

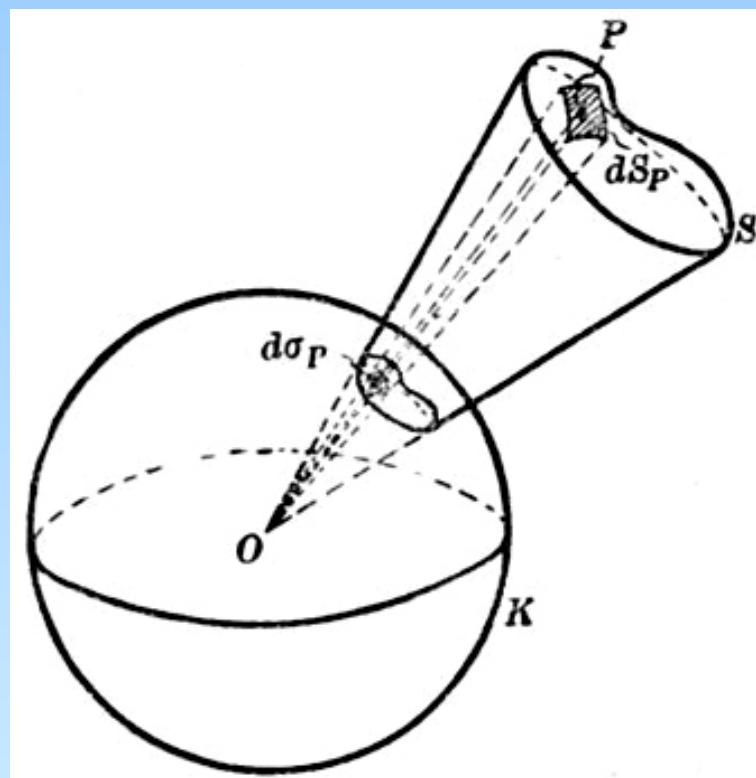
噪声分析与控制

吴九汇

机械工程学院

振动与噪声控制工程研究所

立体角



在任一闭曲面内一点看此闭曲面的立体角为 4π ，在任一闭曲面外一点看此闭曲面的立体角为零，而在闭曲面上一点看此闭曲面的立体角为 2π 。

偶极源解释

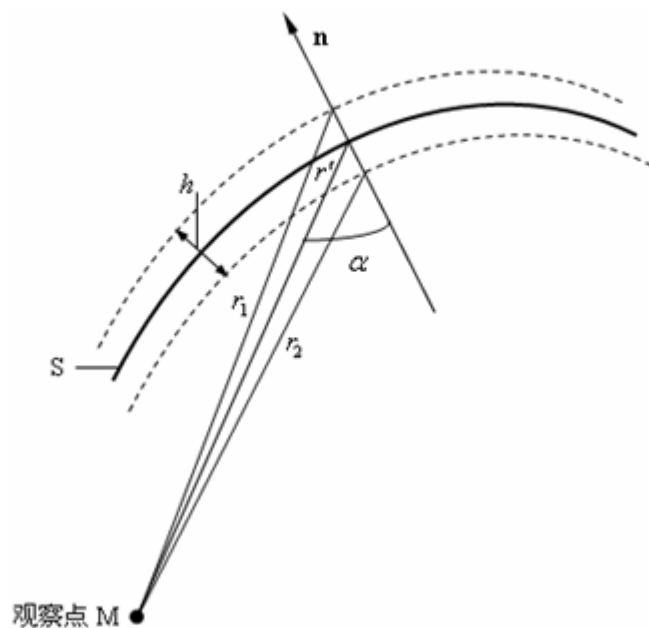


图 4.4 双层点声源形成的偶极源

实际上，第一项可以写成这种形式

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{e^{i(k_0 - \omega)t}}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} dS = \frac{dQ}{4\pi |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} e^{i(k_0 - \omega)t} = \frac{dQ}{4\pi r'} e^{i\omega t}, \quad (4.14)$$

式中， dQ 是面元 dS 的体积速度， $r' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ 。因此，第一项确定一个球面波声源的势函数。

5 声学互易定理及其应用	95
5.1 经典互易定理	95
5.1.1 瑞利经典互易定理	95
5.1.2 力声变换结构的互易关系	97
5.1.3 电声换能器的互易关系	97
5.2 声学互易定理推导	99
5.2.1 弹性表面在声源和力作用下的声学互易定理	99
5.2.2 声学互易定理的不同形式	101
5.3 声学互易定理的工程应用	105
5.3.1 应用互易定理校准传声器	105
5.3.2 力激励下的辐射噪声计算	112
5.3.3 应用互易定理求解撞击噪声	114
5.4 本章小结	116

5.1 经典互易定理

瑞利经典互易定理



图 5.1 自由度为 n 的线性动力系统示意图

设有一自由度为 n 的线性动力系统,如图 5.1 所示,其瞬时状态用广义坐标 x_i 及广义速度 v_i 来表示, 作用于坐标 x_i 方向的广义外力为 F_i , ($i=1, 2, \dots, n$), 则存在互易关系

$$\sum_{i=1}^n (F'_i v_i - v'_i F_i) = 0. \quad (5.1)$$

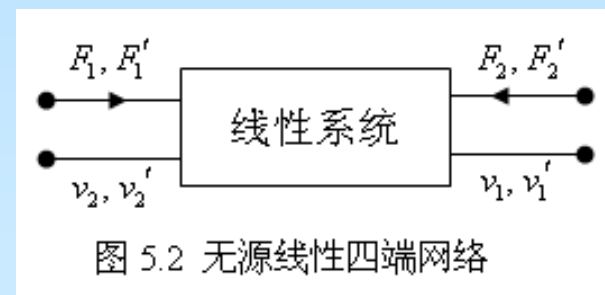
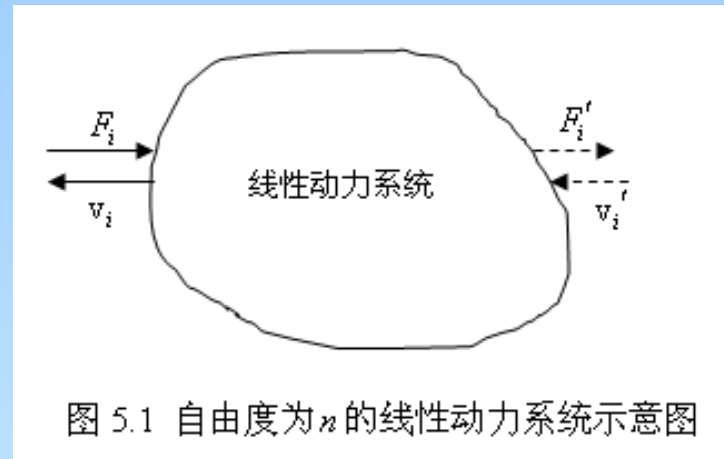
瑞利经典互易定理

$$F_2' v_2 = v_1' F_1$$

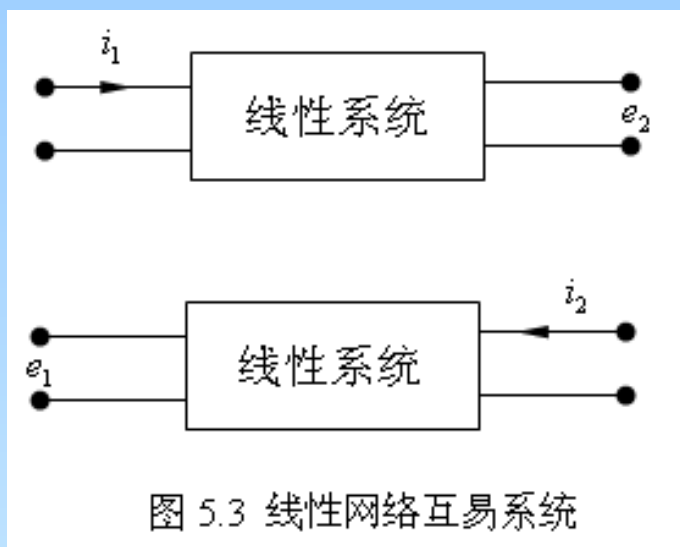
或

$$\frac{v_2}{F_1} = \frac{v_1'}{F_2'}$$

$$F_1' v_1 + F_2' v_2 = v_1' F_1 + v_2' F_2$$



瑞利经典互易定理



$$\frac{e_2}{i_1} = \frac{e_1}{i_2}$$

图 5.3 线性网络互易系统

这里要指出，线性四端网络两边的变量不一定要具有相同的量纲。例如，若 F_1 、 v_1 分别表示力及线速度，而 F_2 和 v_2 却可以是力矩及角速度。而且，上述论断可以无条件地应用于线性无源的电系统中。

经典互易定理只具有形式性，因为它仍然未明确在系统中起作用的各种耦合的物理特性，定理形式上的一般性会使人产生模糊的印象。

力声变换结构的互易关系

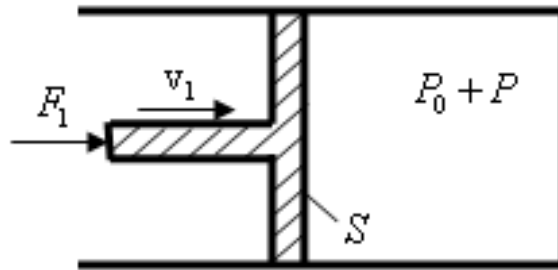


图 5.4 具有互易关系的力学—声学综合系统

$$Z_2 = \frac{P}{U} = \frac{F_2/S}{S v_1} = \frac{F_1}{v_1} \frac{1}{S^2} = \frac{1}{S^2} Z_1$$

电声换能器的互易关系

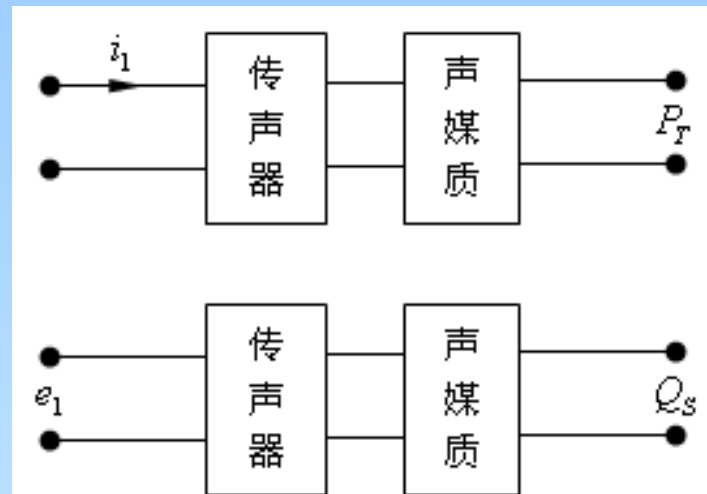


图 5.5 电声换能器的互易系统

根据电声类比, 电学中的恒压源和电流分别类比于声学中的恒声压源和体积速度, 这样由式(5.4)可得电声换能器的互易关系为

$$\frac{P_T}{i_1} = \frac{e_1}{Q_s} \quad (5.6)$$

$$P_M = -\frac{i\omega\rho_0 Q_s}{4\pi r} e^{i\omega r} = -\frac{i\rho_0 f Q_s}{2r} e^{i\omega r}$$

电声换能器的互易关系

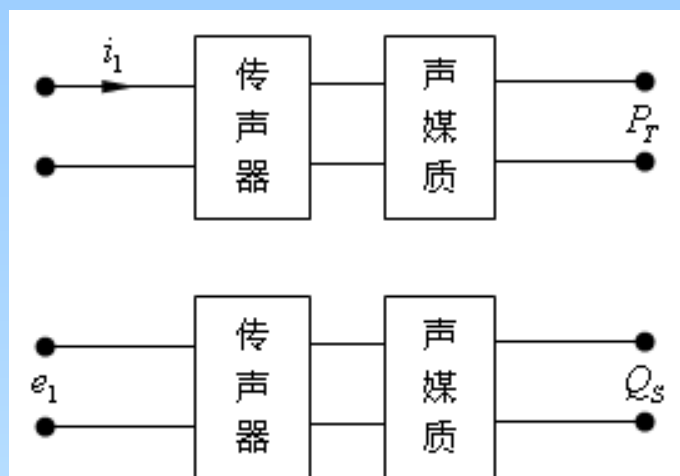


图 5.5 电声换能器的互易系统

这里再引入传声器声压灵敏度的定义。传声器声压灵敏度是指传声器输出的开路电压与未置入传声器时作用在其膜片处的声压之比。这样，传声器的接收灵敏度被定义为 $M_f = |e_1/P_M|$ ，而传声器的发送灵敏度就定义为 $S = |P_T/i_1|$ 。因而由式(5.6)和(5.7)可得

$$\frac{M_f}{S} = \left| \frac{Q_S}{P_M} \right| = \frac{2r}{\rho_0 f} \quad (5.8)$$

式(5.8)就是电声换能器的互易定理的表达式。它表明：对于可逆、线性、无源的电声换能器，其接收灵敏度和发送灵敏度之比等于换能器作辐射器时的体积速度和离它 r 处产生的声压之比。这个比值是一常数，称为互易参量，它与声媒质、频率及传播特性有关。

电声换能器的互易关系

$$\frac{M_f}{S} = \left| \frac{Q_S}{P_M} \right| = \frac{2r}{\rho_0 f}$$

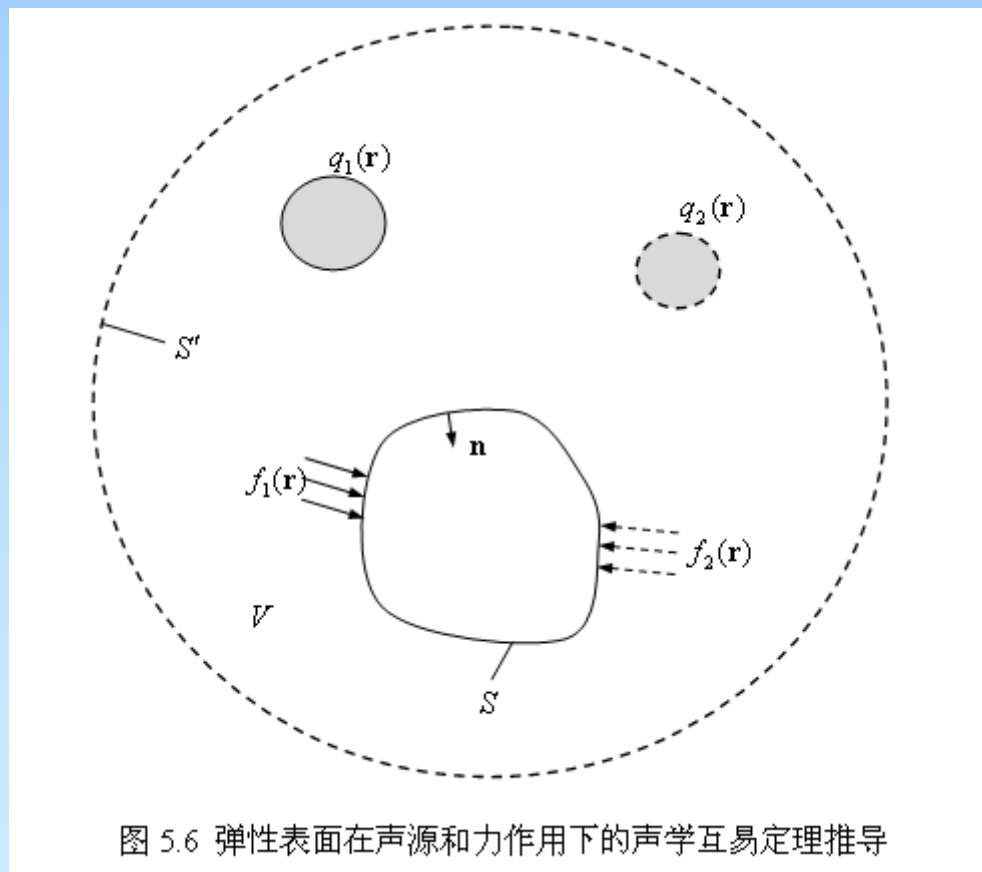
表 5.1 在各种不同声场中的互易参量[15]

声场	球面自由声场	平面自由声场	柱面声场	扩散声场
互易参量	$\frac{2r}{\rho_0 f}$	$\frac{2B}{\rho_0 c_0}$	$\frac{2L}{\rho_0 c_0} \sqrt{r\lambda}$	$\frac{2h}{\rho_0 f}$

表中 B 为平面自由声场中可逆换能器辐射面积, L 是柱形传声器长度, r 为径向距离, λ 为声波波长, $h = \sqrt{A/16\pi}$, A 为混响室的总吸收。

5.2 声学互易定理

弹性表面在声源和力作用下的 声学互易定理



弹性表面在声源和力作用下的 声学互易定理

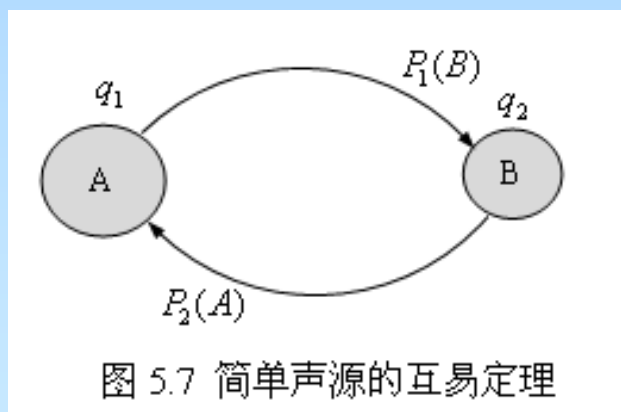
互易原理一般形式:

$$\iint_S \left[\frac{\partial P_1(\vec{r})}{\partial n} \cdot f_2(\vec{r}) - \frac{\partial P_2(\vec{r})}{\partial n} f_1(\vec{r}) \right] dS = -i\omega\rho \iiint_V [q_1(\vec{r})P_2(\vec{r}) - q_2(\vec{r})P_1(\vec{r})] dV$$

声学互易定理的不同形式

互易原理一般形式:

$$\iint_S \left[\frac{\partial P_1(\bar{r})}{\partial n} \cdot f_2(\bar{r}) - \frac{\partial P_2(\bar{r})}{\partial n} f_1(\bar{r}) \right] dS = -i\omega\rho \iiint_V [q_1(\bar{r})P_2(\bar{r}) - q_2(\bar{r})P_1(\bar{r})] dV$$



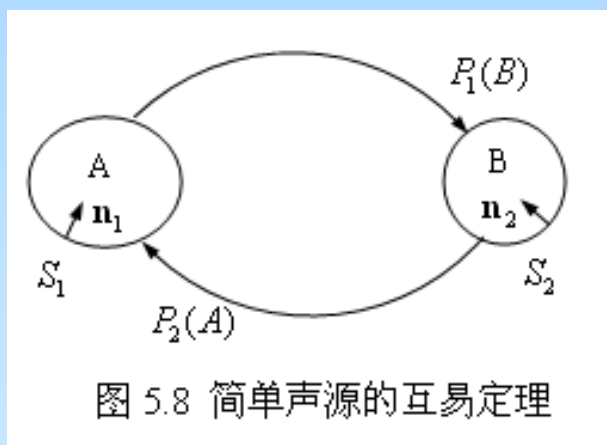
$$\iiint_V q_1(\mathbf{r})P_2(\mathbf{r})dV = \iiint_V q_2(\mathbf{r})P_1(\mathbf{r})dV$$

上式两边可看作是能量的关系，其物理意义表示声源A消耗在为克服声源B的作用的功率等于声源B为克服声源A的作用所消耗的功率。

声学互易定理的不同形式

互易原理一般形式:

$$\iint_S \left[\frac{\partial P_1(\bar{r})}{\partial n} \cdot f_2(\bar{r}) - \frac{\partial P_2(\bar{r})}{\partial n} f_1(\bar{r}) \right] dS = -i\omega\rho \iiint_V [q_1(\bar{r})P_2(\bar{r}) - q_2(\bar{r})P_1(\bar{r})] dV$$



$$\iint_S \frac{\partial P_1(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} P_2(\mathbf{r}) dS = \iint_S \frac{\partial P_2(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} P_1(\mathbf{r}) dS$$

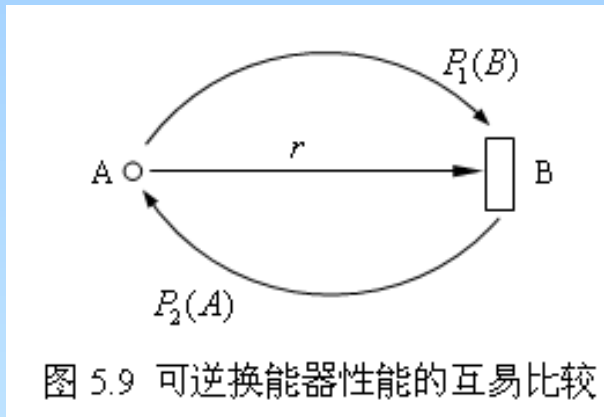
$$\iint_{S_1} \frac{\partial P_1(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_1} P_2(\mathbf{r}) dS = \iint_{S_2} \frac{\partial P_2(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_2} P_1(\mathbf{r}) dS$$

上式的每边表示其中一个发射器的振动速度与另一个发射器产生在这个发射器表面上的声压的乘积，所以等式的左边和右边是声源为克服另一声源的作用所消耗的功率。

在简单声源和振动表面声源两种情况下互易定理的公式在形式上是一致的

$$\iint_{S_1} \frac{\partial P_1(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_1} P_2(\mathbf{r}) dS = \iint_{S_2} \frac{\partial P_2(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_2} P_1(\mathbf{r}) dS$$

(1) 可互换能器性能的互易比较



(见书中101页)

$$P_2(A)Q_1(A) = P_1(B)Q_2(B)$$

互易原理一般形式:

$$\iint_S \left[\frac{\partial P_1(\vec{r})}{\partial n} \cdot f_2(\vec{r}) - \frac{\partial P_2(\vec{r})}{\partial n} f_1(\vec{r}) \right] dS = -i\omega\rho \iiint_V [q_1(\vec{r})P_2(\vec{r}) - q_2(\vec{r})P_1(\vec{r})] dV$$

力学Betti互易定理

$$\iint_S \frac{\partial P_1(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} f_2(\mathbf{r}) dS = \iint_S \frac{\partial P_2(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} f_1(\mathbf{r}) dS$$

$$\iint_S v_1(\mathbf{r}) f_2(\mathbf{r}) dS = \iint_S v_2(\mathbf{r}) f_1(\mathbf{r}) dS$$

左边和右边是一个系统的力为克服另一系统的作用而消耗的功率

互易原理一般形式:

$$\iint_S \left[\frac{\partial P_1(\vec{r})}{\partial n} \cdot f_2(\vec{r}) - \frac{\partial P_2(\vec{r})}{\partial n} f_1(\vec{r}) \right] dS = -i\omega\rho \iiint_V [q_1(\vec{r})P_2(\vec{r}) - q_2(\vec{r})P_1(\vec{r})] dV$$

力和声源相互作用的互易定理

$$\iint_S \frac{\partial P_1(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} f_2(\mathbf{r}) dS = -i\omega\rho_0 \iiint_V q_1(\mathbf{r})P_2(\mathbf{r}) dV$$

$$P_2(\mathbf{r}_0) = \frac{i}{\omega\rho_0 Q_1} \iint_S \frac{\partial P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{n}} f_2(\mathbf{r}) dS$$

5.3 声学互易定理的工程应用

应用互易定理校准传声器

A. 自由空间中互易法校准传声器

在自由空间中要按互易法校准传声器声场灵敏度，需要有三个传声器，即一个互易传声器、一个待校准的非互易传声器和一个作为辅助声源的传声器。

采用**三次测量法**利用互易定理分别对接收换能器和辐射换能器进行校准

(1) 接收换能器的互易法校准

假定待校准的电声器件是接收换能器，自由空间中互易法校准接收换能器的步骤如图 5.10 所示，图中接收换能器以符号 x 表示，作为辅助声源的辐射换能器以字标 1 表示。互易换能器既可作为接收器，也可作为辐射器，以字标 2 表示。

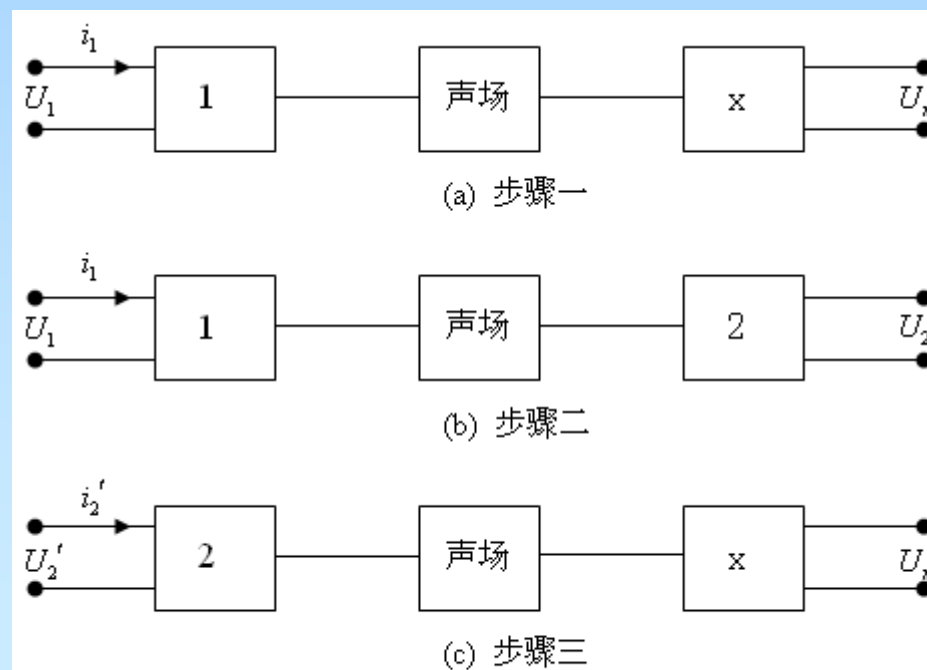
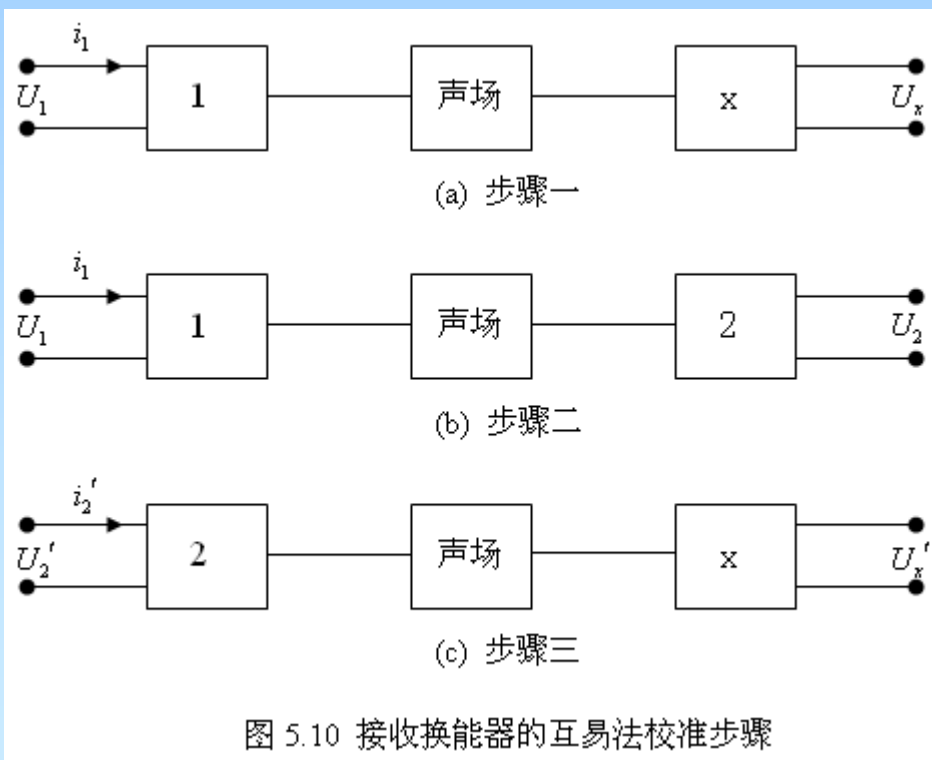


图 5.10 接收换能器的互易法校准步骤

应用互易定理校准传声器

A. 自由空间中互易法校准传声器

(1) 接收换能器的互易法校准



$$\frac{U_x}{U_2} = \frac{U_x}{P} \cdot \frac{P}{U_2} = \frac{M_{fx}}{M_{f2}}$$

$$\frac{U_x'}{i_2'} = \frac{U_x}{P'} \cdot \frac{P'}{i_2'} = M_{fx} S_2$$

$$\frac{M_{f2}}{S_2} = C$$

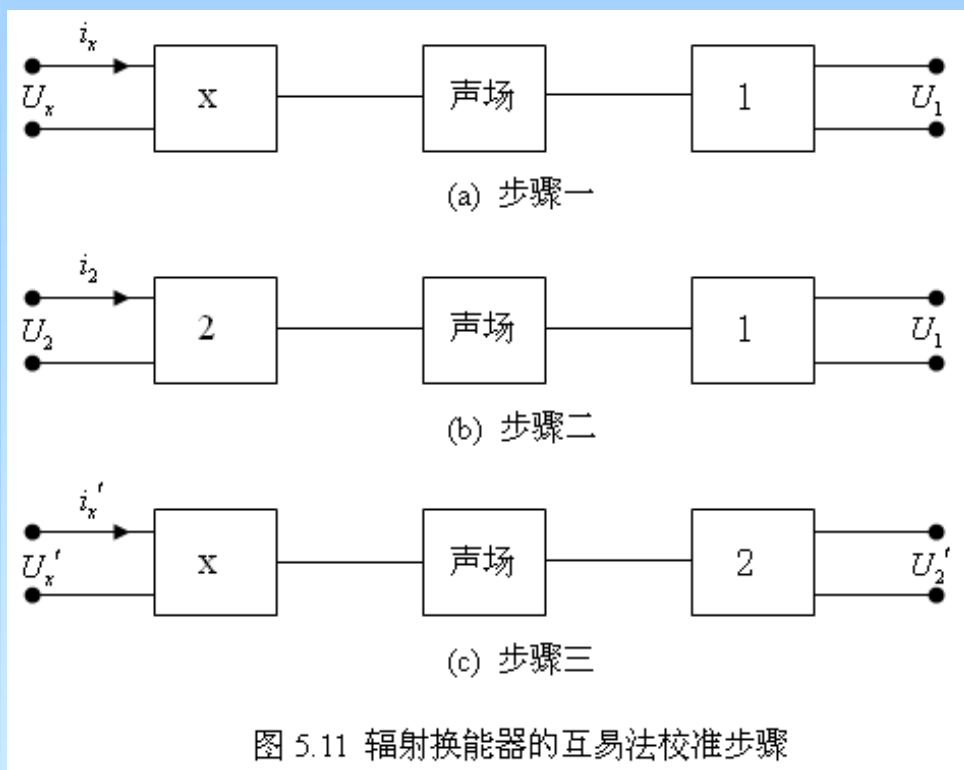
$$M_{fx} = \sqrt{C \frac{U_x}{U_2} \cdot \frac{U_x'}{i_2'}}$$

上式就是待校准的接收换能器的接收灵敏度校准公式

应用互易定理校准传声器

A. 自由空间中互易法校准传声器

(2) 辐射换能器的互易法校准



若待校准的电声器件是辐射换能器，仍以符号 x 表示。此时以声接收器作为辅助声源，以字标 1 表示。换能器 2 仍是可逆器件。自由空间中互易法校准该辐射换能器的步骤如图 5.11 所示。

$$\frac{i_2}{i_x} = \frac{i_2}{P} \cdot \frac{P}{i_x} = \frac{S_x}{S_2}$$

$$\frac{U_2'}{i_x'} = \frac{P'}{i_x'} \cdot \frac{U_2'}{P'} = S_x M_{f2} = C S_x S_2$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{C} \frac{U_2' i_2}{i_x' i_x}}$$

上式就是待校准的辐射换能器的发送灵敏度校准公式

应用互易定理校准传声器

A. 自由空间中互易法校准传声器

利用互易法校正传声器灵敏度的理论和公式比较简单，并不需要引用过分简单化的假定，且只需测量开路电压和短路电流，因此所用仪器也比较简单。但是，由于常数 C 是在无限自由空间条件下得到的，因而互易法给出的上述灵敏度公式也只是适用于无限自由空间。也就是说，用互易法来测量传声器自由场灵敏度所遇到的最大限制是要得到一个自由声场，即必须要有一个消声室。为了弥补上述缺陷，下面提出非消声室中传声器灵敏度的互易校正方法，作为对自由场传声器灵敏度互易法校正的补充。

应用互易定理校准传声器

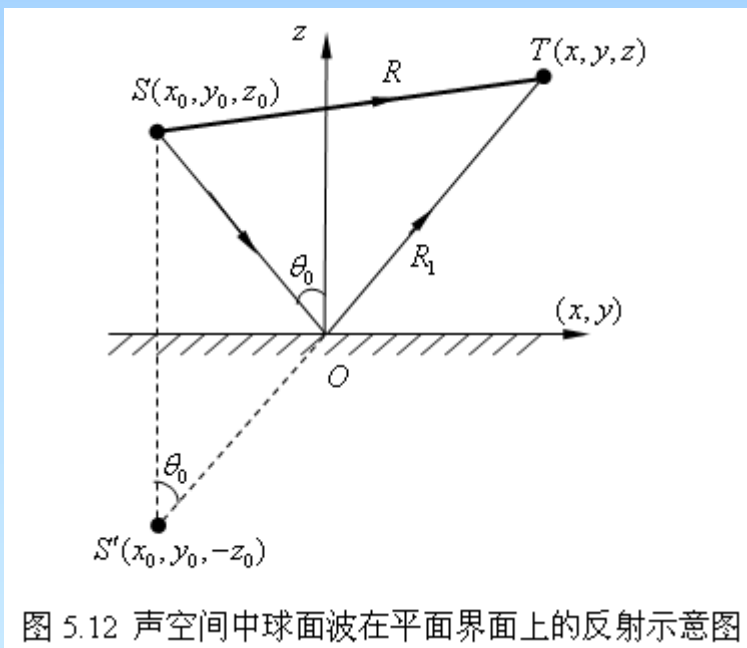
B. 非消声室中互易法校准换能器

在非消声室中，我们不得不考虑地面、周围壁面和天花板的反射声影响。如果在室外或较大房间中，传声器位置距周围壁面和天花板的距离比传声器之间校正距离要大得多（大于10倍以上），那么根据球面发散波的计算就可以忽略它们对互易法校正的影响，而只需考虑地面声发射的近距离影响。因此只要设法校正地面反射声的影响，那么非消声室中的测量就象在自由声场中进行，从而可以继续利用自由场中的互易法校正传声器灵敏度。

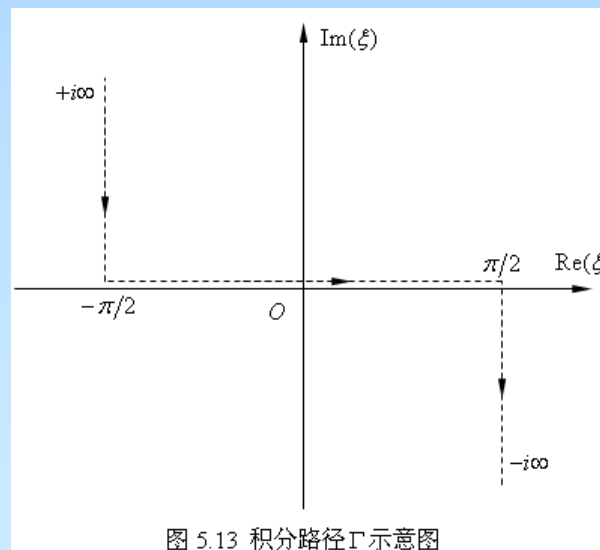
应用互易定理校准传声器

B. 非消声室中互易法校准换能器

(1) 地面反射声的校正



$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{ik}{2} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(kr \sin \xi) e^{ik|z-z_0|\cos \xi} \sin \xi d\xi$$



应用互易定理校准传声器

B. 非消声室中互易法校准换能器

(1) 地面反射声的校正

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{ik}{2} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(kr \sin \xi) e^{ik|z-z_0|\cos \xi} \sin \xi d\xi$$

$$\varphi_R = \frac{ik}{2} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(kr \sin \xi) e^{ik(z+z_0)\cos \xi} V(\xi) \cdot \sin \xi d\xi$$

$$H_0^{(1)}(u) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{i(u-\frac{\pi}{4})}$$

$$\varphi_R = e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{2\pi r}} \int_{\Gamma} e^{ikR_1 \cos(\xi-\theta_0)} V(\xi) \sqrt{\sin \xi} d\xi$$

$$\varphi_R = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} V(\theta_0) \quad (\text{平稳相位法})$$

θ_0 是方程式 $\frac{d \cos(\xi - \theta_0)}{d\xi} = 0$ 的根, 称为平稳相位点

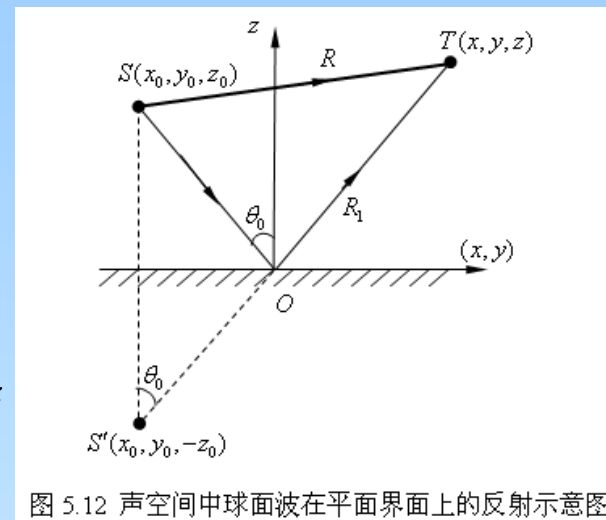


图 5.12 声空间中球面波在平面界面上的反射示意图

应用互易定理校准传声器

B. 非消声室中互易法校准换能器

(1) 地面反射声的校正

为了简单起见，我们将直达声的声压写成

$$P_D = \frac{A_0}{R} \cos(\omega t - kR),$$

而反射声的声压表示为

$$P_R = \frac{A_0 V(\theta)}{R_1} \cos(\omega t - kR_1),$$

式中， A_0 是声压振幅值， R 、 R_1 如图 5.12 所示。

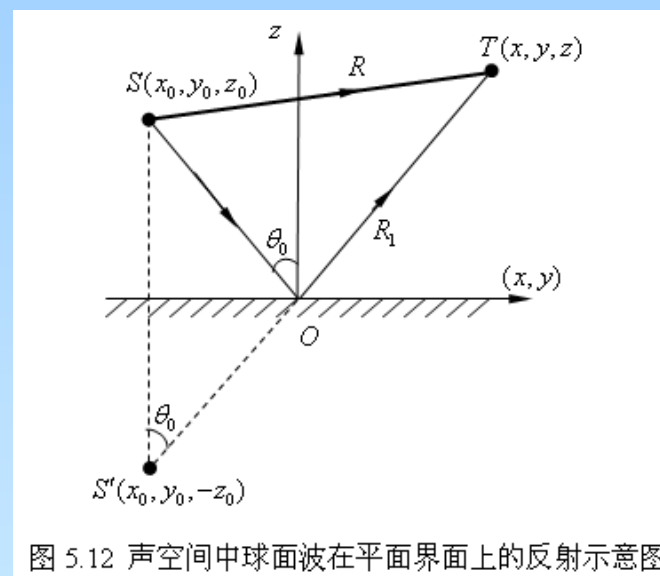


图 5.12 声空间中球面波在平面界面上的反射示意图

$$P = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [P_D + P_R]^2 dt} = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{|V(\theta)|^2}{R_1^2} + \frac{2|V(\theta)|}{RR_1} \cos k(R_1 - R) \right]^{\frac{1}{2}}$$

应用互易定理校准传声器

B. 非消声室中互易法校准换能器

(1) 地面反射声的校正

$$P = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [P_D + P_R]^2 dt} = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{|V(\theta)|^2}{R_1^2} + \frac{2|V(\theta)|}{RR_1} \cos k(R_1 - R) \right]^{\frac{1}{2}}$$

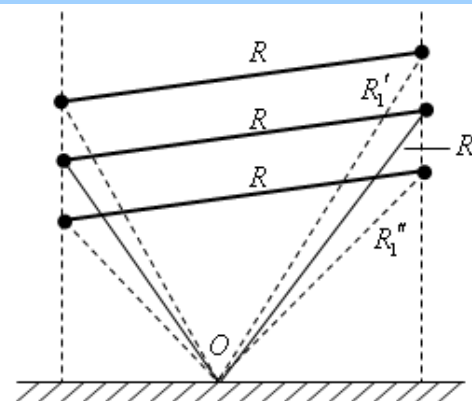


图 5.14 保持距离 R 不变而改变高度以获得声压极大值和极小值的示意图

如果维持发射器到接收器之间的距离 R 不变, 而同时改变发射器和接收器的高度, 如图 5.14 所示, 则有:

当 $k(R_1' - R) = 2n\pi$ 时, 从式(5.44)可知这时 P 有极大值为

$$P_{\max} = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{R} + \frac{|V(\theta)|}{R_1'} \right) \quad (5.45)$$

当 $k(R_1'' - R) = (2n+1)\pi$ 时, 从式(5.44)可知这时 P 有极小值为

$$P_{\min} = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{R} - \frac{|V(\theta)|}{R_1''} \right) \quad (5.46)$$

应用互易定理校准传声器

B. 非消声室中互易法校准换能器

(1) 地面反射声的校正

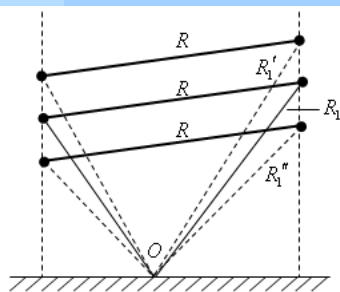


图 5.14 保持距离 R 不变而改变高度以获得声压极大值和极小值的示意图

$$P_{\max} = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{R} + \frac{|V(\theta')|}{R_1'} \right)$$

$$P_{\min} = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{R} - \frac{|V(\theta'')|}{R_1''} \right)$$

通常情况地面是水泥地，其相对于界面上的空气介质而言可看作刚性界面，因此有反射系数 $V(\theta') \approx V(\theta'') = 1$ 。即使不是刚性地面，但在较高频率时，由于波长很短，这时求极大值和极小值的相应高度差也很小，因而角度变化很小，可近似认为 $\theta' \approx \theta''$ 。因而在一般测量条件下，只要地面相对于空气是比较硬的，则总可以取 $V(\theta') = V(\theta'') = V$ 。因此，从式(5.45)和(5.46)可得

$$\frac{A_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{R} = \frac{1}{2} (P_{\max} + P_{\min}) \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2R_1''R_1'}{R(R_1'' - R_1')V}} \right] \quad (5.47)$$

式(5.47)左边正是自由场中球面声压的表达式。在低频时 R_1' 和 R_1'' 会相差较大，

但在测试频率大于 500 Hz 时有 $R_1' \approx R_1''$ ，此时式(5.47)就简化为

$$\frac{A_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{R} = \frac{1}{2} (P_{\max} + P_{\min}) \quad (5.48)$$

因此在测量时，只要保持发射器到接收器之间的距离 R 不变，上下平移点源发射器和接收器的高度，从得到的相邻的极大值和极小值之和除以 2 即可消去地面反射声影响。

应用互易定理校准传声器

B. 非消声室中互易法校准换能器

(2) 传声器的互易校正

上面式(5.36)中, 我们采用三次测量法给出了自由声场中待校准的辐射换能器的发送灵敏度校准公式。对于非自由声空间, 则可以利用式(5.48)消去地面反射声的影响, 即在保持发射器到接收器之间的距离不变时, 上下平移发射器和接收器的高度测几组接收器输出电压的极大值和极小值, 然后取其平均值[即 $\frac{1}{2}(U_{\max} + U_{\min})$], 再用这个平均值来代替式(5.36)中可逆换能器 2 的输出电压。这样, 非自由声场中辐射换能器的发送灵敏度校准公式就为

$$S_x = \sqrt{C \frac{(U_{2\max}' + U_{2\min}') i_2}{2i_x' i_x}} \quad (5.49)$$

同理, 非自由声场中接收换能器的接收灵敏度校准公式就可由三次测量法得到的式(5.33)改变为

$$M_{fx} = \sqrt{C \frac{(U_{x\max} + U_{x\min}) (U_{x\max}' + U_{x\min}')}{(U_{2\max} + U_{2\min}) 2i_2'}} \quad (5.50)$$

式(5.49)和式(5.50)就是非自由声场中采用三次测量法得到的换能器灵敏度互易校正公式。

力激励下的辐射噪声计算

A. 外力作用下薄板的声辐射

$$P_2(\mathbf{r}_0) = \frac{i}{\omega \rho_0 Q_1} \iint_S \frac{\partial P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{n}} f_2(\mathbf{r}) dS$$

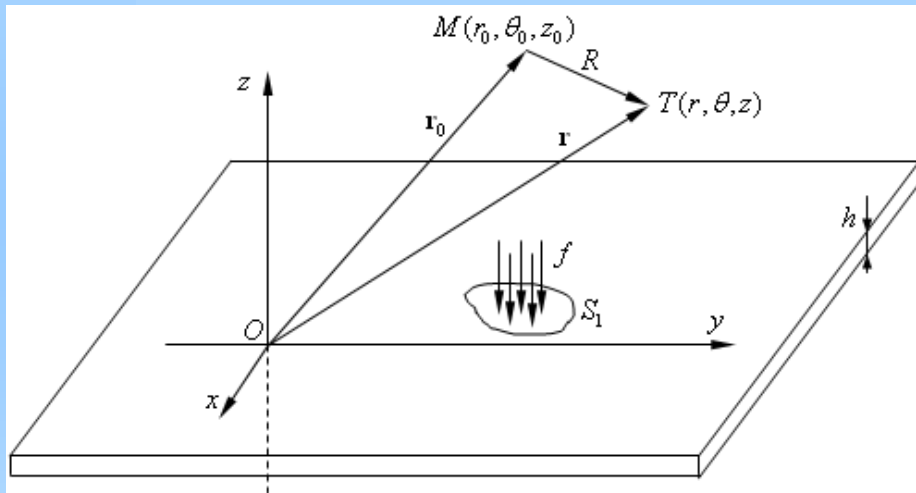


图 5.15 无限大平板在力激励下的声辐射

$$P_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\frac{i\omega\rho}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = -\frac{i\omega\rho}{4\pi R} e^{ikR}$$

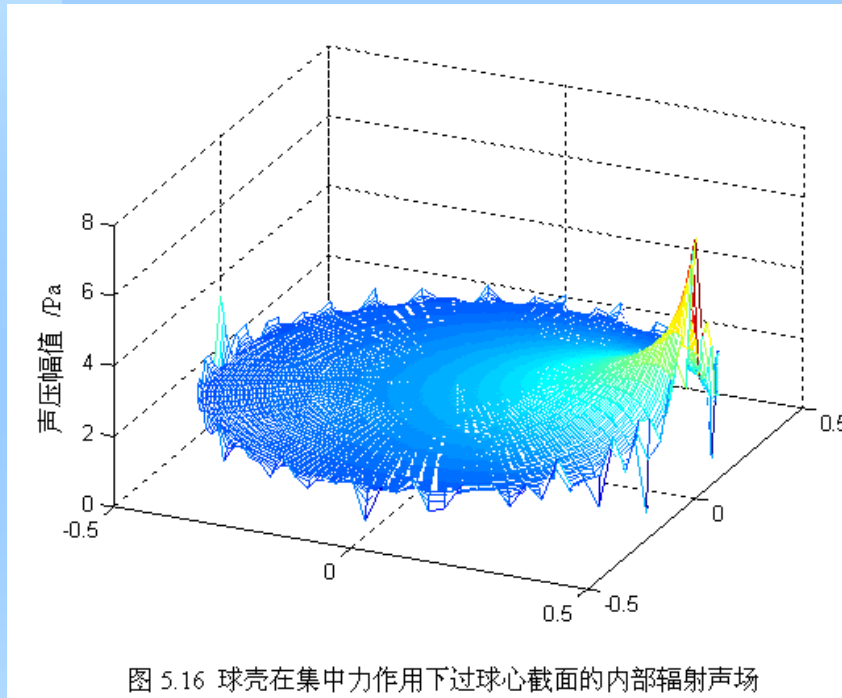
$$P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\omega\rho k}{8\pi} \int_{\Gamma} A(\xi) H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\sin\xi) e^{ik|z-z_0|\cos\xi} \sin\xi d\xi$$

$$P_2(\mathbf{r}_0) = \frac{i}{\omega\rho} \iint_{S_1} \frac{\partial P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z} \Big|_{z=h} f(r, \theta, h) dS$$

$$f(r, \theta) = \frac{F}{r} \delta(r) \delta(\theta) \quad P_2(\mathbf{r}_0) = \frac{k^2 F}{8\pi} \int_{\Gamma} A(\xi) H_0^{(1)}(kr_0 \sin\xi) e^{ik|h-z_0|\cos\xi} \cos\xi \sin\xi d\xi$$

力激励下的辐射噪声计算

B. 外力作用下球壳的声辐射



$$P_1(\mathbf{r}_0) = \frac{i}{\omega \rho_0} \iint_{S_1} \frac{\partial P_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial r} f(\mathbf{r}) dS$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{F}{r^2 \sin \theta} \delta(r - R) \delta(\theta) \delta(\varphi)$$

$$P_1(r_0, \theta_0, \phi_0) = \frac{-kF}{4\pi\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{b_{n1}}{a_{n2}} \cdot (2n+1) \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot P_n^m(\cos \theta_0) \cdot e^{-im\phi_0} \cdot j_n(kr_0) \cdot j_n'(kR) \cdot P_n^m(1)$$

力激励下的辐射噪声计算

应用互易定理求解撞击噪声

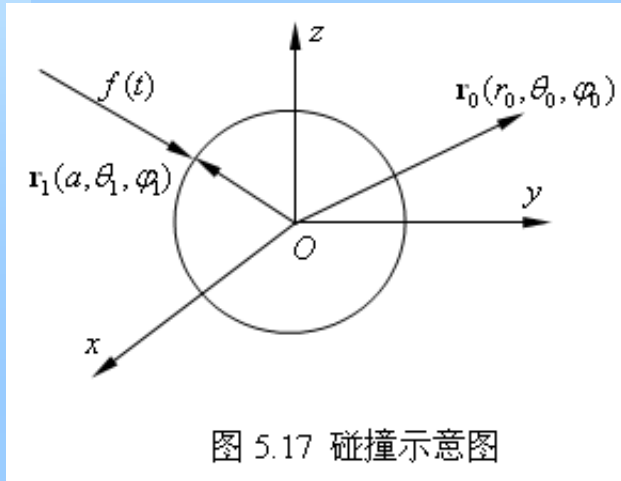


图 5.17 碰撞示意图

任意形状两弹性体碰撞时的最大作用力为

$$f_m = \alpha \cdot \delta^{3/2}$$

两弹性体接触后的最大变形量

$$\delta = \left[\frac{1.25(v_1 - v_2)^2}{\alpha \alpha_1} \right]^{2/5}$$

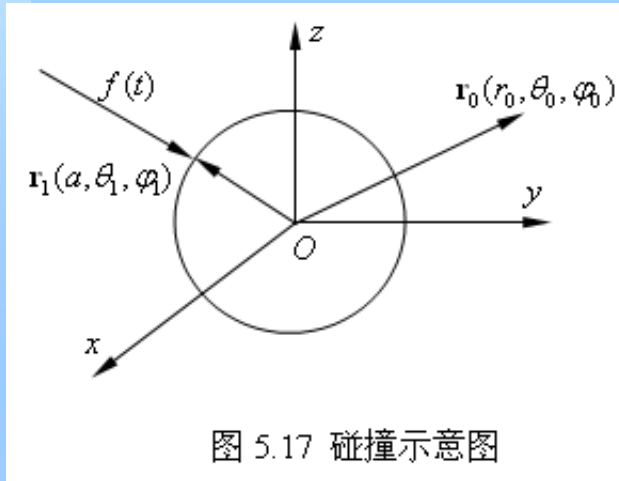
$$t_m = 2.943 \cdot \delta / (v_1 - v_2)$$

碰撞的力-时间曲线可近似为半正弦脉冲

$$f(t) = f_m \cdot \sin(\pi t / t_m)$$

力激励下的辐射噪声计算

应用互易定理求解撞击噪声



$$P_2(\mathbf{r}_0, \omega) = \frac{i}{\omega \rho_0} \iint_S \frac{\partial P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{n}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) dS = \frac{i}{\omega \rho_0} \frac{\partial P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial r} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}$$

假设球体表面是绝对硬的

$$\frac{\partial P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial r} = -\frac{\omega \rho_0}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)k^2 \cdot P_m(\cos \beta) \cdot j_m'(kr) \cdot h_m^{(1)}(kr_0)$$

根据傅里叶变换可以得到对应上式的时域辐射声压

$$P_2'(\mathbf{r}_0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_2(\mathbf{r}_0, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

半正弦碰撞力作用下，圆球体的辐射声场计算公式

$$P(\mathbf{r}_0, t) = \int_0^B P_2'(\mathbf{r}_0, t - \tau) \times f(\tau) d\tau$$

力激励下的辐射噪声计算

应用互易定理求解撞击噪声

