信号与系统A
Signals and Systems

第7章　采样

张建国

西安交通大学
电子与信息工程学院

2016年 6月 3 日

本章内容

基本要求

- 掌握用样本代表连续时间信号必须具备的条件—采样定理，采样引起的信号频谱的变化；
- 通过内插从样本重建信号的实质；
- 欠采样可能导致的后果—频谱混叠，但也可能利用（带通采样）；
- 对连续时间信号进行离散时间处理时，系统各处频谱的关系，从连续时间变换到离散时间的实质；
- 离散时间信号的采样，与连续时间信号采样的异同；离散时间信号的抽取及内插；
- 掌握采样问题的基本分析方法，体会其在信号分析中的重要性。

连续时间信号与离散时间信号

在实际生活中，常可以看到用离散时间信号表示连续时间信号的例子。如照片、电影胶片等，这些都表明连续时间信号与离散时间信号之间存在着内在的联系。在一定条件下，连续时间信号可以用它的离散时间样本来表示而并不丢失原来信号所包含的信息。

在电影、电视中，我们经常可以看到“倒转的车轮”，那么车轮倒转的原理是什么？在什么条件下会倒转？

随着数字技术和计算机技术的发展，离散时间信号的处理由于更加灵活、快速、方便，因而往往比处理连续时间信号更加可取。这就需要把连续时间信号转变成离散时间信号。

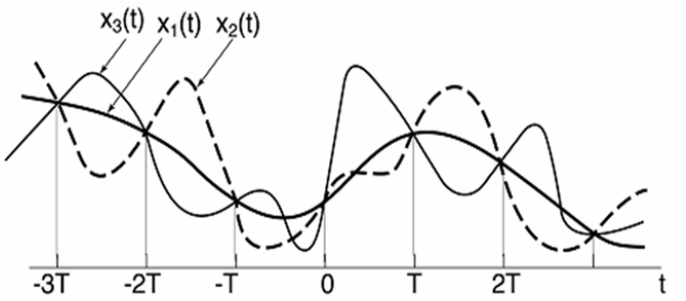
本章研究连续时间信号与离散时间信号之间的关系，包括：采样定理、采样的恢复、欠采样的效果、连续时间信号的离散时间处理以及离散时间信号的采样。

采（抽）样

在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程称为**采（抽）样**。下图是一维连续时间信号采样的例子。

显然，在没有任何约束条件的情况下，一个连续时间信号的一组离散时间样本是不能唯一地表征这个连续时间信号的。

对同一个连续时间信号，当采样间隔不同时也会得到不同的样本序列。



采样的数学模型（时域）

$\delta(t)$具有提取连续时间信号样本的作用。

$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$

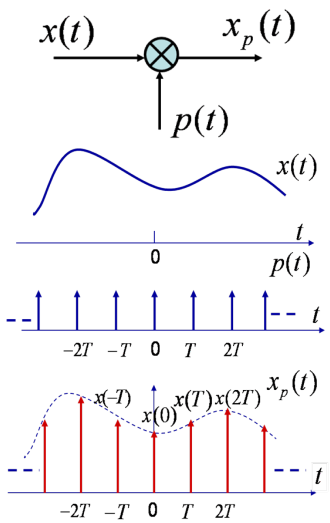
在**时域**：$x_p(t)=x(t)p(t)$

当$p(t)$为均匀冲激串时，

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

称为**冲激串采样**。$p(t)$为采样函数，T为采样周期，$\omega_s=2\pi/T$为采样频率。

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$



采样的数学模型（频域）

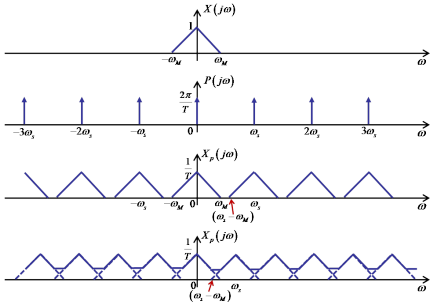
由相乘性质：

$$X_p(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*P(j\omega)$$

$$P(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$$

$$X_p(j\omega)=\frac{1}{2\pi}P(j\omega)*X(j\omega)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$$



$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\omega_s t}\leftrightarrow P(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}k)$$

因此，在时域对连续时间信号进行理想抽样，就相当于在频域将信号的频谱以抽样频率ω_s为周期进行延拓。

奈奎斯特（Nyquist）采样定理

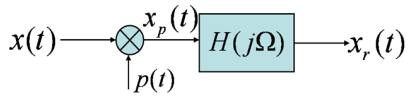
要想使采样后的信号样本能完全代表原来的信号，就意味着要能够从$X_p(j\omega)$中不失真地分离出$X(j\omega)$。这就要求$X_p(j\omega)$在周期性延拓时不能发生频谱的混叠。为此必须要求：

1. $x(t)$必须是带限于某个最高频率ω_M。
2. 采样间隔(周期)不能太大，必须保证采样频率$\omega_s>2\omega_M$。

定理（奈奎斯特（Nyquist）采样定理）

对带限于最高频率ω_M的连续时间信号$x(t)$，如果以$\omega_s>2\omega_M$的频率进行理想采样，则$x(t)$可以唯一地由其等间隔的样本$x(nT)$所确定。

当满足上述要求时，可由以下系统实现信号的恢复：



采样的恢复（频域）

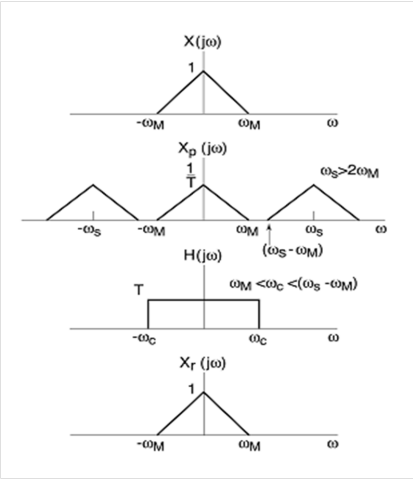
$$X_p(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$$

在工程实际应用中，理想滤波器是不可实现的。而非理想滤波器一定有过渡带，因此实际采样时，ω_s必须大于$2\omega_M$。

低通滤波器的截止频率必须满足：

$$\omega_M<\omega_c<(\omega_s-\omega_M)$$

为了恢复原信号的幅度，滤波器的通带增益应有T倍的变化。



采样的恢复（时域）

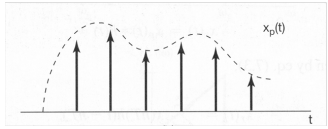
若理想低通滤波器的单位冲激响应为$h(t)$，则其输出为：

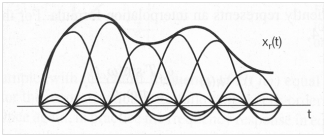
$$x_r(t)=x_p(t)*h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)h(t-nT),\quad h(t)=T\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}$$

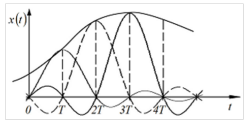
$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{T}{\pi}\frac{\sin\omega_c(t-nT)}{t-nT}$$

当取$\omega_c=\omega_s/2=\pi/T$时，

$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{\sin\omega_c(t-nT)}{\omega_c(t-nT)}$$







这种内插称为时域中的带限内插。内插时以理想低通滤波器的单位冲激响应为内插函数。

采样练习

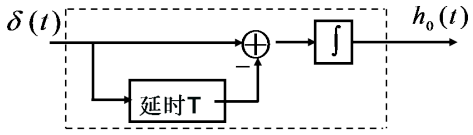
已知信号$x_1(t)$带限于100Hz，而$x_2(t)$带限于400Hz。现欲对下列信号进行采样，求满足抽样定理的最低抽样频率。

1. $y_1(t)=x_1(t)+x_2(t/2)$；
2. $y_2(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)$；
3. $y_3(t)=x_1(2t)-x_2(t)$；
4. $y_4(t)=x_1(t)*x_2(t)$。

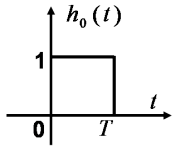
解： 只要求出上述各信号的最高频率即可。

1. 时域展宽，频域压缩，因此$x_2(t/2)$带限于200Hz，所以$y_1(t)$的最高频率为200Hz，相应地最低采样频率为400Hz；
2. 时域乘积，频域卷积，所以$y_2(t)$的最高频率为500Hz，相应地最低采样频率为1000Hz；
3. 时域压缩，频域展宽，所以$x_1(2t)$的上限频率为200Hz，$y_3(t)$的最高频率为400Hz，相应地最低采样频率为800Hz；
4. 时域卷积，频域乘积，所以$y_4(t)$的最高频率为100Hz，相应地最低采样频率为200Hz。

零阶保持系统和零阶保持采样

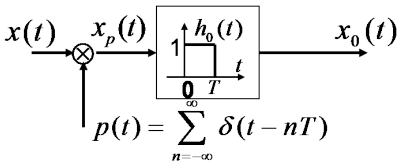


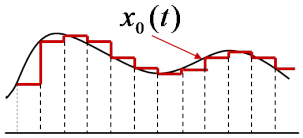
零阶保持系统



零阶保持系统：是一个$h(t)$为矩形脉冲的系统。

零阶保持：信号的样本经零阶保持后，所得到的信号是一个阶梯形信号。

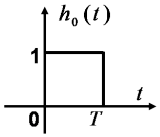


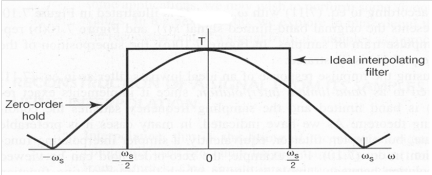


零阶保持采样相当于理想采样后，再级联一个零阶保持系统。

零阶保持内插和信号重建

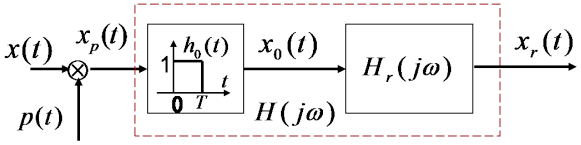
零阶保持内插的内插函数是零阶保持系统的单位冲激响应$h_0(t)$。





为了从$x_0(t)$恢复$x(t)$，就要求零阶保持后级联一个系统$H_r(j\omega)$。使得

$$H_0(j\omega)H_r(j\omega) = H(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad \text{其中}\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$$

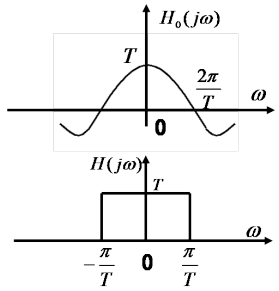


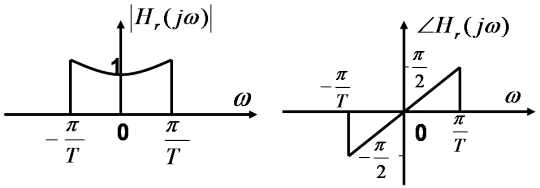
零阶保持内插和信号重建

$$\because H_0(j\omega) = \frac{2\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega} e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

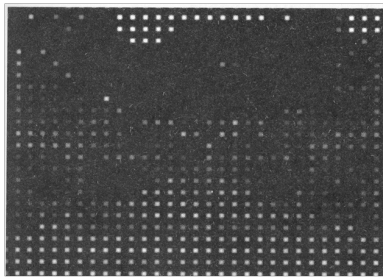
$$\therefore H_r(j\omega) = \frac{H(j\omega)e^{j\frac{\omega T}{2}}\omega}{2\sin(\frac{\omega T}{2})}$$

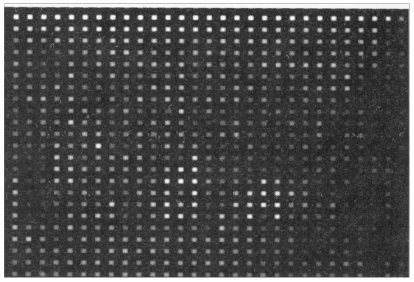
若$\omega_c = \frac{1}{2}\omega_s = \frac{\pi}{T}$，则：



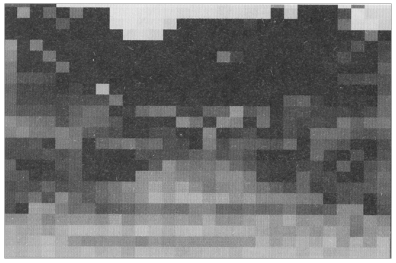


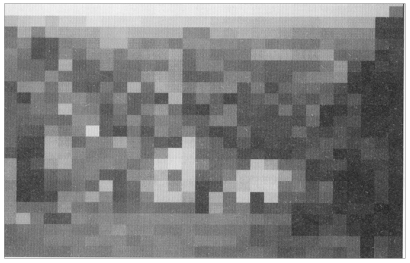
对以上照片进行冲激串采样



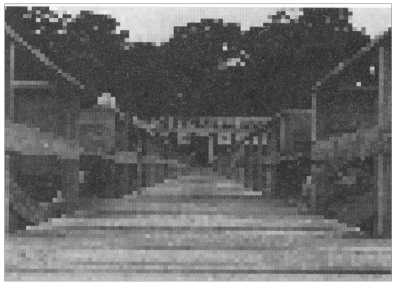


零阶保持内插的结果





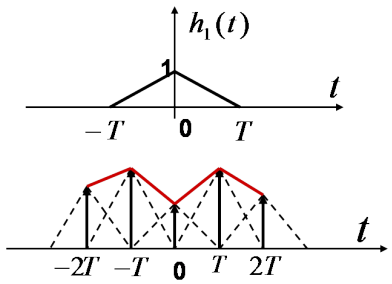
零阶保持内插的结果，但采样间隔为以上照片的1/4。



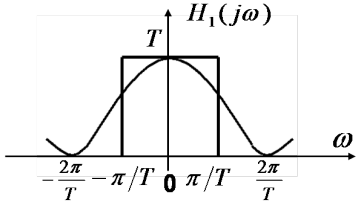
一阶保持内插（线性内插）和信号重建

线性内插时，其内插函数是三角形脉冲。

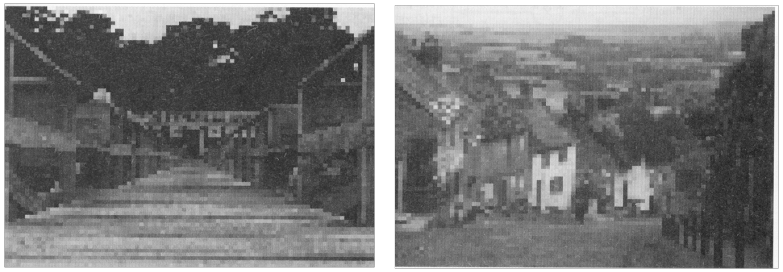
$$H_1(j\omega) = T\left[\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}\right]^2 = \frac{1}{T}\left[\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega/2}\right]^2$$



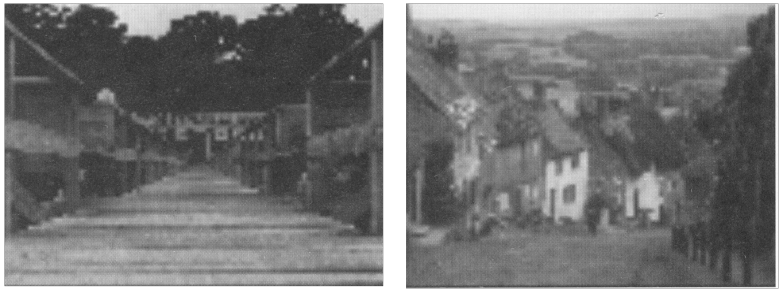
一阶保持内插较零阶保持内插所产生的恢复信号时域具有更好的平滑度，频域具有更低的高频分量。使用更高阶的内插系统，内插特性会更好，但内插函数的持续期会更长。



零阶保持内插的结果



一阶保持内插的结果



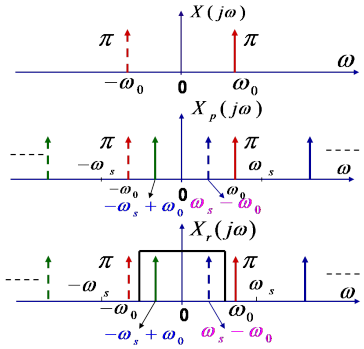
欠采样导致的后果—频谱混叠

如果采样时，不满足采样定理的要求，就会使$x(t)$的频谱在周期延拓时出现频谱混叠的现象。此时，即使通过理想内插也得不到原信号。但是无论怎样，恢复所得的信号$x_r(t)$与原信号$x(t)$在采样点上将具有相同的值$x_r(nT) = x(nT)$。(为什么？)

例： 对信号$x(t) = \cos(\omega_0 t)$进行采样。当$\omega_0 < \omega_s < 2\omega_0$ 时发生了频谱混叠，恢复的信号为：$x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t$

当$t = nT$时，

$$\begin{aligned} x_r(nT) &= \cos(\omega_s - \omega_0)nT \\ &= \cos\omega_s nT \cdot \cos\omega_0 nT \\ &\quad + \sin\omega_s nT \cdot \sin\omega_0 nT \\ &= \cos\omega_0 nT = x(nT) \end{aligned}$$



其中$\omega_s = 2\pi/T$。可见，在采样点时刻的信号仍是相同的。

以正弦信号为例分析欠采样

如果$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$，则在上述情况下:

$$X_r(j\omega) = \pi\left\{\delta\left(\omega - (\omega_s - \omega_0)\right)\cdot e^{-j\phi} + \delta\left(\omega + (\omega_s - \omega_0)\right)\cdot e^{j\phi}\right\}$$

$$x_r(t) = \cos[(\omega_s - \omega_0)t - \phi]$$

表明恢复的信号不仅频率降低，而且相位相反（相位就是不相反，也没有意义）。

工程应用时，如果采样频率$\omega_s = 2\omega_M$将不足以从样本恢复原信号。

例如：$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$，在$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\omega_0$时

$$x(t) = \cos\phi\cos\omega_0 t - \sin\omega_0 t\sin\phi$$

$$x(nT) = \cos\phi\cos\omega_0 nT$$

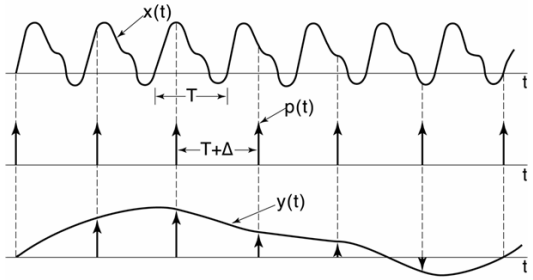
这和对$x_1(t) = \cos\phi\cos\omega_0 t$采样的结果一样。

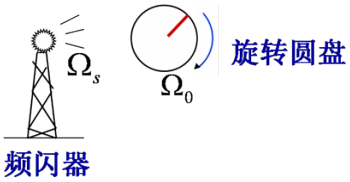
特别是当$\phi = \pi/2$时，$x(nT) = 0$。请给出上述现象的时域和频域解释。

欠采样在工程实际中的应用

从用样本代替信号的角度看，出现欠采样是工程上不希望出现的。

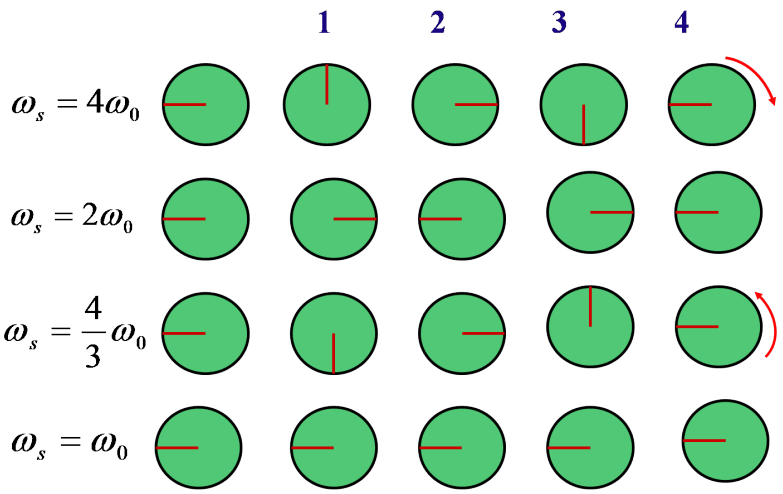
但有时可以利用欠采样的效果解决实际问题。在实际应用中，利用欠采样可使高频变化的信息映射到低频变化的信号上。这为高频信号的测量带来了便利。如采样示波器和频闪仪等。



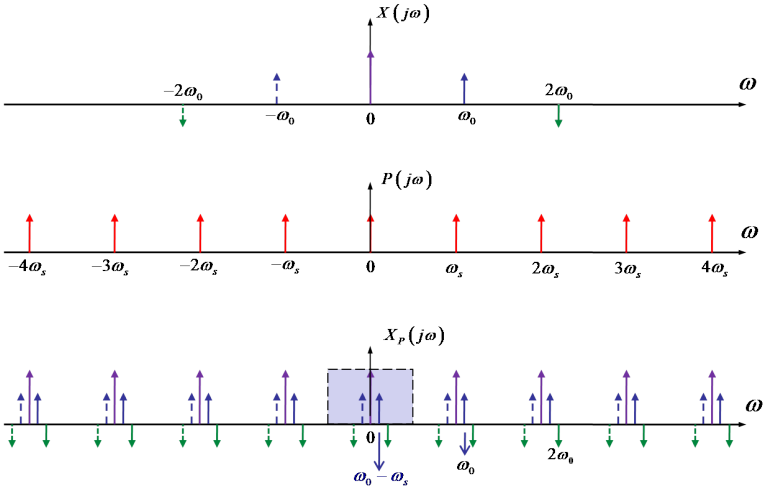


带通采样：在$\omega_s < 2\omega_M$的情况下，信号谱结构仍能保持的条件？

欠采样在工程实际中的应用



欠采样在工程实际中的应用



$$\omega_0 - \omega_s = \frac{2\pi}{T_0} - \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi(T - T_0)}{T_0 T} = \frac{\Delta}{T_0} \cdot \frac{2\pi}{T},$$ 其中 $\Delta = T - T_0$

关于采样定理

时域采样定理的三个关键点：

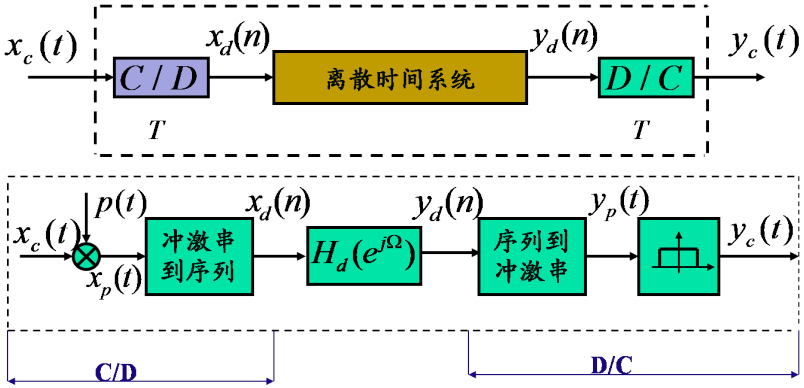
- 对于带限信号可以进行时域采样；
- 信号的时域采样导致其频谱的周期延拓；
- 只要采样后的频谱不发生混叠，便可无失真恢复其时域信号。

相应的对于频域采样定理有：

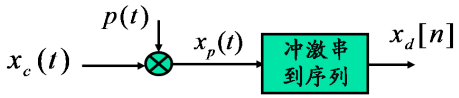
- 对于时限信号可以进行频域采样；
- 信号的频域采样导致其时域波形的周期延拓；
- 只要采样后的时域波形不发生混叠，便可无失真恢复其频谱。

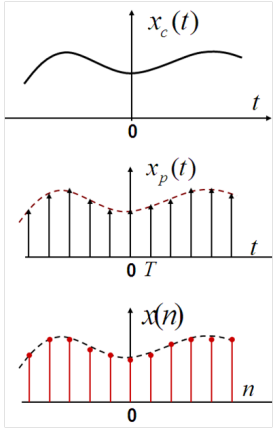
连续时间信号的离散时间处理的系统框图

对连续时间信号进行离散时间处理的系统可视为三个环节的级连。



C/D（连续时间到离散时间）转换





$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_p(t) = x_c(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

$$x_d[n] = x_c(nT)$$

冲激串到序列的变换过程，在时域是一个对时间归一化的过程；

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left[j(\omega - k\omega_s)\right] \quad X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]e^{-j\Omega n}$$

C/D（连续时间到离散时间）转换

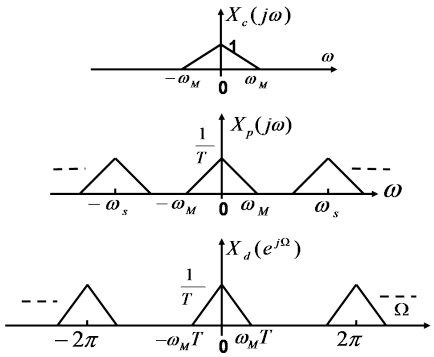
$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n}$$

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\omega nT}$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(j\frac{\Omega}{T}\right), \omega = \frac{\Omega}{T}$$

$$X_p(j\omega) = X_d(e^{j\omega T})$$

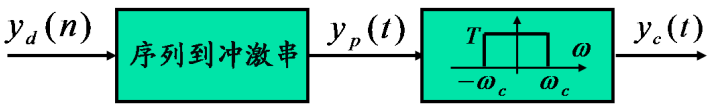
$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left[j(\omega - k\omega_s)\right]$$



$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left[j\frac{1}{T}(\Omega - 2\pi k)\right]$$

冲激串到序列的变换过程，在频域是一个频率归一化的过程。

D/C（离散时间到连续时间）转换



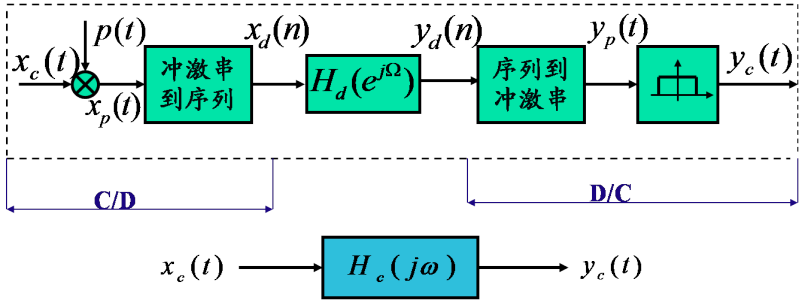
$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d(n)\delta(t - nT) \Rightarrow Y_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d(n)e^{-j\omega nT}$$

$$Y_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d[n]e^{-j\Omega n}, \quad \Omega = \omega T \quad \omega = \frac{\Omega}{T}$$

$$Y_d(e^{j\Omega}) = Y_p\left(j\frac{\Omega}{T}\right) \qquad Y_p(j\omega) = Y_d(e^{j\omega T})$$

可见，D/C转换是C/D转换的逆过程。

连续时间信号的离散时间处理



假定$H_d(e^{j\Omega})=1$，有$y_d[n]=x_d[n]$，在满足采样定理时有$y_p(t)=x_p(t)$，$y_c(t)=x_c(t)$，整个系统是恒等系统，表明D/C转换是C/D转换的逆系统。

连续时间信号的离散时间处理

对一般情况：

$$Y_d(e^{j\Omega})=X_d(e^{j\Omega})\cdot H_d(e^{j\Omega})$$

$$Y_d(e^{j\omega T})=X_d(e^{j\omega T})H_d(e^{j\omega T})=X_p(j\omega)\cdot H_d(e^{j\omega T})=Y_p(j\omega)$$

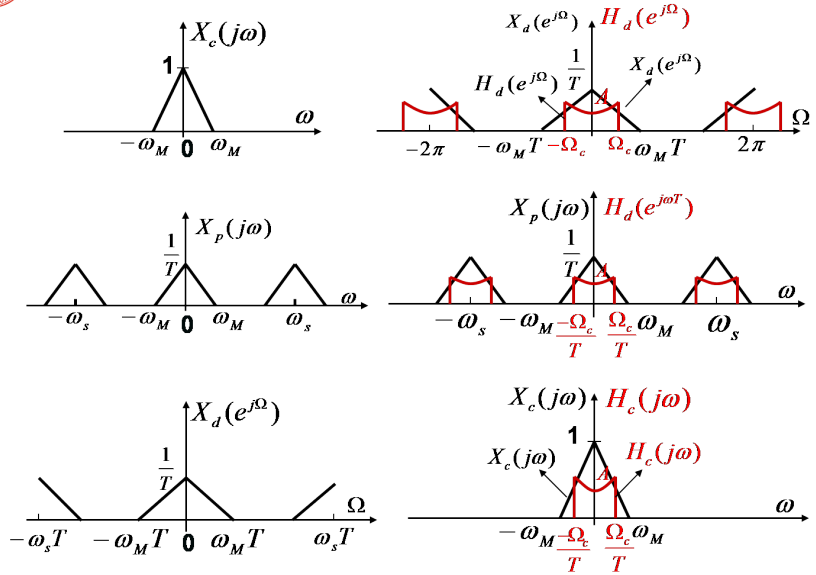
$$X_p(j\omega)=X_d(e^{j\omega T}),\quad Y_p(j\omega)=Y_d(e^{j\omega T})$$

$$Y_c(j\omega)=Y_p(j\omega)\cdot H(j\omega)=\begin{cases}0, & |\omega|>\frac{\omega_s}{2}\\ TX_p(j\omega)H_d(e^{j\omega T}), & |\omega|<\frac{\omega_s}{2}\end{cases}$$

$$=X_c(j\omega)\begin{cases}H_d(e^{j\omega T}), & |\omega|<\frac{\omega_s}{2}\\ 0, & |\omega|>\frac{\omega_s}{2}\end{cases}$$

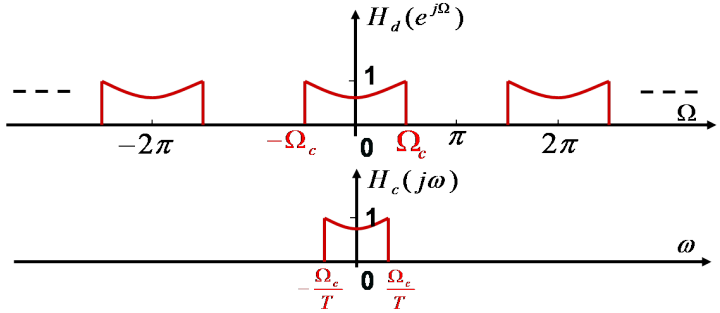
$$H_c(j\omega)=\begin{cases}H_d(e^{j\omega T}), & |\omega|<\frac{\omega_s}{2}\\ 0, & |\omega|>\frac{\omega_s}{2}\end{cases}\text{ 或：}H_c\left(j\frac{\Omega}{T}\right)=H_d(e^{j\Omega})\quad |\Omega|<\pi$$

连续时间信号的离散时间处理



连续时间信号的离散时间处理

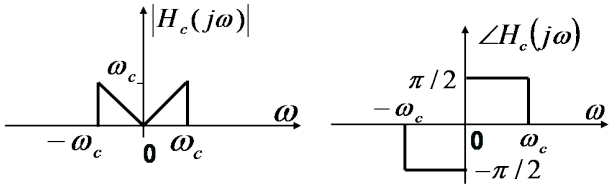
可见，等效连续时间系统的频率响应，就是离散时间系统频率响应在一个周期内的特性，只不过在频率上有一个尺度变换。



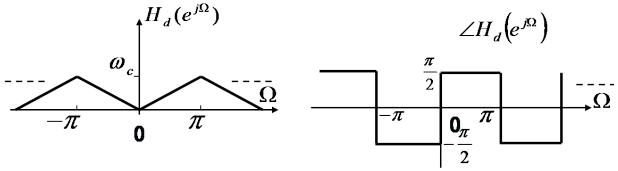
对连续时间信号进行离散时间处理的系统在$x_c(t)$带限，且采样频率满足采样定理的要求时能等效为一个LTI系统。

数字微分器

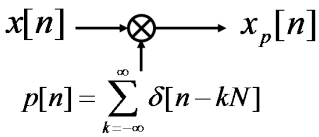
带限微分器：$H_c(j\omega)=\begin{cases} j\omega, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & |\omega|>\omega_c \end{cases}$



由$H_c(j\frac{\Omega}{T})=H_d(e^{j\Omega})$可得，$\omega_c=\frac{\omega_s}{2}$时有：$H_d(e^{j\Omega})=j\frac{\Omega}{T}\ |\Omega|<\pi$



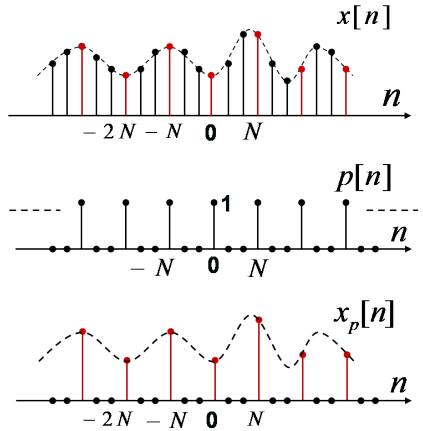
脉冲串采样的时域表示



$$p[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$$

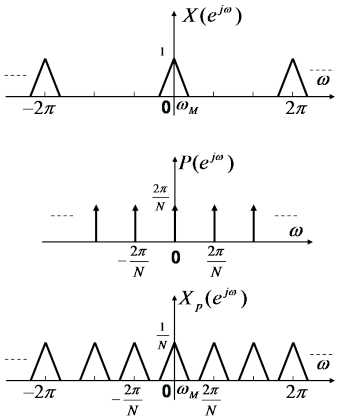
$$x_p[n]=x[n]\cdot p[n]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[kN]\delta[n-kN]$$

$$P\left(e^{j\omega}\right)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$



脉冲串采样的频域表示

$$X_p(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*P(e^{j\omega})$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}P(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$
$$=\frac{1}{N}\int_{2\pi}X\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\theta-\frac{2\pi}{N}k\right)d\theta$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X\left(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)}\right)$$



在时域，对离散时间信号以N为间隔采样，在频域，信号的频谱就在一个周期内以$\frac{2\pi}{N}$为间隔周期性延拓。

用理想滤波器重建信号的频域表示

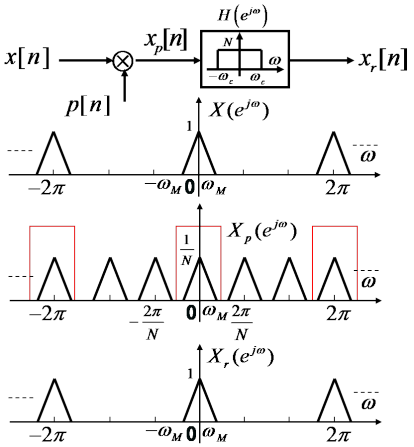
要使$x_p[n]$能恢复成$x[n]$，则频谱在周期性延拓时不能发生混叠。为此要求：

- 原始信号$x[n]$带限于ω_M。
- 采样频率

$$\omega_s=\frac{2\pi}{N}>2\omega_M$$

- 理想低通滤波器截止频率

$$\omega_M<\omega_c<\omega_s-\omega_M$$



用理想滤波器重建信号的时域表示（内插）

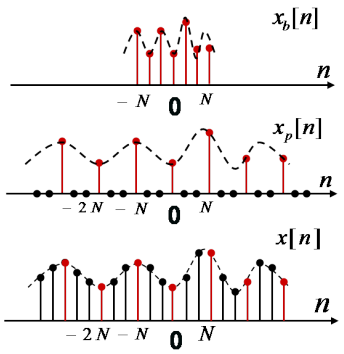
恢复$x[n]$的过程也是一种带限内插过程，其内插函数为理想低通的单位脉冲响应$h[n]$。

$$h[n] = N \cdot \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

$$x_r[n] = x_p[n] * h[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN] \frac{N\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc} \frac{\omega_c(n-kN)}{\pi}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN] \frac{N\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(n-kN)}{\omega_c(n-kN)}$$



当$\omega_c = \pi/N$时，$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN] \frac{\sin \omega_c(n-kN)}{\omega_c(n-kN)}$

离散时间抽取

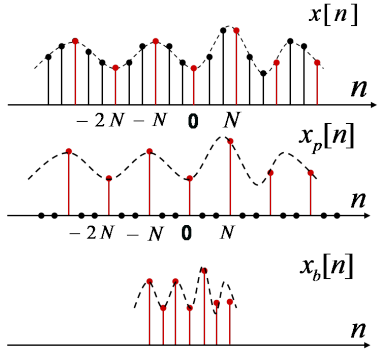
如果$x_b[n] = x_p[nN] = x[nN]$，则把由$x[n]$经过$x_p[n]$到$x_b[n]$的过程称为抽取。一般来说，不考虑带限条件直接从$x[n]$抽取得到$x_b[n]$，这个过程是不可逆的。但当$x[n]$满足采样定理的要求时，先经过$x_p[n]$再到$x_b[n]$，则抽取过程是可逆的。

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p[nN] e^{-j\omega n}$$

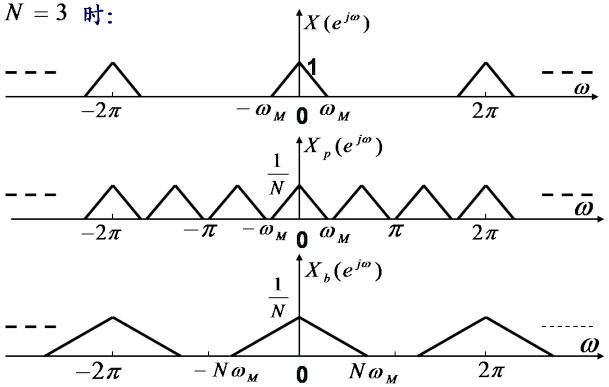
$$= \sum_{n=-\infty, n=rN}^{\infty} x_p[n] e^{-j\omega \frac{n}{N}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p[n] e^{-jn\frac{\omega}{N}} = X_p(e^{j\frac{\omega}{N}})$$



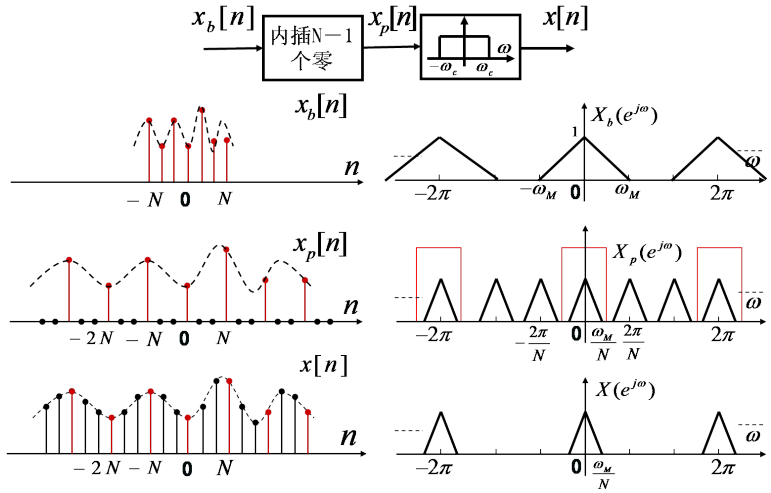
离散时间抽取

即：$X_b(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\frac{\omega}{N}})$



在时域对带限序列进行抽取，相当于在频域对采样序列的频谱进行尺度变换。

离散时间内插



本章小结

1. 连续时间信号的时域采样，采样定理。
2. 从样本通过内插重建信号。
3. 欠采样可能会引起的频谱混叠，及欠采样的某些应用。
4. 连续时间信号的离散时间处理。
5. 离散时间信号的时域抽取与内插。（涉及到变速率处理）

作业

CH7-1：7.6，7.8，7.10，7.21，7.22

CH7-2：7.15，7.19，7.26，7.29，7.35

CH7-3：7.31，7.38，7.41，7.52

7.26中，将假定$\omega_1 > \omega_2 - \omega_1$改为$\omega_2 - \omega_1 < \omega_1 < 2(\omega_2 - \omega_1)$。

习题勘误：

图7.38中，$\cos[(2\pi/T) + \theta]$ 应改为$\cos[(2\pi t/T) + \theta]$。

图7.38(b)中，$|\omega| < \frac{1}{2(T+\Delta)}$ 应改为$|\omega| < \frac{\pi}{(T+\Delta)}$。