generating.

若定义 $\lambda^*(A) = \|A^*v\| / \|v\|$，则易验证，

$\lambda^*(A)$ 正好是矩阵测度的无穷维版本。

4. 应用举例：残疾人口系统渐近性态

残疾人口系统

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1(r,t)}{\partial t} + \frac{\phi_1(r,t)}{\partial r} = \sigma(r)\phi_2(r,t) - \big(\mu(r) + \delta(r)\big)\phi_1(r,t) \\ \frac{\partial \phi_2(r,t)}{\partial t} + \frac{\phi_2(r,t)}{\partial r} = \delta(r)\phi_1(r,t) - \big(\widetilde{\mu}(r) + \sigma(r)\big)\phi_2(r,t) \\ \phi_1(r,0) = \phi_{10}(r),\ \phi_2(r,0) = \phi_{20}(r) \\ \phi_1(0,t) + \phi_2(0,t) = \beta \int_{r_1}^{r_2} h(r)k(r)\phi_1(r,t)dr + \widetilde{\beta} \int_{r_1}^{r_2} \widetilde{h}(r)\widetilde{k}(r)\phi_2(r,t)dr, \end{cases}$$

where ϕ_1, ϕ_2 represent the density distributions of normal population and disabled population; μ, $\widetilde{\mu}$ are the age specific mortality moduli of normal and disabled people; $0 \leq \sigma(r), \delta(r) \leq 1$ represent the recover rate and disabled rate at age r; $0 < k(r), \widetilde{k}(r) < 1$ represent the proportion of the female normal population and that of female disabled population of age r; h, $\widetilde{h}$ with L^1-norm equal to 1 are the birth modes

4. 应用举例：残疾人口系统渐近性态

of normal females and disabled females, respectively. And, the constant $r_m > 0$ is the life span of human beings, $[r_1, r_2] \subset (0, r_m)$ is the birth interval of females, the constants β, $\widetilde{\beta}$ are the birth rates of normal and disabled people, which depend on government population policy.

基本假设:

these functions $\mu, \widetilde{\mu}; h, \widetilde{h}; k, \widetilde{k}$ are all nonnegative and satisfy

(i) $\mu_* \le \mu(r), \widetilde{\mu}(r) < \infty$ for all $r \in [0, r_m)$;

(ii) $h(r) = \widetilde{h}(r) = 0$ for all $r \notin [r_1, r_2]$, and $\int_0^{r_m} h(r)dr = \int_0^{r_m} \widetilde{h}(r)dr = 1$; and

(iii) $k_* \le k(r), \widetilde{k}(r) < \infty$ for all $r \in [0, r_m)$,

where μ_*, k_* are positive constants.

4. 应用举例：残疾人口系统渐近性态

问题的转化

Let, for $p \in [1, \infty]$, X_p denote the product space $L^p[0, r_m) \times L^p[0, r_m)$ endowed with the norm $\|\phi\|_p = \|\phi_1\|_p + \|\phi_2\|_p$. Then, it is clear to see that X_p is an ordered Banach space associated to the positive cone $X_{p+} = L^p_+[0, r_m) \times L^p_+[0, r_m)$, where $L^p_+[0, r_m)$ is the set of nonnegative functions in $L^p[0, r_m)$. Define an operator A_p : $D(A_p) \subset X_p \to X_p$ by

$$A_p\phi = \begin{pmatrix} -\phi_1' - (\mu + \delta)\phi_1 + \sigma\phi_2 \\ -\phi_2' - (\tilde{\mu} + \sigma)\phi_2 + \delta\phi_1 \end{pmatrix}$$

where $D(A_p)$ consists of all $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T \in X_p$ whose elements ϕ_1 and ϕ_2 are

4. 应用举例：残疾人口系统渐近性态

absolutely continuous with derivatives $\phi_1', \phi_2' \in L^p[0, r_m)$ and satisfy

$$\phi_1(0) + \phi_2(0) = \beta \int_{r_1}^{r_2} h(r)k(r)\phi_1(r)dr + \widetilde{\beta} \int_{r_1}^{r_2} \widetilde{h}(r)\widetilde{k}(r)\phi_2(r)dr.$$

Then, the system (4.1) is equivalently written into the following compact form

$$\boxed{u'(t) = A_1 u(t), t > 0; u(0) = \phi_0, u(t) \in X_1.}$$

Lemma 3. *There exists a unique real* λ *solving the following equation*

$$2 = \beta \int_{r_1}^{r_2} e^{-\lambda r} h(r)k(r)\phi_1(r)dr + \widetilde{\beta} \int_{r_1}^{r_2} e^{-\lambda r} \widetilde{h}(r)\widetilde{k}(r)\phi_2(r)dr, \qquad (4.6)$$

where $(\phi_1, \phi_2)^T = Ke$, $e(r) = (1,1)^T$ *for all* $r \in [0, r_m)$.

4. 应用举例：残疾人口系统渐近性态

主要结论

Proposition 1. *Every solution* $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ *of (4.1) with* $\phi_{10}, \phi_{20} \in L^\infty[0, r_m)$ *exponentially decays to* 0 *as* t *goes to infinity if and only if* $\lambda^* < 0$, *where* λ^* *is the unique real solution of Equation (4.6)*

容易验证，若令 $\phi = \phi_1 + \phi_2$，则我们可导出人口发展方程，相应于（4.6）式 可得方程的特征方程

$$1 = \beta \int_{r_1}^{r_2} e^{-\lambda r} h(r) k(r) \phi(r) dr$$

5. 研究展望

1 偏序$\leqslant_{d,v}$对度量d和函数v的依赖关系

2 线性空间中偏序$\leqslant_{d,v}$结构的性质

3 诸如Ekeland变分原理、凸函数基本定理等重要结论的本质刻画（基于定理1）

5. 研究展望

4 更一般的不动点存在性定理或非线性迭代系统的收敛性定理（基于定理1）

5 有基的序**Banach**空间正锥的特征刻画

6 在一般框架下非线性动力系统稳定的“本质”刻画（定义“本质”**Liapunov**函数）

……

结束语

yurinuri

"꿈이 있는 맑은 어린이의 세상"

Thank You!