第六节 第一型线积分与面积分

习题6 .6(p214)

1(2)(4)(5),3(3),5,6,7,9(2)

10(1)(2)(3)(5)(9)，11, 12, 14

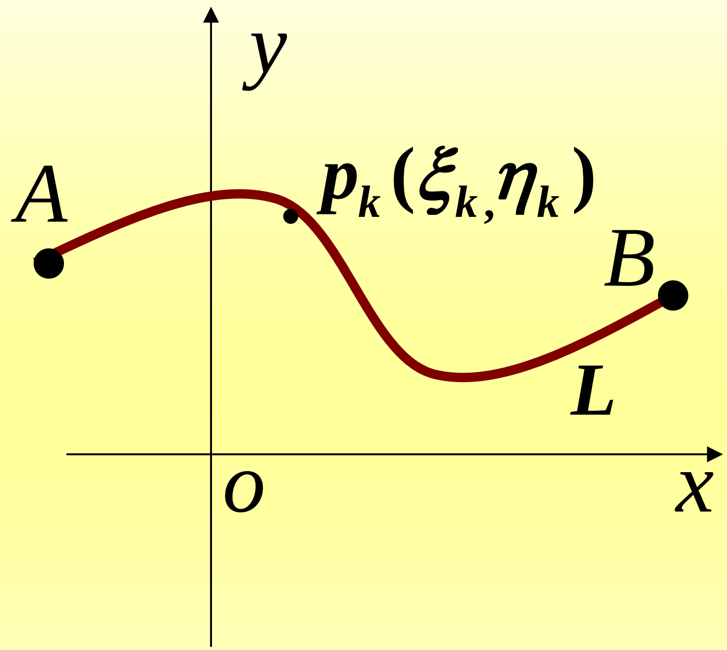
西安交通大学 李换琴

6.1 第一型线积分

$$\int_{\Omega} f(p)\,\mathrm{d}\Omega = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(p_k)\Delta\Omega_k$$

若Ω为平面曲线 L

$$\int_{L} f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$



若Ω为空间曲线 L

$$\int_{L} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$$

第一型线积分也称为对弧长的曲线积分

第一型线积分的计算公式

设有一条简单的光滑曲线（C)，其参数式方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \ (\alpha \le t \le \beta),$$

若函数 $f(x, y, z)$ 在 (C) 上连续，

则 $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$ 弧微分

$$\int_{(C)} f(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

说明:

$\because ds > 0, \therefore dt > 0,$ 因此积分限必须满足 $\alpha < \beta$！

例1 求$I=\int_\Gamma xyz\,\mathrm{d}s$,

$\Gamma: x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt, (0\le t\le 2\pi)$

解 $$\mathrm{d}s=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}t$$

$$I=\int_\Gamma xyz\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}ka^2t\cos t\sin t\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{ka^2\sqrt{a^2+k^2}}{2}\int_0^{2\pi}t\sin 2t\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}\pi ka^2\sqrt{a^2+k^2}$$

特别的，若（C）为平面曲线

(1) $x = x(t), y = y(t) \quad \alpha \le t \le \beta$

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f[x(t),y(t)]\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2(x)}dt.$$

(2) $y = \psi(x) \qquad a \le x \le b.$

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}dx.$$

(3) $x = \varphi(y) \qquad c \le y \le d.$

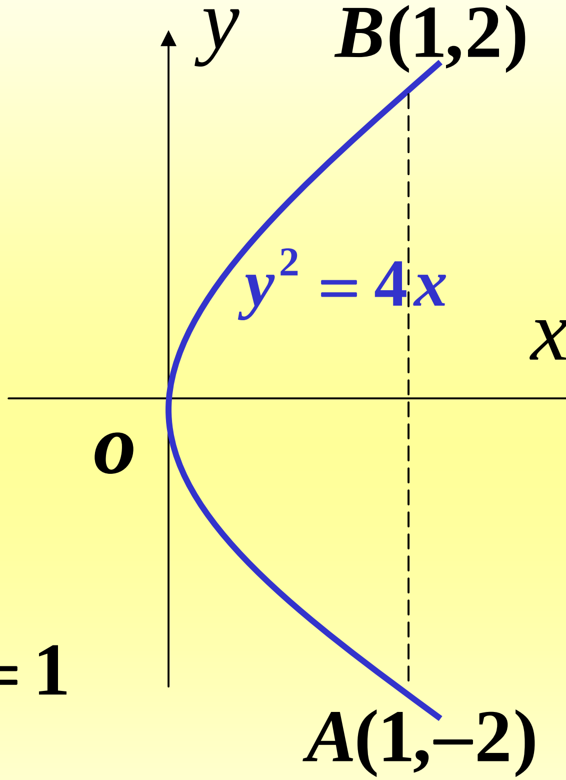
$$\int_C f(x,y)ds = \int_c^d f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy.$$

(4) $\rho = \rho(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$

$$\int_C f(x,y)\mathrm{ds} = \int_\alpha^\beta f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$$

例2 求$I=\int_L y\,ds$,其中$L: y^2=4x$,从(1,2)到(1,−2)一段.

解 $L: x=\dfrac{y^2}{4},\quad -2\le y\le 2$



$$\therefore I=\int_{-2}^{2} y\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$$

$$=\int_{-2}^{2} y\sqrt{1+(\frac{y}{2})^2}\,dy=0.$$

例3 求$I=\oint_\Gamma (x^2+y^2)\mathrm{d}s,\quad \Gamma: x^2+y^2=1$

解 $I=\oint_\Gamma 1\,ds=2\pi$

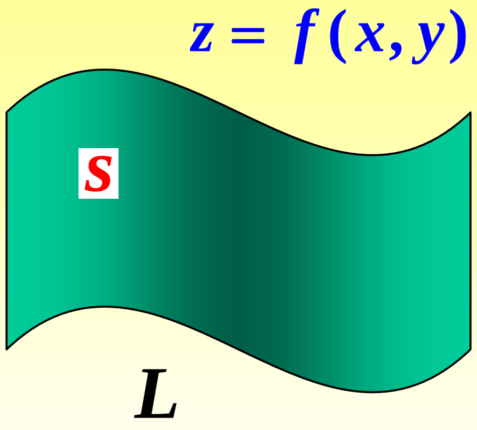
第一型线积分的应用

(1) 当$\rho(x,y)$表示L的线密度时,

$$M=\int_L \rho(x,y)ds;$$

(2) 当$f(x,y)\equiv 1$时, $L_{弧长}=\int_L ds$;

(3) 当$f(x,y)$表示立于L上的柱面在点(x,y)处的高时,

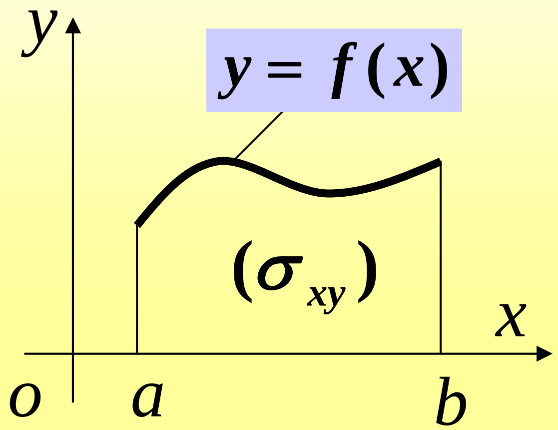


$$S_{柱面面积}=\int_L f(x,y)ds.$$

(4) 曲线弧对 x轴及 y轴的转动惯量

$$I_x=\int_L y^2\rho ds,\qquad I_y=\int_L x^2\rho ds.$$

(5) 曲线弧的质心坐标



$$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho ds}{\int_L \rho ds},\qquad \bar{y}=\frac{\int_L y\rho ds}{\int_L \rho ds}.$$

（6）旋转面的面积公式

xoy面上曲线$L: y=f(x)(>0, a\le x\le b)$绕$x$轴旋转一周所得旋转面的 面积

$$S=\int_L 2\pi f(x)ds=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

例5 设椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 被平面 $z=y$ 与 $z=0$ 所截，求位于第一、二卦限内 所截下部分的侧面积 .

解 $\mathrm{d}A = z\mathrm{d}s$ $\quad C: \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$

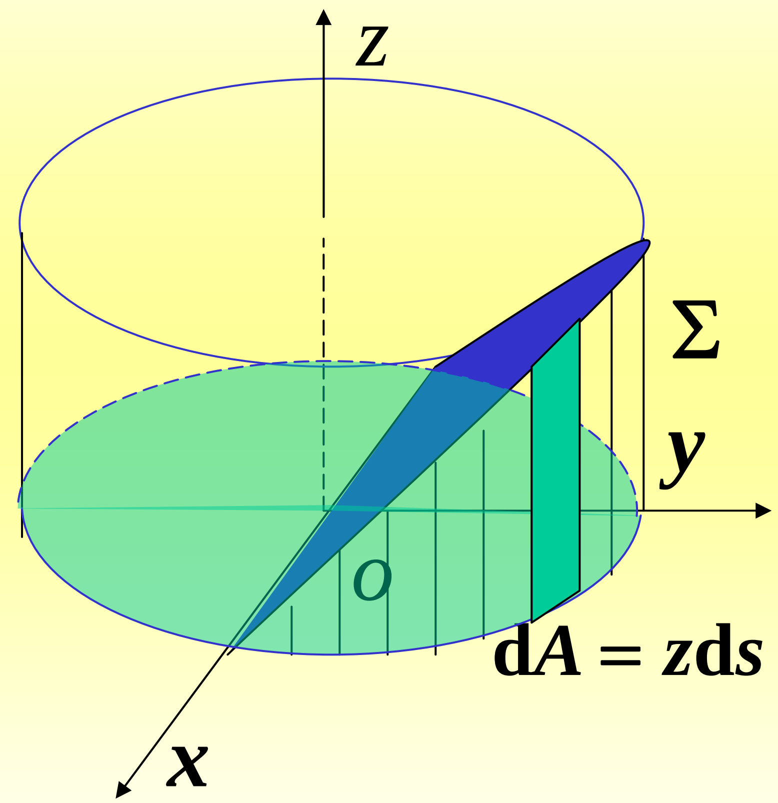
$$\Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{5}\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \quad (0\le t\le \pi)$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt = \sqrt{5+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

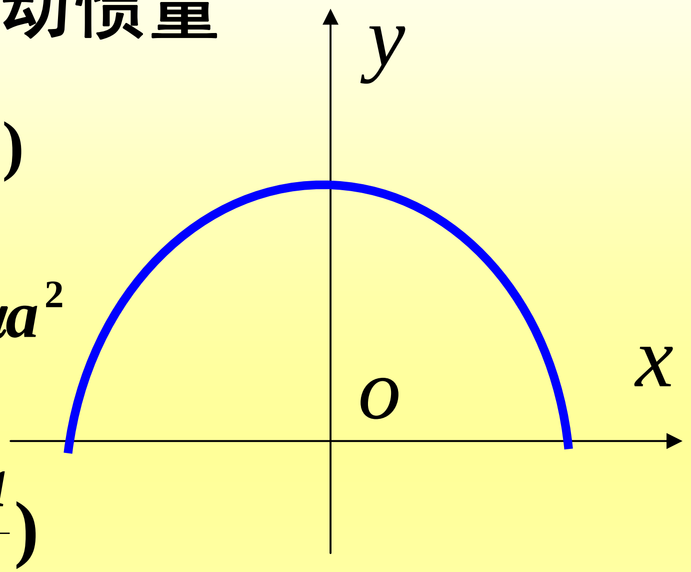
$$A=\int_C z\mathrm{d}s = 3\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{5+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\underline{\underline{u=\cos t}}\; -3\int_1^{-1}\sqrt{5+4u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=6\int_0^1\sqrt{5+4u^2}\,\mathrm{d}u = 9+\frac{15}{4}\ln 5$$



例6 设有一半径为a的半圆形金属丝，质量均匀分布，求它的质心和它对直径的转动惯量



解 $C:\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$ $(0 \le \theta \le \pi)$

(1) $M_x = \int_C \mu y \mathrm{d}s = \int_0^{\pi} \mu a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta = 2\mu a^2$

$\bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{2\mu a^2}{\mu a \pi} = \dfrac{2a}{\pi}$ 质心为$(0, \dfrac{2a}{\pi})$

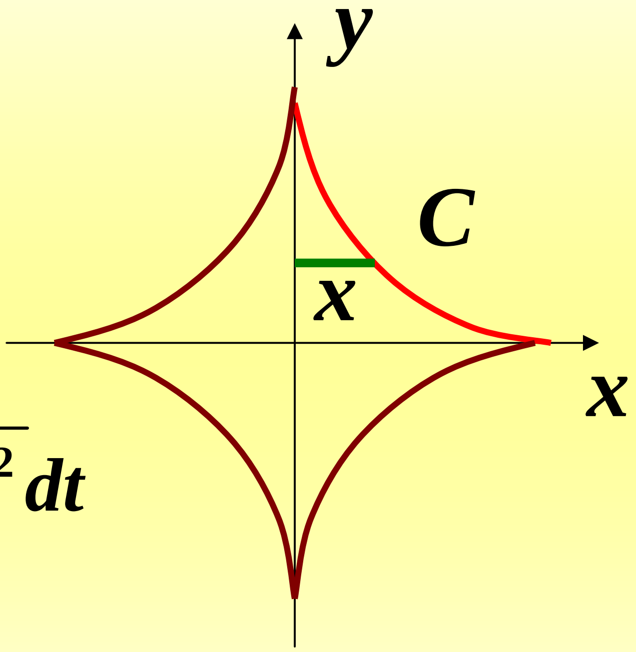
$\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\mathrm{d}\theta = a\mathrm{d}\theta$

(2) $I_x = \int_C y^2 \mathrm{d}m = \int_C \mu y^2 \mathrm{d}s$

$= \int_0^{\pi} \mu a^3 \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \dfrac{\mu \pi a^3}{2} \overset{m = \mu\pi a}{=\!=\!=} \dfrac{m}{2}a^2$

例5 求星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 绕y旋转一周所形成得旋转面得面积。

解 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^2 t$



$$S=2\int_C 2\pi x ds$$

$$=2\int_0^{\pi/2} 2\pi a\cos^3 t\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin t dt$$

$$=\frac{12}{5}\pi a^2$$

小结

1、第一型曲线积分的计算

$$\int_{(C)} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$

其中(C)为光滑曲线：$x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ (\alpha \le t \le \beta)$,

2、第一型曲线积分的应用

(1) 质量 $M = \int_L \rho(x,y)ds$；

(2) $L_{弧长} = \int_L ds$；

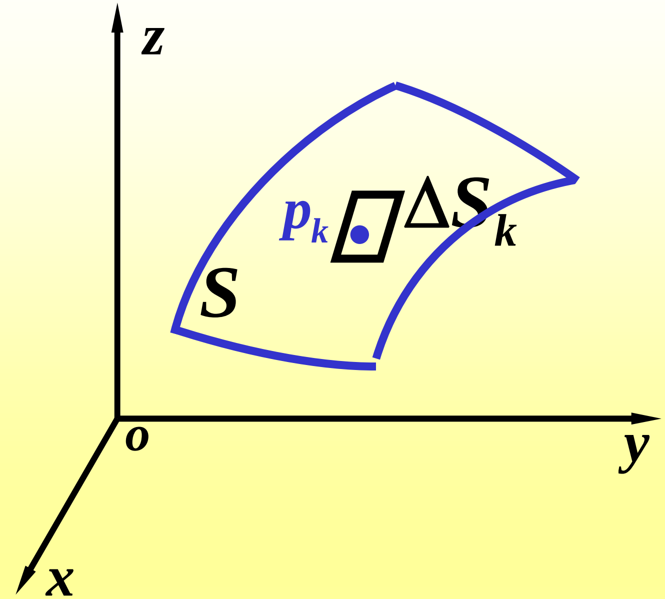
(3) $S_{柱面面积} = \int_L f(x,y)ds.$

(4) 转动惯量 $I_x = \int_L y^2 \rho ds$

(5) 质心：$\bar{x} = \dfrac{\int_L x\rho ds}{\int_L \rho ds}, \bar{y} = \dfrac{\int_L y\rho ds}{\int_L \rho ds}.$

（6）旋转面的面积

6.2 第一型面积分



1、定义

$$\int_{\Omega} f(p)\mathrm{d}\Omega = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(p_k)\Delta\Omega_k$$

若Ω为空间曲面（S）

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\tau_k)\Delta S_k$$

第一型线积分也称为对面积的曲面积分

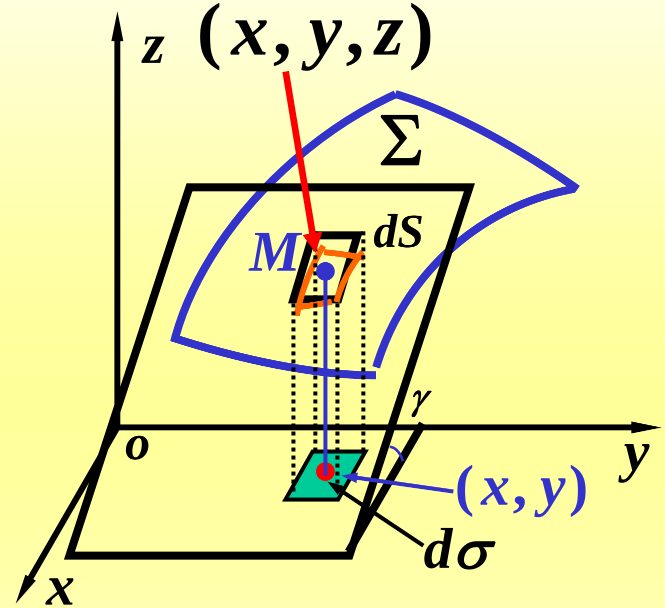
(1) $f(x,y,z)$中自变量不独立.　　(2) $\Delta S_k \geq 0$

(3) 积分的其它性质成立。

(4) $\boxed{S = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S}$ 表示空间曲面Σ的面积。

2、第一型面积分的计算

设光滑曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y)$，且Σ在xoy平面的投影域为D，如果$f(x,y,z)$在Σ上连续，

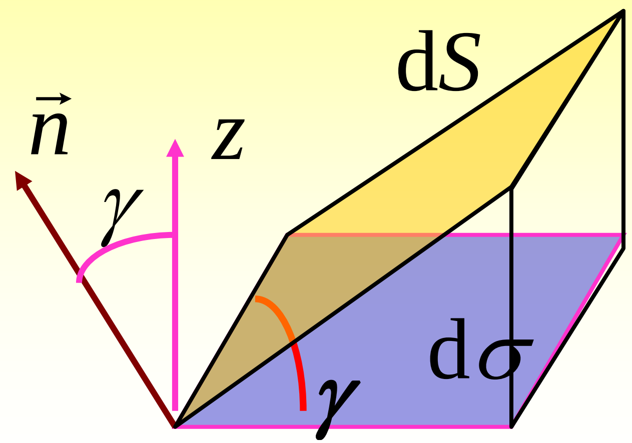


则有$d\sigma = dS\cos\gamma \Rightarrow dS = \dfrac{d\sigma}{\cos\gamma}$

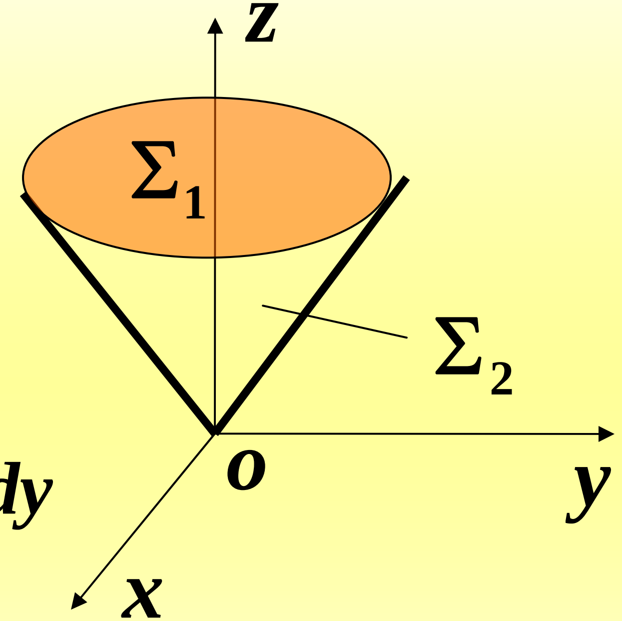
又$\vec{n} = \{-z_x, -z_y, 1\}$

$$\therefore \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S\\ =&\iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}}$$



例1 求 $I=\iint\limits_{\Sigma} z^2 dS$，$\Sigma$ 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=1$ 所围成的立体表面。



解 $I=\iint\limits_{\Sigma} z^2 dS=\iint\limits_{\Sigma_1} z^2 dS+\iint\limits_{\Sigma_2} z^2 dS$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} z^2 dS=\iint\limits_{\Sigma_1} 1 dS=\pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} z^2 dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,dxdy=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

所以 $I=\iint\limits_{\Sigma} z^2 dS=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$

一般的

（1）若$\Sigma: y = y(x,z)$,且Σ在xz平面的投影为D_{xz},

f在Σ上连续，则$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$存在,且

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

（2）若$\Sigma: x = x(y,z)$,且Σ在yz平面的投影为D_{yz},

f在Σ上连续，则$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$存在,且

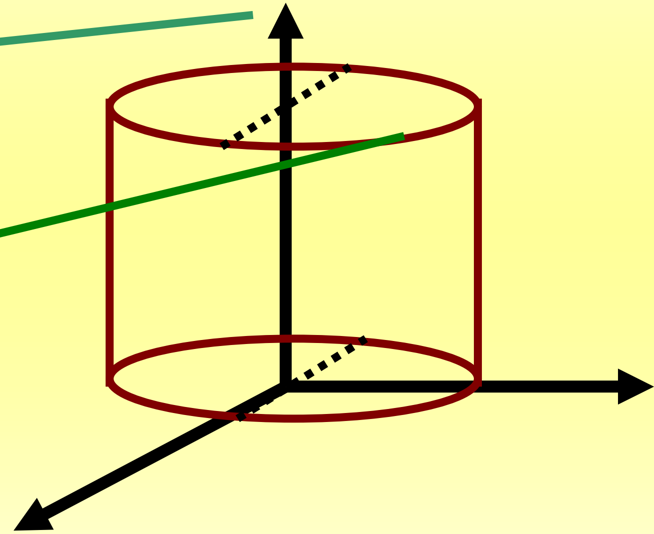
$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

例2 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} zdS$，其中$\Sigma$是圆柱面 $x^2+y^2=1$，界于$z=2$及$z=0$部分的空间立体的表面.

解 柱面方程可写为 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$

$\Sigma_{左}$: $y=-\sqrt{1-x^2}$

$\Sigma_{右}$: $y=\sqrt{1-x^2}$



$$\iint\limits_{\Sigma_3} zdS=\iint\limits_{\Sigma_{左}} zdS+\iint\limits_{\Sigma_{右}} zdS$$

$$=2\iint\limits_{D_{xz}} z\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz=2\int_{-1}^{1}dx\int_0^2 z\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dz=4\pi$$

$$原式 = \iint\limits_{\Sigma} |xyz|\,dS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\,dS$$

$$= 4\iint\limits_{D'_{xy}} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy$$

其中 $D'_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0\}$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^1 r^2 \cos t \sin t \cdot r^2 \sqrt{1+4r^2}\, r\,dr$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt \int_0^1 r^5 \sqrt{1+4r^2}\,dr \qquad 令 u = 1 + 4r^2$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{u}\left(\frac{u-1}{4}\right)^2 du = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

例3 求质量均匀分布 的球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 对其直径的转动惯量

解 $$\mathrm{d}J_z=r^2\mathrm{d}m=(x^2+y^2)\mu\mathrm{d}S=\frac{\mu R(x^2+y^2)}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$$

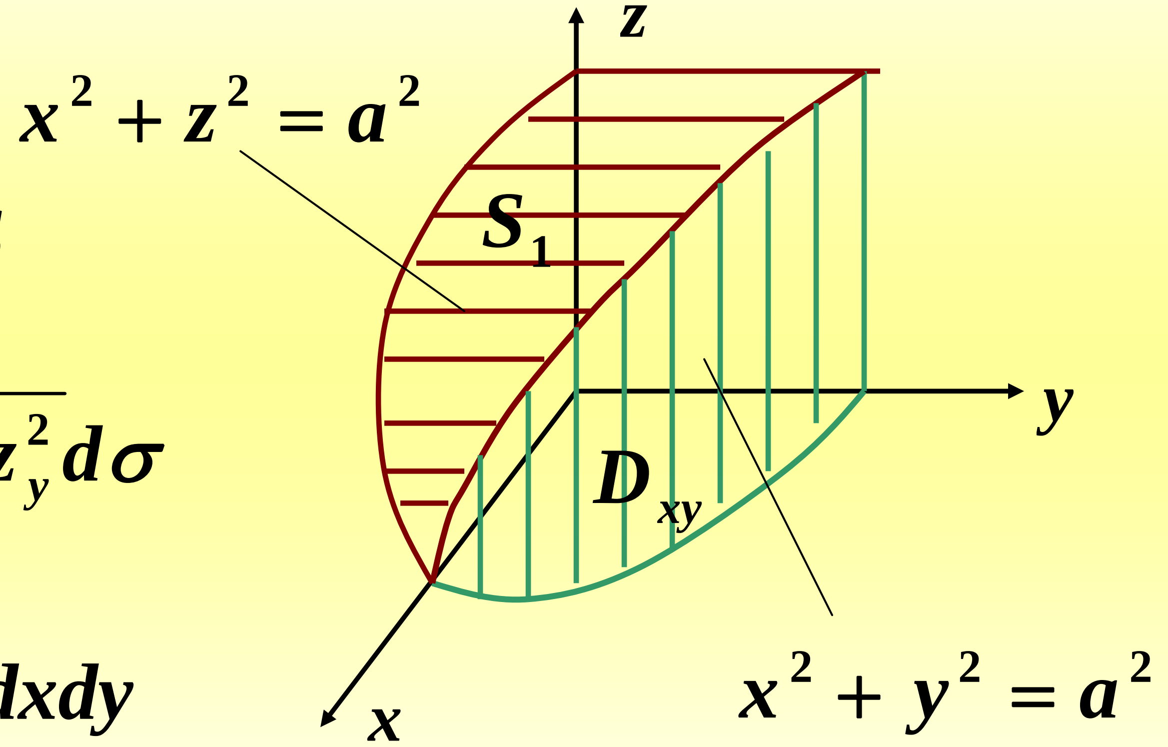
$$J_z=\iint_\Sigma \mu(x^2+y^2)\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma_{上}}\mu(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_D \frac{\mu R(x^2+y^2)}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma=2\mu R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{3}\mu\pi R^4 \xlongequal{m=4\pi\mu R^2}\frac{2}{3}mR^2$$

例4 计算圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 截割另一圆柱面 $x^2+z^2=a^2$所截得部分的曲面面积 $(a>0)$.

解



$$S=8S_1=8\iint_{(S)}dS$$

$$=8\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma$$

$$=8\iint_{D_{xy}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdy$$

$$=8a^2$$

参数方程下曲面积分的计算

若曲面 Σ的方程为

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \quad (u,v)\in(\sigma)\subset R^2$$

设$\vec{r}(u,v)$）在(σ)上连续可微，且 $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq 0$

则 $dS=\left\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right\|dudv$

$$E=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u$$

$$=\sqrt{EG-F^2}dudv$$

$$F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v$$

$$G=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\sigma} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$$

例5. 求$\iint\limits_{\Sigma} z^2 dS$,其中$\Sigma$为圆锥面的一部分：

$$x = r\cos\varphi\sin\alpha, y = r\sin\varphi\sin\alpha, z = r\cos\alpha;$$

$$0 \le r \le a, 0 \le \varphi \le \pi; \alpha\text{为常数}（0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

解 $\vec{r}_r = (\cos\varphi\sin\alpha, \sin\varphi\sin\alpha, \cos\alpha)$

$$\vec{r}_\varphi = (-r\sin\varphi\sin\alpha, r\cos\varphi\sin\alpha, 0)$$

$$EG - F^2 = \left|\vec{r}_r\right|^2 \left|\vec{r}_\varphi\right|^2 - \left(\vec{r}_r \cdot \vec{r}_\varphi\right)^2 = r^2 \sin^2\alpha$$

$$dS = r \sin\alpha dr d\varphi$$

$$\iint\limits_{\Sigma} z^2 dS = \iint\limits_{\sigma} r^2 \cos^2\alpha \, r\sin\alpha \, dr d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 \cos^2\alpha \sin\alpha dr = \frac{\pi}{2} a^4 \cos^2\alpha \sin\alpha$$

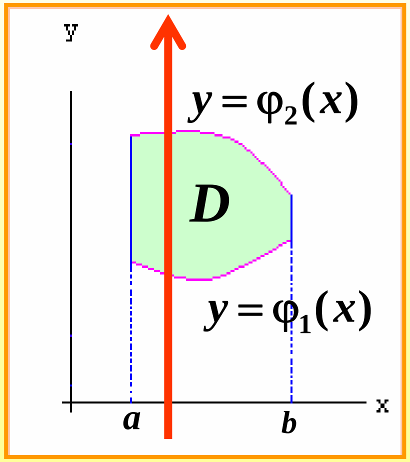
多元函数积分小结

$f(M)$在Ω上的积分 $\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega$

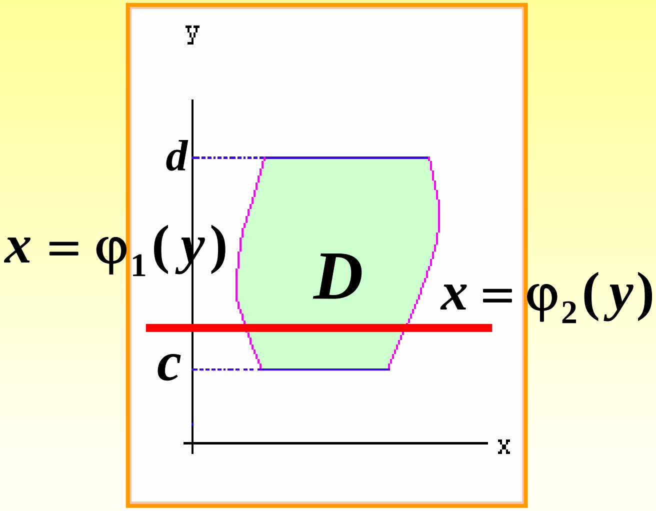
(1)当Ω为平面域(σ)时,

二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$$\boxed{=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y}$$



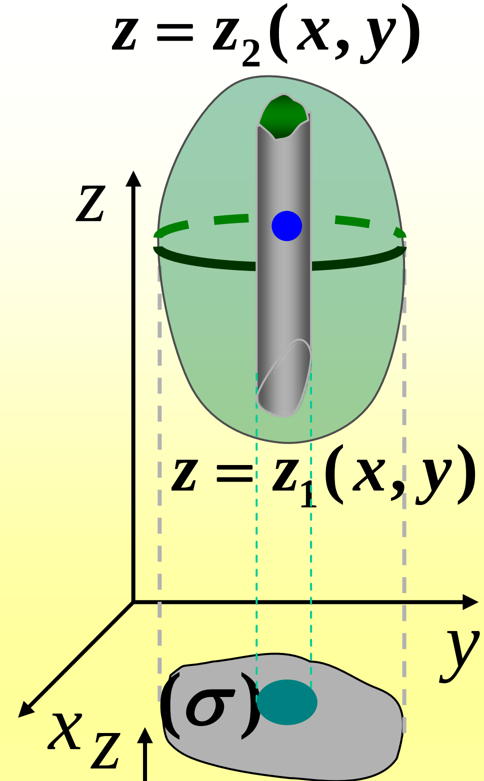
$$\boxed{\text{或} =\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x}$$



当积分域为圆形域或环形域时采用极坐标来计算.

特殊情况采用坐标变换来计算.

多元函数积分小结



$f(M)$在Ω上的积分 $\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega$

(3)当Ω为空间域(V)时，

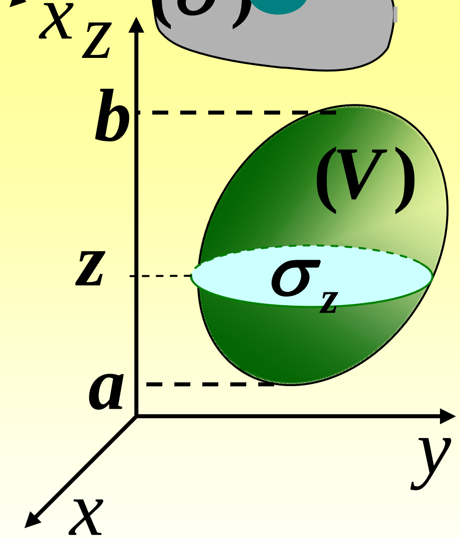
三重积分 $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}v$

1、直角坐标系下三重积分的计算

“先一后二”　“先二后一”

2、柱面坐标系下三重积分的计算

3、球面坐标系下三重积分的计算



$$= \iiint_{(V)} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\underline{\rho^2\sin\varphi}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

多元函数积分小结

$f(M)$在Ω上的积分 $\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega$

(4)当Ω为一段曲线(C)时,

第一型线积分 $\int_{(c)} f(x,y)\mathrm{d}s$ 或$\int_{(c)} f(x,y,z)\mathrm{d}s$

若$(C): x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ (\alpha \le t \le \beta)$,

$f(x,y,z)$在(C)上连续，则

$$\int_{(C)} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

多元函数积分小结

$f(M)$在Ω上的积分 $\int_{(\Omega)} f(M)\mathrm{d}\Omega$

(4)当Ω为一片曲面时，**第一型面积分** $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$

若$\Sigma: z = z(x,y)$，且Σ在xy面的投影为D_{xy}，

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

若$\Sigma: y = y(x,z)$，且Σ在xz平面的投影为D_{xz}，

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

若$\Sigma: x = x(y,z)$，且Σ在yz平面的投影为D_{yz}，

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

多元函数积分小结

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

$$\int_{(c)} f(x,y)\mathrm{d}s \text{ 或} \int_{(c)} f(x,y,z)\mathrm{d}s$$

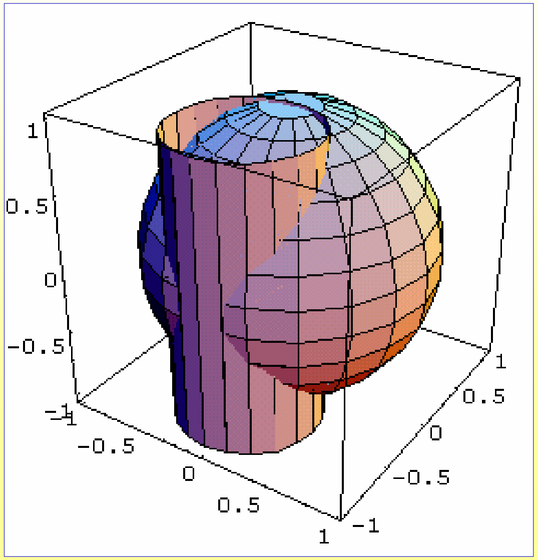
$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

（1）都具有相同的性质

（2）都可以利用对称性

（3）都可以用于求质心与转动惯量

练习 1.求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，含在圆柱体 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

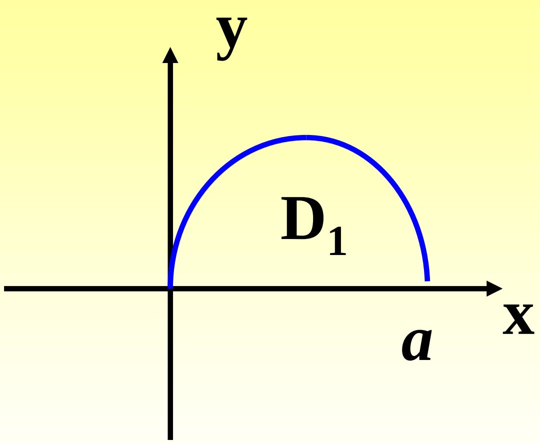


解 由对称性知 $A=4A_1=4\iint_{\Sigma_1}dS$,

Σ_1 为第一卦限部分

曲面方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,

于是 $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,



$$\therefore A=4\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr=2\pi a^2-4a^2.$$

2. 求由曲面$x^2+y^2=az$和$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$所围立体的表面积.

解 $\begin{cases} x^2+y^2=az \\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$, 得交线: $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=a \end{cases}$,

在xy平面上的投影域为 D_{xy}: $x^2+y^2\le a^2$,

由$z=\dfrac{1}{a}(x^2+y^2)$得 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}$,

由$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$知 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$,

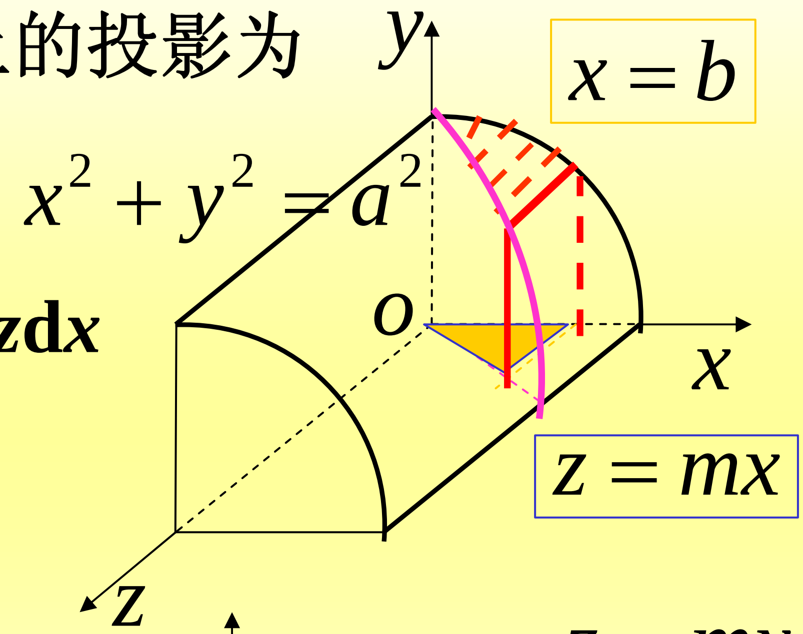
故$S=\displaystyle\iint_{D_{xy}}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}\,dxdy+\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}\,dxdy$

$$=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1).$$

3. 求$x^2+y^2=a^2$在第一卦限中被$z=0, z=mx(m>0)$, $x=b(b>0)$截下部分的面积.

解 曲面为$y=\sqrt{a^2-x^2}$在xoz面上的投影为

$$(\sigma): 0\le x\le b, 0\le z\le mx.$$

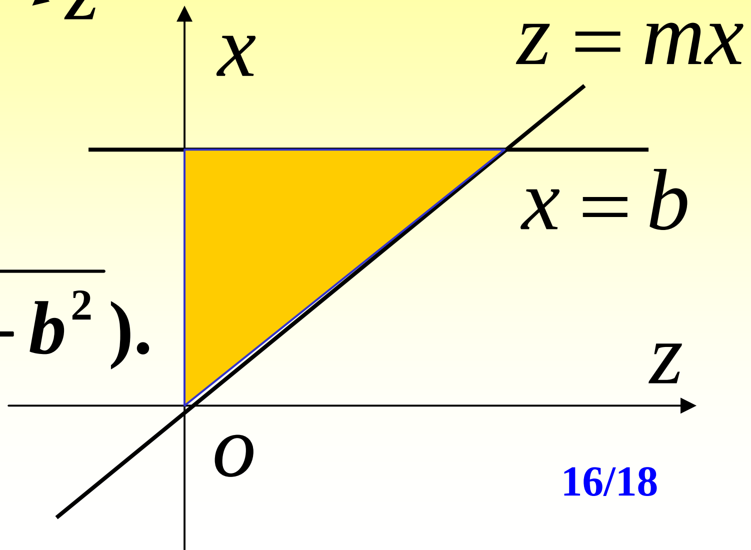


$$\therefore \mathrm{d}S=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

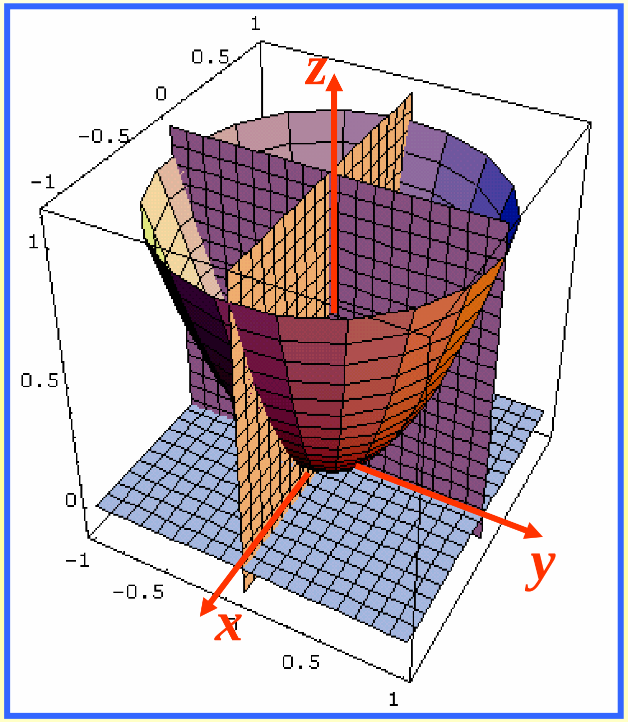
$$\therefore S=\iint\limits_{(\sigma_{zx})}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^b \mathrm{d}x\int_0^{mx}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^b\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}mx\,\mathrm{d}x=am(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$



例 4 计算$\iint\limits_{\Sigma}|xyz|dS$,其中 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2$（$0\le z\le 1$）.



解 抛物面$z=x^2+y^2$

关于z轴对称,

被积函数$|xyz|$关于

xoz、yoz 坐标面对称

有$\iint\limits_{\Sigma}=4\iint\limits_{\Sigma_1}$ 成立,

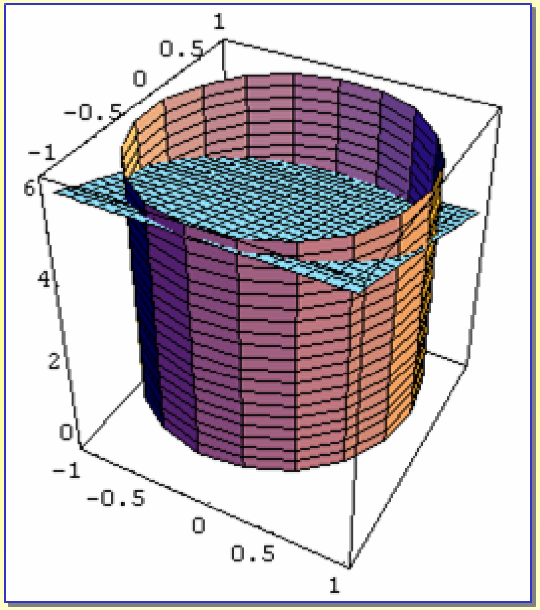
(Σ_1为第一卦限部分曲面)

$$dS=\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}dxdy=\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy$$

5. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)ds$，其中Σ为平面

$y+z=5$被柱面$x^2+y^2=25$所截得的部分.

解 积分曲面 Σ：$z=5-y$，



投影域：$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 25\}$

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{1+0+(-1)^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy,$$

故 $$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)ds=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+5-y)dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5(5+r\cos\theta)rdr=125\sqrt{2}\pi.$$

6. 求$I=\int_\Gamma x^2 ds$,

其中Γ为圆周$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

解 由对称性, 知 $\int_\Gamma x^2 ds=\int_\Gamma y^2 ds=\int_\Gamma z^2 ds.$

故 $I=\dfrac{1}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds$

$$=\frac{a^2}{3}\int_\Gamma ds=\frac{2\pi a^3}{3}.$$ $(2\pi a=\int_\Gamma ds,$球面大圆周长$)$

7. 计算 $\iint_{\Sigma} z dS$，其中Σ是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$

解1 因为积分域Σ关于xoy平面对称，

被积函数$f(x,y,z)=z$关于z为奇函数，

所以 $\iint_{\Sigma} z dS = 0$

解2 $$\iint_{\Sigma} z dS = \iint_{\Sigma_{上}} z dS + \iint_{\Sigma_{下}} z dS$$

$$= \iint_{\sigma_{xy}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}d\sigma$$

$$+ \iint_{\sigma_{xy}} -\sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}d\sigma = 0$$