

# 噪声分析与控制

吴九汇

机械工程学院

振动与噪声控制工程研究所

# 第二章 声波方程及声场分布

2 声波方程及声场分布 .....	26
2.1 弹性体中的波动方程 .....	26
2.1.1 矢量分析的基本概念 .....	26
2.1.2 弹性体中波动方程的推导 .....	28
2.2 速度势和 Helmholtz 方程 .....	31
2.2.1 理想流体中的速度势函数 .....	31
2.2.2 弹性固体中的势函数和 Helmholtz 方程 .....	32
2.3 Helmholtz 方程求解 .....	34
2.3.1 直角坐标系下 Helmholtz 方程的解的形式 .....	34
2.3.2 圆柱坐标系下 Helmholtz 方程的解的形式 .....	35
2.3.3 球坐标系下 Helmholtz 方程的解的形式 .....	38
2.4 声场分布 .....	41
2.4.1 边界的连续性条件 .....	42
2.4.2 平板的声辐射特性 .....	43
2.4.3 圆柱壳内的声场特性 .....	45
2.4.4 薄壁球壳的声散射特性 .....	49
2.5 COMSOL 软件在声场计算中的应用 .....	52
2.5.1 ACOUSTICS MODULE 声学模块 .....	53
2.5.2 应用实例 .....	53
2.6 本章小结 .....	54

## 2.1 弹性体中的波动方程

# 矢量分析的基本概念

## 梯度的定义

标量函数  $u(M)$  在任一点  $M$  处的梯度 (记作  $\text{grad} u$ ) 表示这样的矢量  $\mathbf{G}$ , 其方向为函数  $u(M)$  在  $M$  点处变化率最大的方向, 其模也正好是这个最大变化率的数值, 即  $\text{grad} u = \mathbf{G}$ 。

我们知道, 在直角坐标系中函数  $u(M)$  沿  $l$  方向的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma, \quad (2.1)$$

其中  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  为  $l$  方向的方向余弦。藉助上式, 根据梯度定义即可得到梯度在直角坐标系中的表示式为

$$\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.2)$$

式中,  $\hat{\mathbf{x}}$ 、 $\hat{\mathbf{y}}$ 、 $\hat{\mathbf{z}}$  分别为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴方向上的单位矢量。

此外, Hamilton 算子是一个矢性微分算子, 其表示式为

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.3)$$

这里  $\nabla$  是一个微分运算符号, 但同时又要看作矢量。这样, 用算子  $\nabla$  可将梯度简记为

$$\text{grad} u = \nabla u. \quad (2.4)$$

# 矢量分析的基本概念

**散度的定义：**设有矢量场  $A(M)$ ，于场中一点  $M$  处作一包含  $M$  点在内的任一闭曲面  $S$ ，设其所包围的空间区域为  $\Omega$ ，以  $\Delta V$  表其体积，以  $\Delta\Phi$  表示从其内穿出  $S$  的通量。若当  $\Omega$  以任意方式缩向  $M$  点时，比式

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \frac{\oiint_S A \cdot dS}{\Delta V}$$

之极限存在，则称此极限为矢量场  $A(M)$  在点  $M$  处的散度，记作  $\operatorname{div} A$ ，即

$$\operatorname{div} A = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\oiint_S A \cdot dS}{\Delta V}$$

由此定义可见，散度  $\operatorname{div} A$  为一数量，表示场中一点处的通量对体积的变化率，也就是在该点处对一个单位体积来说所穿出之通量，称为该点处**源的强度**。因此，当  $\operatorname{div} A$  之值不为零时，其符号为正或为负，就分别表示在该点处有散发通量的正源或有吸收通量的负源，而绝对值  $|\operatorname{div} A|$  就相应地表示在该点处散发通量或吸收通量的强度；当  $\operatorname{div} A$  之值为零时，就表示在该点处无源。由此，称  $\operatorname{div} A \equiv 0$  的场为**无源场**。

$$\text{散度} \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

# 矢量分析的基本概念

$$\text{旋度 } \nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$$

为了说明旋度的定义，我们首先引入**环量面密度**的概念。

**环量面密度**：设  $M$  为矢量场  $\mathbf{A}$  中的一点，在  $M$  点处取定一个方向  $\mathbf{n}$ ，再过  $M$  点作一微小曲面  $\Delta S$ ，以  $\mathbf{n}$  为其在  $M$  点处的法矢， $\Delta S$  的周界  $\Delta l$  之正向取作与  $\mathbf{n}$  构成右手螺旋关系。则矢量场沿  $\Delta l$  之正向的环量  $\Delta \Gamma$  与面积  $\Delta S$  之比，当曲面  $\Delta S$  在  $M$  点处保持以  $\mathbf{n}$  为法矢的条件下以任意方式缩向  $M$  点时，若其极限

$$\lim_{\Delta S \rightarrow M} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow M} \frac{\oint_{\Delta l} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$$

存在，则称它为矢量场在点  $M$  处沿方向  $\mathbf{n}$  的**环量面密度**（亦即环量对面积的变化率）。

**旋度矢量**在数值和方向上表示最大的环量面密度。

# 矢量分析的基本概念

## 势函数的定义

对于一矢量场  $\mathbf{A}(M)$ ，若存在单值标量函数  $u(M)$  满足

$$\mathbf{A} = -\nabla u, \quad (2.10)$$

则称矢量场  $\mathbf{A}(M)$  为**有势场**，并称  $u(M)$  为这个场的**势函数**。一个矢量场的势函数有无穷多个，但它们之间只相差一个常数。

## 无旋场和无源场的定义

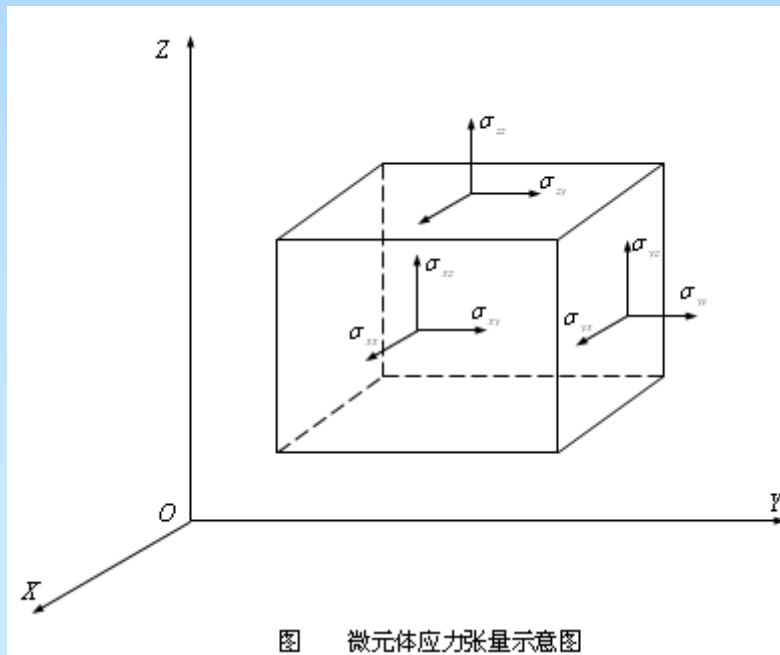
对于任一标量函数  $\varphi(x, y, z)$ ，存在恒等式  $\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv 0$ 。因而若单连域内矢量场  $\mathbf{A}$  的旋度为零，即  $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ，则矢量场  $\mathbf{A}$  必为有势场。反之，若矢量场  $\mathbf{A}$  为有势场，则其旋度为零。一般称旋度恒为零的场为**无旋场**。

此外，对于任一矢量场  $\mathbf{B}(x, y, z)$ ，存在恒等式  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \equiv 0$ 。前面讲过，设有矢量场  $\mathbf{C}(x, y, z)$ ，若有  $\nabla \cdot \mathbf{C} \equiv 0$ ，则称此矢量场为**无源场**（也称**管形场**）。因而，矢量场  $\mathbf{C}$  为无源场的充要条件是它为另一个矢量场  $\mathbf{B}$  的旋度场，即  $\mathbf{C} = \nabla \times \mathbf{B}$ 。

# 弹性体中波动方程的推导

弹性常数  $\lambda$  和  $\mu$  称为Lame常数，切变模量  $G$  等于第二Lame常数  $\mu$ ，杨氏弹性模量  $E$  和泊松比  $\sigma$  及Lame常数之间的关系如下：

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$



根据剪应力互等定理，

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}.$$



# 弹性体中波动方程的推导

对于介质密度为  $\rho$  的微元体，当没有外力作用时，根据牛顿第二定律可得到微元体的运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

在直角坐标系中应力张量分量和应变张量  $\boldsymbol{\varepsilon}$  的分量具有下列关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \varepsilon_{xx}; \quad \sigma_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy}; \\ \sigma_{yy} &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \varepsilon_{yy}; \quad \sigma_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz}; \\ \sigma_{zz} &= \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \varepsilon_{zz}; \quad \sigma_{zx} = 2\mu \varepsilon_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Hamilton算子:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$

散度  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$

梯度  $\nabla \varphi$

# 弹性体中波动方程的推导

在直角坐标系中，位移向量  $\mathbf{u}$  的分量和应变张量  $\boldsymbol{\varepsilon}$  的分量具有下列关系

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right); \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

这样就得到用位移向量场描述的各向同性弹性介质中的声波运动方程

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\text{Laplace算子: } \Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \nabla^2 \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi)$$

# 弹性体中波动方程的推导

各向同性弹性介质的位移波动方程：

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\bar{u} + (\lambda + \mu)\nabla \times \nabla \times \bar{u} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

Hamilton算子： $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$

$$\nabla \times \bar{u} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$$

Laplace算子： $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

弹性常数  $\lambda$  和  $\mu$  称为Lame常数，切变模量G等于第二Lame常数 $\mu$ ，杨氏弹性模量E和泊松比  $\sigma$  及Lame常数之间的关系如下：

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

## 2.2 速度势和Helmholtz方程

# 声波方程及声速度势

对于谐和运动  $\bar{u} = \bar{u}'e^{-i\omega t}$ , 各向同性弹性介质的波动方程:

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\bar{u} + (\lambda + \mu)\nabla \times \nabla \times \bar{u} = -\omega^2 \rho \bar{u}$$

**Helmholtz 定理:** 任一矢量场总可以看成是无旋场与管量场之和。

设:  $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$

其中:  $\nabla \times \bar{u}_1 = 0, \nabla \cdot \bar{u}_2 = 0$

$$\nabla \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

向量  $\bar{u}_1$  的场是无旋的, 所以可以表成某一个标量函数  $\Phi$  的梯度的形式, 即  $\bar{u}_1 = \nabla\Phi$ .  $\Phi$  称为标量势函数

$$\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$$

$\bar{u}_1$  对应的位移和介质微分元的转动无关, 而仅是使体积变化。

$\bar{u}_2$  场是纯旋量, 对应的位移与介质体积的形变无关, 而只是表现为转动。

$\bar{u}_2 = \nabla \times \bar{\Gamma}$  向量函数  $\Gamma$  称为向量势函数

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{\Gamma}) = 0$$

# 声波方程及声速度势

这样,  $\bar{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \bar{\Gamma}$

$$\text{Helmholtz 方程: } \nabla^2\Phi + k_l^2\Phi = 0$$
$$\nabla^2\bar{\Gamma} + k_t^2\bar{\Gamma} = 0$$

式中,  $k_l = \omega/c_l$  和  $k_t = \omega/c_t$  分别是纵波和横波的波数, 并且

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

在理想液体中, 切变模量  $G = \mu = 0$ , 因此不存在表征介质元的转动分量, 即  $\nabla \times \bar{u} = 0$ 。

$$\text{Helmholtz 方程: } \nabla^2\bar{u} + k^2\bar{u} = 0$$

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$$

# 声速度势

严格说来，声场是向量场，因为每个质点的运动由振动速度向量  $\vec{v}$  来描述。虽然如此，但还是可以作到仅用一个标量函数  $\Phi(x, y, z, t)$  来表征一个声场，就是说它可以确定声压和振动速度。此函数称为速度势函数：

$$\vec{v} = -\nabla\Phi$$

利用欧拉(Euler)方程： $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\nabla P = 0$ ，得到

$$P = \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

并非所有向量场都能用一个标量势函数来完全地加以描述。

条件：这个场必须是无旋的，即  $\nabla \times \vec{v} = 0$

在理想流体中，没有粘滞性， $\nabla \times \vec{v} = 0$

在固体中， $\nabla \times \vec{v} \neq 0$ ，因此不能只引进一个标量势函数来描述其整个运动，还需再引入一个向量函数。

## 2.3 Helmholtz方程求解



# Helmholtz方程求解

Helmholtz 方程:  $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$

直角坐标系:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

柱坐标  $(r, \theta, z)$ :  $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \bar{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{z}$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

球坐标  $(r, \theta, \phi)$ :  $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \bar{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \bar{\phi}$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

# Helmholtz方程求解

$$\text{Helmholtz 方程: } \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$$

$$\text{柱坐标 } (r, \theta, z): \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \varphi = 0$$

应用分离变量法, 设  $\varphi(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ , 得到

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \left( k_1^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0$$

Bessel方程

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + m^2 \Theta = 0$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_2^2 Z = 0$$

其中,  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ ,  $k$ 和 $m$ 是分离变量时引进的常数

$$\varphi(r, \theta, z) = J_m(k_1 r) \cdot e^{ik_2 z} \cdot e^{im\theta}$$

# Helmholtz方程求解

Helmholtz 方程:  $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$

柱坐标  $(r, \theta, z)$ :  $\varphi(r, \theta, z) = J_m(k_1 r) \cdot e^{ik_2 z} \cdot e^{im\theta}$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \left( k_1^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0$$

Bessel方程

贝塞尔方程是一个二阶常微分方程，必然存在两个线性无关的解。

第一类Bessel函数:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+m+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n+m}$$

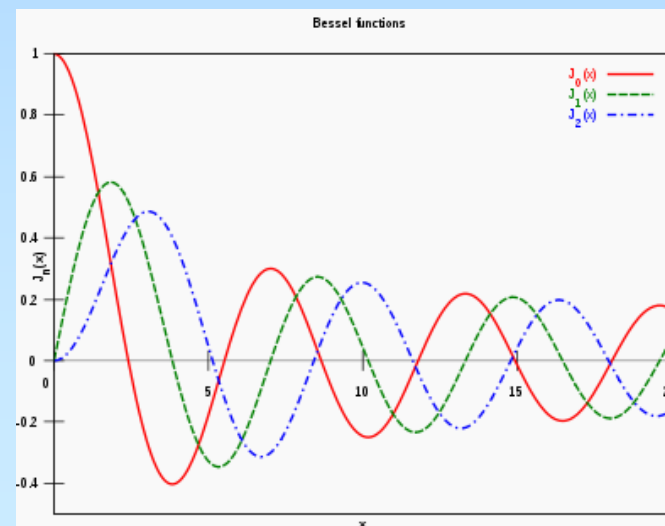


图 0阶、1阶和2阶第一类贝塞尔函数（贝塞尔J函数）曲线

# Helmholtz方程求解

第二类Bessel函数:

$$Y_m(x) = \frac{J_m(x)\cos(m\pi) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)}$$

若 $m$ 为整数（此时上式是 $0/0$ 型未定式）  
则取右端的极限值

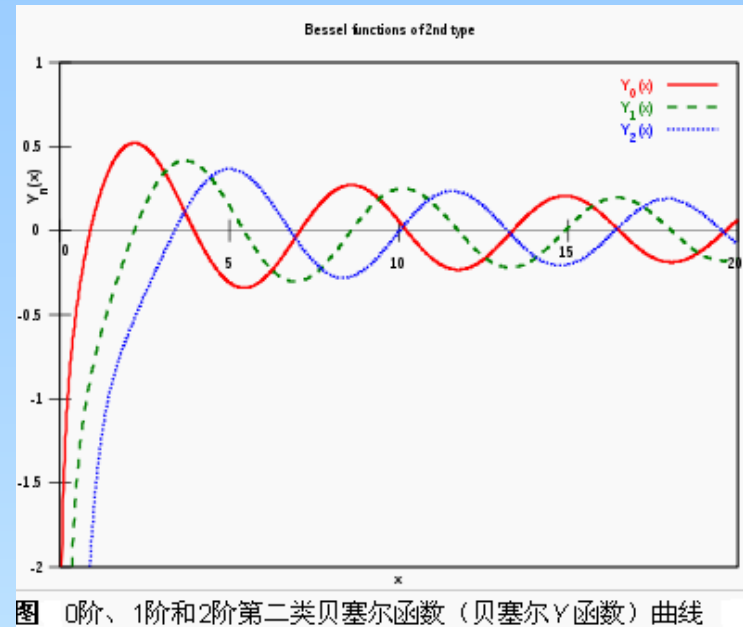


图 0阶、1阶和2阶第二类贝塞尔函数（贝塞尔Y函数）曲线

第三类Bessel函数，又称Hankel函数

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iY_m(x) \quad H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iY_m(x)$$

Helmholtz方程的柱坐标解:  $\varphi(r, \theta, z) = J_m(k_1 r) \cdot e^{ik_2 z} \cdot e^{im\theta}$

$$\varphi(r, \theta, z) = H_m^{(1)}(k_1 r) \cdot e^{ik_2 z} \cdot e^{im\theta}$$

# Helmholtz方程求解

Helmholtz 方程:  $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$

球坐标  $(r, \theta, \phi)$   $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + k^2 \varphi = 0$

应用分离变量法, 设  $\varphi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ , 得到

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + \left( k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0$$

球Bessel函数方程

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

Legendre方程

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0$$

其中  $k$ 、 $n$  和  $m$  是分离变量时引进的常数

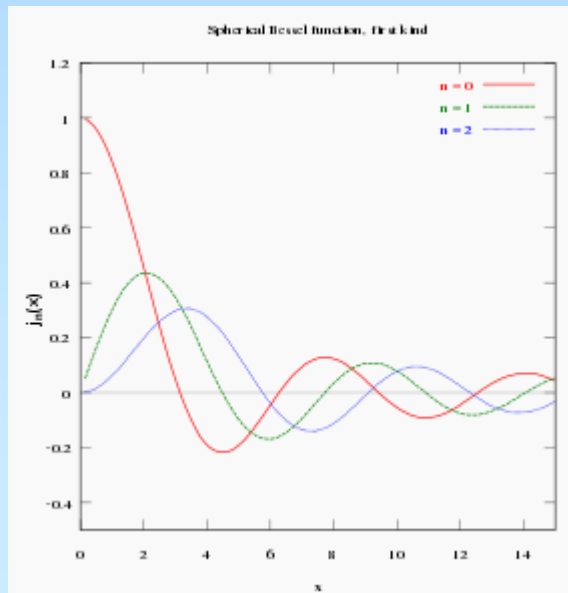
# Helmholtz方程求解

球Bessel函数是下面方程的解

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$j_n(x) = (-x)^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x},$$
$$y_n(x) = -(-x)^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\cos x}{x}.$$

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x)$$
$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x)$$



$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$
$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$
$$j_2(x) = \left( \frac{3}{x^2} - 1 \right) \frac{\sin x}{x} - \frac{3 \cos x}{x^2}$$

# Helmholtz方程求解

球Bessel函数是下面方程的解

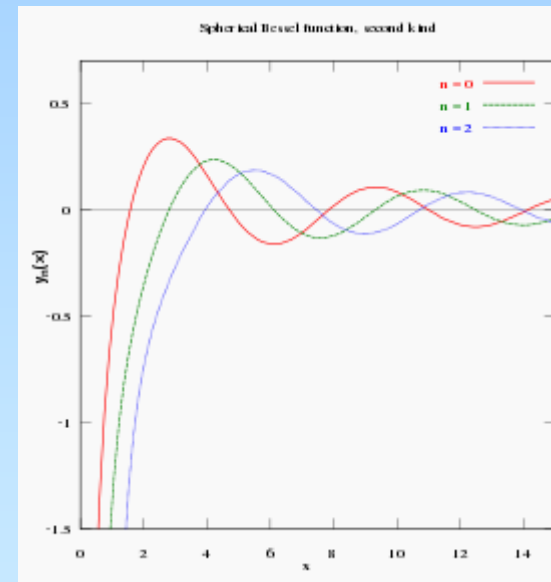
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -j_{-1}(x) = -\frac{\cos x}{x} \\ y_1(x) &= j_{-2}(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \\ y_2(x) &= -j_{-3}(x) = \left( -\frac{3}{x^2} + 1 \right) \frac{\cos x}{x} - \frac{3 \sin x}{x^2} \end{aligned}$$

球Hankel函数:

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(x) &= j_n(x) + iy_n(x) \\ h_n^{(2)}(x) &= j_n(x) - iy_n(x) \end{aligned}$$



# Helmholtz方程求解

Legendre方程

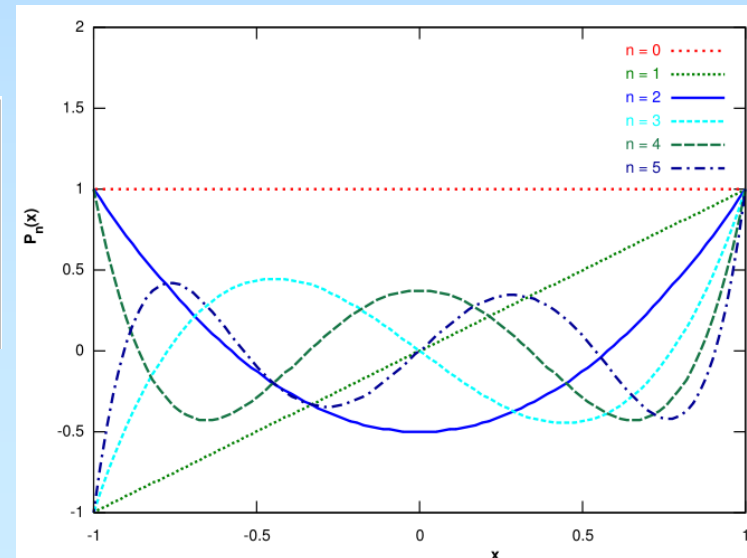
$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

令  $x = \cos \theta$ , 则

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0$$

$$P_n^m(x) = (-1)^m \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad \text{或} \quad P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (n \geq m \geq 0, -1 \leq x \leq 1)$$

n	$P_n(x)$
0	1
1	$x$
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$





# Helmholtz方程求解

Helmholtz方程的球坐标解:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = j_n(kr) \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot e^{im\phi}$$

$$\varphi(r, \theta, \phi) = h_m^{(1)}(kr) \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot e^{im\phi}$$

球面谐函数:

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (m = 0, \pm 1, \dots, \pm n)$$

正交归一关系:  $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{nm}^* Y_{n'm'} \sin \theta d\phi d\theta = \delta_{mm'} \delta_{nn'}$

$$Y_{nm}^* = (-1)^m Y_{n,-m}$$

球面谐函数的完备性: 任何一个在球面上连续的函数  $f(\theta, \phi)$  都可用  $Y_{nm}(\theta, \phi)$  展开为收敛级数

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi)$$

$$A_{nm} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{nm}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi) \sin \theta d\phi d\theta$$

# 球面谐函数

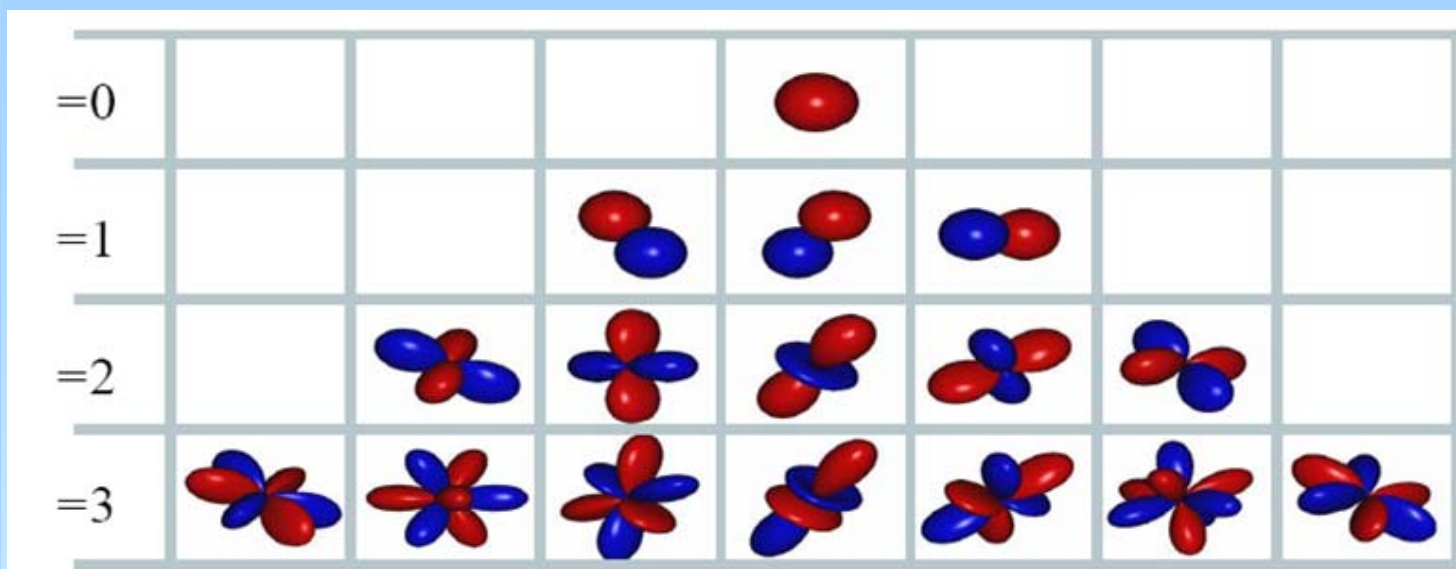


图2.4 各阶球面谐函数的方向性表示

# Helmholtz方程求解

Helmholtz 方程:  $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$

Helmholtz方程的柱坐标解:

$$\varphi(r, \theta, z) = J_m(k_1 r) \cdot e^{ik_2 z} \cdot e^{im\theta}$$

$$\varphi(r, \theta, z) = H_m^{(1)}(k_1 r) \cdot e^{ik_2 z} \cdot e^{im\theta}$$

Helmholtz方程的球坐标解:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = j_n(kr) \cdot Y_{nm}(\theta, \phi)$$

$$\varphi(r, \theta, \phi) = h_n^{(1)}(kr) \cdot Y_{nm}(\theta, \phi)$$

# 线声源和面声源的辐射

**Helmholtz 方程:**  $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$

**一维Helmholtz 方程:**  $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k^2 \varphi = 0$

**面声源辐射:**  $\varphi = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$

**二维Helmholtz 方程:**  $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + k^2 \varphi = 0$

**线声源辐射:**  $\varphi(r) = H_0^{(1)}(kr)$

**Helmholtz方程的柱坐标解:**  $\varphi(r, \theta, z) = H_m^{(1)}(k_1 r) \cdot e^{ik_2 z} \cdot e^{im\theta}$

## 2.4 声场分布

# 唯一性定理

微分方程规定了物理问题的一般性，而微分方程加上边界条件才规定了具体问题的特殊性

当处理边值问题时，自然会提出这样的问题：  
在给定的边界上至少需要多少场分量的值才能唯一确定有界区域中的声场？

**唯一性定理：**不管采用什么方法，只要找到了满足Helmholtz方程及边界条件的解，则这个解就是唯一的解。唯一性定理是分析和计算边值型问题的理论基础。

# 边界的连续性条件

在两种固体介质 I 和 II 的分界面上, 位移向量  $\mathbf{u}$  的法线方向分量和切线方向分量及正应力和切应力都应保持相等, 即:

$$u_n^I = u_n^{II}; \quad u_x^I = u_x^{II}; \quad \sigma_{nn}^I = \sigma_{nn}^{II}; \quad \sigma_{nx}^I = \sigma_{nx}^{II}。 \quad (2.67)$$

这里,  $\sigma_{nn}$  —— 垂直于分界面的应力 (正应力);  $\sigma_{nx}$  —— 切应力。

在两种介质中可能激起四个波, 各有一个纵波和横波 (弯曲波、剪切波和扭转波)。因此, 式 (2.67) 四个条件对于确定声场是足够的。

假如介质 II 是理想流体, 则式 (2.67) 的边界条件应改写为

$$u_n^I = u_n^{II}; \quad \sigma_{nn}^I = -P^{II}; \quad \sigma_{nx}^I = 0。 \quad (2.68)$$

这里,  $P^{II}$  —— 在介质 II 中界面上的声压。

第二条件中的负号, 是由于在弹性理论中, 介质伸长  $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ , 应力为正, 而在介质 II 界面上如声压为正, 则介质应当是压缩。

# 平板的声辐射特性

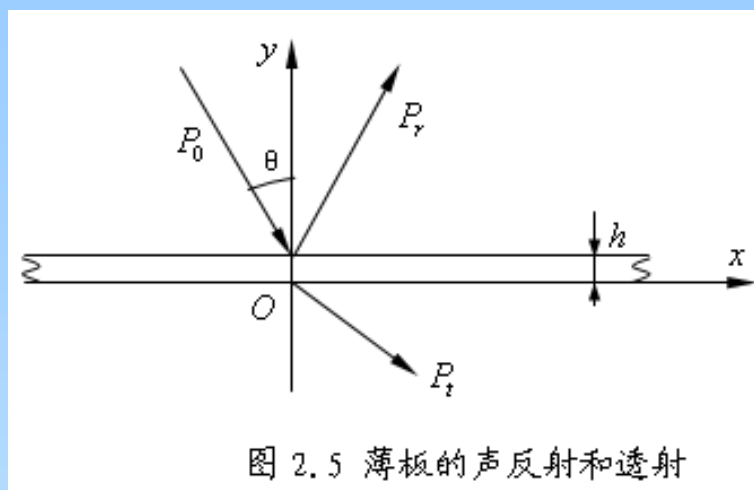


图 2.5 薄板的声反射和透射

$$P_0(x, y) = e^{ik(x \sin \theta - y \cos \theta)}, \quad (2.69a)$$

$$P_r(x, y) = A e^{ik(x \sin \theta + y \cos \theta)}, \quad (2.69b)$$

$$P_t(x, y) = B e^{ik(x \sin \theta - y \cos \theta)}, \quad (2.69c)$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - k_x^4 W = P_0 + P_r - P_t, \quad (2.71)$$

$$W(x) = C e^{ik_x x \sin \theta}. \quad (2.72)$$

$$v|_{y=0} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial P_t}{\partial y}, \quad (2.73a)$$

$$v|_{y=h} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial (P_0 + P_r)}{\partial y}. \quad (2.73b)$$



# 圆柱壳内的声场特性

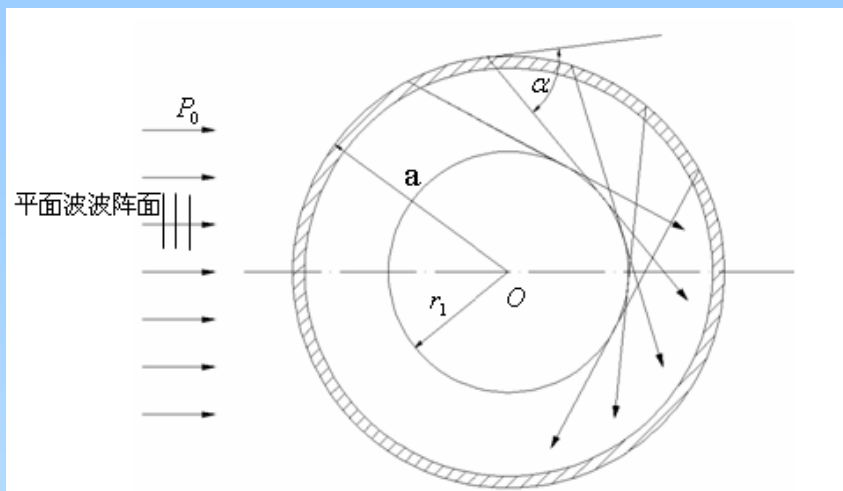


图 2.6 平面波入射到圆柱壳的示意图及柱壳内焦散面形成过程

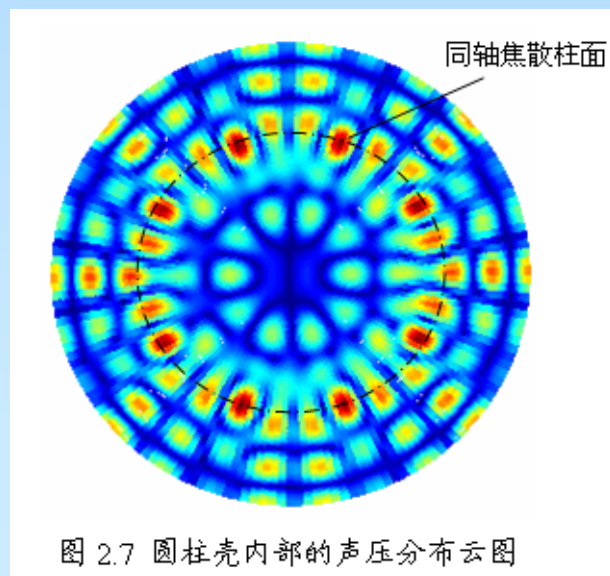
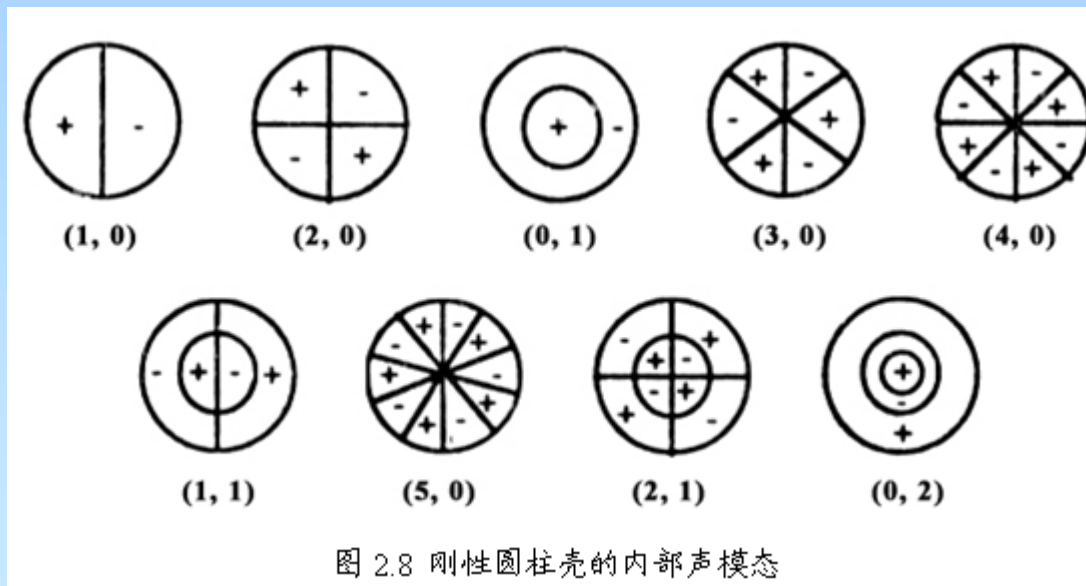


图 2.7 圆柱壳内部的声压分布云图

# 刚性圆柱壳的内部声模态

$$J_n'(k_{nm}a) = 0, \quad (2.84)$$



# 薄壁球壳的声散射特性

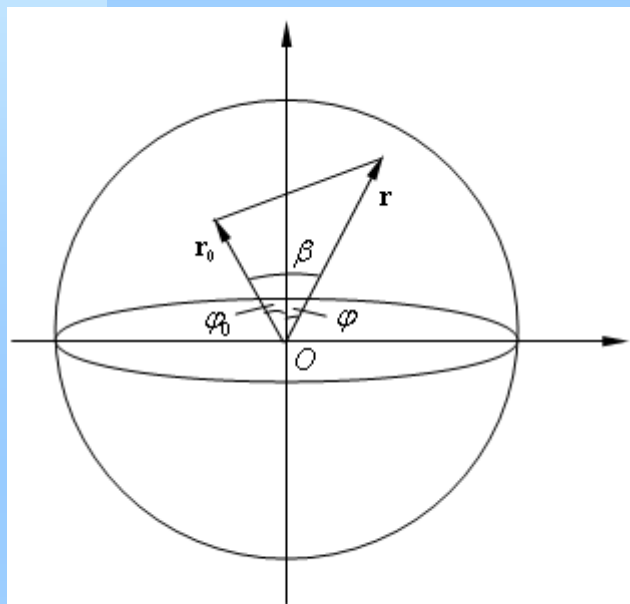


图 2.9 薄壁球壳内部声散射示意图

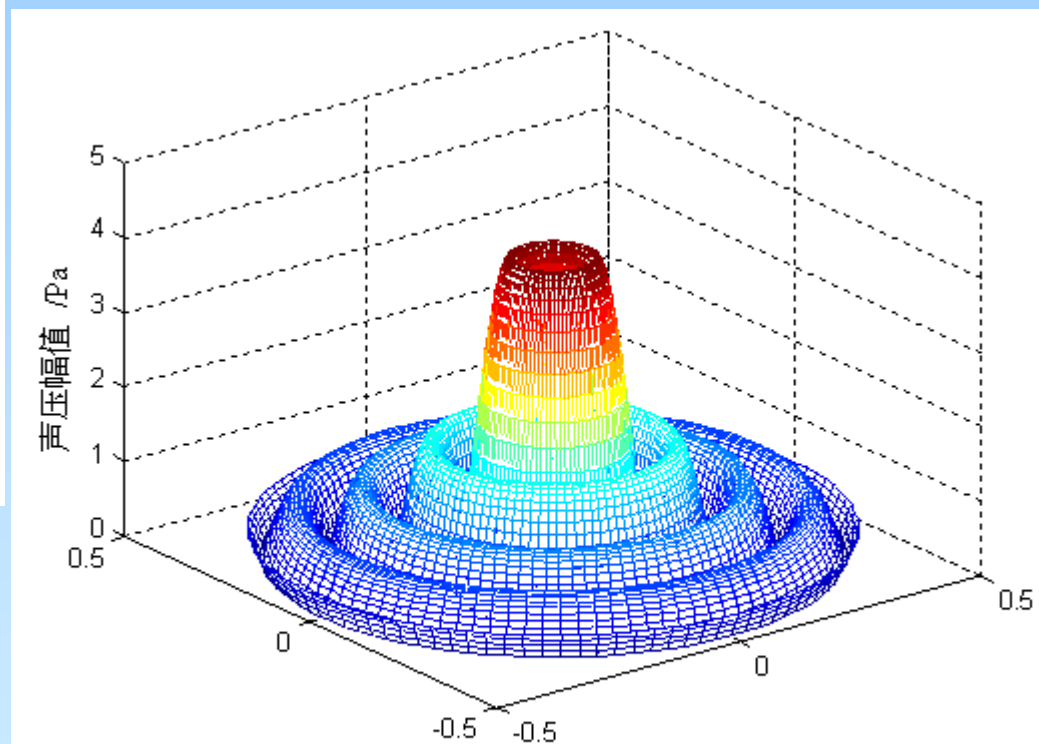


图 2.10 在球心处的点源作用下球壳内任一过球心截面上的散射声场分布