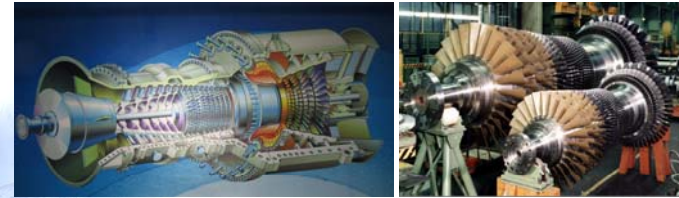


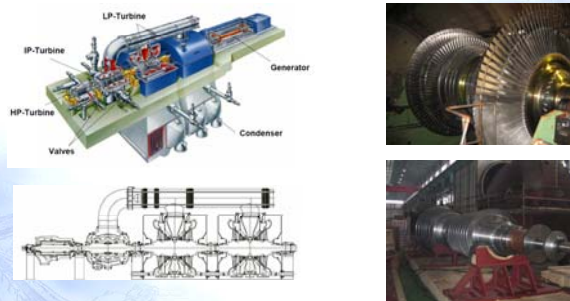
第二章 转子动力学

2.0 透平机械中的转子



重型燃气轮机转子：压气机和涡轮

2.0 透平机械中的转子



汽轮发电机组转子

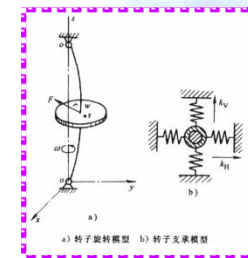
2.1 单转子横向振动

单轮盘转子

d → 轴的直径

k → 弯曲刚度

m → 轮盘质量



轴的两端支承在两个型式相同的弹性支座上

k_H → 支座水平刚度 k_V → 支座垂直刚度

转子旋转时的受力状况

① 支承的恢复力

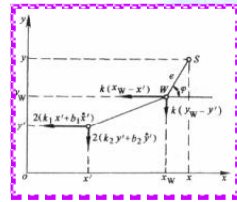
$$F_{BH} = k_H \cdot x', F_{BV} = k_V \cdot y'$$

② 轴作用于轮盘上的力

$$F_{RH} = k(x - x' - e \cos \alpha t), F_{RV} = k(y - y' - e \sin \alpha t)$$

③ 当支座无质量时，轮盘作用于轴上的力等于轴作用在支座上的力

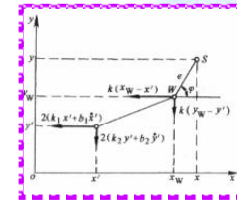
$$F_{RH} = 2F_{BH}, F_{RV} = 2F_{BV}$$



④ 转子系统中的阻尼力

$$F_{DH} = b\dot{x}, F_{DV} = b\dot{y}$$

b 为转子系统的阻尼系数， \dot{x} 和 \dot{y} 为轮盘质心运动的速度



⑤ 根据力平衡原理，转子运动的方程为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + k(x - x' - e \cos \alpha t) + b\dot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} + k(y - y' - e \sin \alpha t) + b\dot{y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

支座坐标和可写为 $x' = \frac{x - e \cos \alpha t}{\frac{2k_H}{k} + 1}, y' = \frac{y - e \sin \alpha t}{\frac{2k_V}{k} + 1}$

将 x', y' 代入式 (1) 可得运动方程表达式

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega_1 \zeta_1 \dot{x} + \omega_1^2 x &= \omega_1^2 e \cos \alpha t \\ \ddot{y} + 2\omega_2 \zeta_2 \dot{y} + \omega_2^2 y &= \omega_2^2 e \sin \alpha t \end{aligned} \right\}$$

式中 $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \left[\frac{1}{1 + \frac{k}{2k_H}} \right]$ 转子在 x 方向上的自振（固有）频率

$\omega_2^2 = \frac{k}{m} \left[\frac{1}{1 + \frac{k}{2k_V}} \right]$ 转子在 y 方向上的自振（固有）频率

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega_1 \zeta_1 \dot{x} + \omega_1^2 x &= \omega_1^2 e \cos \alpha t \\ \ddot{y} + 2\omega_2 \zeta_2 \dot{y} + \omega_2^2 y &= \omega_2^2 e \sin \alpha t \end{aligned} \right\}$$

式中 $\zeta_1 = \frac{b}{2m\omega_1}$ 转子在 x 方向上的阻尼比

$\zeta_2 = \frac{b}{2m\omega_2}$ 转子在 y 方向上的阻尼比

⑥ 上式是两个相互独立的常系数二阶非奇次微分方程其通解由奇次方程的通解和非奇次方程的特解组成

● 通解在无激振力（自由振动）时按指数规律减小，暂不予考虑

④ 运动微分方程的特解

$$\left. \begin{aligned} x &= \beta_x e \cos(\omega t - \varphi_1) \\ y &= \beta_y e \sin(\omega t - \varphi_2) \end{aligned} \right\}$$

式中 $\beta_x = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_1})^2]^2 + [\frac{b\omega}{m\omega_1}]^2}}$ $tg \varphi_1 = \frac{b}{m\omega_1} \frac{1}{(\frac{\omega_1}{\omega}) - (\frac{\omega}{\omega_1})}$

$$\beta_y = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_2})^2]^2 + [\frac{b\omega}{m\omega_2}]^2}}$$
 $tg \varphi_2 = \frac{b}{m\omega_2} \frac{1}{(\frac{\omega_2}{\omega}) - (\frac{\omega}{\omega_2})}$

$$\left. \begin{aligned} x &= \beta_x e \cos(\omega t - \varphi_1) \\ y &= \beta_y e \sin(\omega t - \varphi_2) \end{aligned} \right\}$$

④ 上式为有阻尼强迫振动时振动幅值的表达式，振幅的大小与偏心距 e 、阻尼比以及干扰力频率 ω 与转子自振圆频率 ω_1 (ω_2) 之比有关

④ 当干扰力频率等于转子自振圆频率时，发生共振，振幅达到最大值

$$\left. \begin{aligned} x_{\max} &= \frac{me\omega_1}{b} \\ y_{\max} &= \frac{me\omega_2}{b} \end{aligned} \right\}$$

结论

④ 弹性支承会使转子系统的自振频率降低（与刚性支承比）

当支座刚度达到 1.0×10^{12} N/m 时，就可近似认为是刚性支座，则支座刚度对转子系统自振频率的影响可以忽略不计，弹性临界转速就等于刚性临界转速

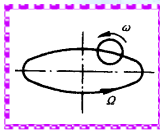
④ 如果转子支承的水平刚度等于垂直刚度 $k_H = k_V$ ，则 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ，转子系统是各向同性，仅有一个自振频率；否则 $k_H \neq k_V$ 时，转子将有两个自振频率

④ 如果轮盘的质心与几何中心不重合，偏心距为 e ，在偏心力的作用下转子作复合运转

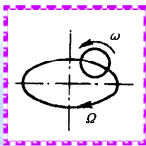
当轮盘绕转子中心线 $O\omega O$ 进行转动，角速度为 ω ；同时转子绕支承中心线进行旋转，称为涡动，涡动的角速度为 Ω

若涡动角速度的旋转方向与轮盘旋转方向相同，称为正进动，反之称为反进动

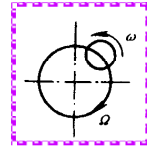
$\omega < \omega_1$ → 轴心 ω 的涡动轨迹是一个与轴同向旋转的椭圆，长轴在 x 轴上，称为正进动



$\omega_1 < \omega < \omega_2$ → 轴心的涡动轨迹是一个与轴反向旋转的椭圆，长轴方向不定，此时称为反进动



水平椭圆

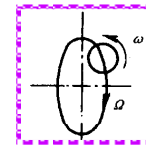


圆

$$\omega_1 < \omega < \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2}$$

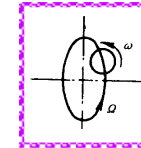
$$\omega = \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2}$$

$$\sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2} < \omega < \omega_2$$

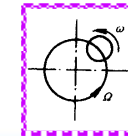


垂直椭圆

$\omega > \omega_2$ → 涡动轨迹由反向涡动又变为同向涡动，此时为正进动，轴心涡动轨迹为一垂直椭圆



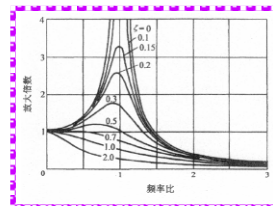
$\omega \gg \omega_2$ → 轴心的涡动轨迹是一个与轴同向旋转的圆



● 强迫振动的幅值的大小与偏心距 e 和振幅放大倍数 β_x 和 β_y 成正比，而振幅放大倍率又与频率比和阻尼比有关

$$\frac{\omega}{\omega_1} < 1 \text{ 或 } \frac{\omega}{\omega_2} < 1$$

振幅放大倍率随频率比的增大而增大（小阻尼情况）



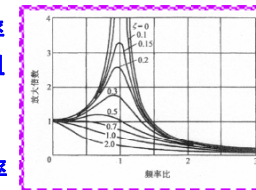
$$\frac{\omega}{\omega_1} > 1 \text{ 或 } \frac{\omega}{\omega_2} > 1$$

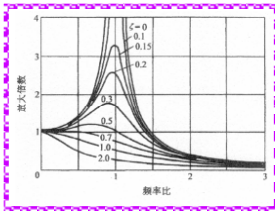
振幅放大倍率随频率比的增大而减小

频率比一定 → 振幅放大倍率随阻尼比的增大而减小，即振动中的最大振幅值会由于阻尼的存在而降低，尤其是在频率比为1时阻尼的影响最显著

$\omega \ll \omega_1$ 或 ω_2 → 振幅放大倍率接近于1而阻尼的影响很小

$\omega \gg \omega_1$ 或 ω_2 → 振幅放大倍率接近于零，且与阻尼无关





⑩ 高频干扰力对固有频率很低的转子系统不产生强迫振动，也是高转速转子能在柔性支座上平稳运转的原理

2.2 单转子的稳定性

⑩ 若无外力作用，单转子的运动为自由振动，其微分方程为

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

⑩ 汽轮机转子系统属于弱阻尼，此时 $b^2 - 4mk < 0$ ，用复数表示特征根为

转子系统特征根为
$$v_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm j\omega = -\mu \pm j\omega$$

其中 ω 为角频率，特征值的虚部； μ 为阻尼比，特征值的实部。

$$v_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm j\omega = -\mu \pm j\omega \quad \omega = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

⑩ 汽轮机转子系数的阻尼系数 b 取决于轴承油膜的阻尼和汽隙中的阻尼，它表示单位速度时的作用力，当特征值虚部为零时的阻尼系数为临界阻尼，阻尼系数与临界阻尼之比可以写成如下形式

$$\zeta = \frac{b}{b_c} = \frac{b}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{\mu}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$\zeta > 1$ → 大阻尼 } 系统不会发生自由振动
 $\zeta = 1$ → 临界阻尼 }
 $\zeta < 1$ → 小阻尼 → 系统会发生自由振动

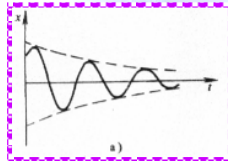
⑩ 汽轮机转子的阻尼系数是属于小阻尼情况，临界阻尼比 ζ 约为0.05左右，所以汽轮机转子系统可以发生自由振动

⑩ 自由振动方程式的通解

$$x = A_0 e^{-\mu t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$b > 0$ \rightarrow 阻尼比 $\mu > 0, -\mu < 0$ 特征值 ν 有负实部

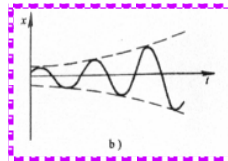
随着时间的增加，振幅不断地衰减，并最终减至零，所以 $b > 0$ 的自由振动是稳定的衰减振动



$b < 0$ \rightarrow 阻尼比 $\mu < 0, -\mu > 0$

负阻尼 特征值的实部大于零

随着时间的增加，振幅不断地增大，最终增至无穷大，所以 $b < 0$ 的自由振动是不稳定的扩散振动



$b = 0$ \rightarrow 阻尼比 $\mu = -\mu = 0$ 特征值的实部为零

随着时间的增加，振幅保持不变，且恒等于初始的位移值 A_0 ，所以 $b = 0$ 的自由振动是等幅振动

2.2 单转子的临界转速计算

转子的工作转速等于转子的自振频率（驱动频率）时，转子发生强烈振动的现象称为共振

- 每一单转子系统都有一个自振频率

刚性临界转速



取支承刚度无穷大
一般取 1.0×10^{12} N/m

阻尼临界转速



按不平衡响应计算求得的轴颈响应峰值转速

- ④ 对于等直径均布质量两个支承的转子

$$n_c = \frac{i^2 \pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \quad A = A_0 \sin\left(\frac{i\pi}{l} x\right)$$

- ④ 对于大功率汽轮机，不但要计算转子的刚性临界转速，还要计算转子的弹性临界转速，不但要计算一阶，还要计算二阶、三阶临界转速
- ④ 对于多转子的轴系，通常采用prol法（初参数法）和传递矩阵法计算转子临界转速

传递矩阵法

- ① 把离散了的圆盘、轴段、支承等若干个部件，用力学的方法建立部件两端截面状态向量间的传递关系
- ② 利用连续条件就可求得转子在任意截面的状态向量与起始截面的状态向量间的关系
- ③ 通过对满足边界条件的涡动频率的搜索，可得出转子系统的各阶临界转速
- ④ 对给定的自转角速度，计算转子在不平衡质量激励下的振动，就可求得转子的不平衡响应

- ① 任一截面 i 的挠度 y_i 、斜率 θ_i 、弯矩 M_i 、切力 Q_i 所组成的列阵，称为该截面的状态向量 $\{Z\}_i$ ，即

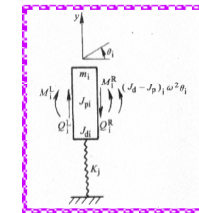
$$\{Z\}_i = [y, \theta, M, Q]^T$$

- ② 如图所示，带有弹性支承的刚性薄圆盘左右两端面状态向量间有如下关系

$$\{Z\}_i^R = [D] \{Z\}_i^L$$

$\{Z\}_i^R$ → 圆盘右端的状态向量

$\{Z\}_i^L$ → 圆盘左端的状态向量



$$\{Z\}_i^R = [D] \{Z\}_i^L$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (J_p - J_d)\omega^2 & 1 & 0 \\ m\omega^2 - K_j & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{刚性圆盘的传递矩阵}$$

m → 圆盘质量

ω → 转子旋转角速度

K_j → 支承总刚度系数

J_p → 圆盘的极转动惯量

J_d → 圆盘的轴转动惯量

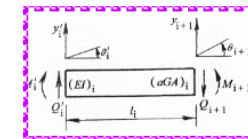
- ① 如图所示，对于无质量的等截面弹性轴段，两端截面 (i 和 $i+1$) 状态向量间的关系为

$$\{Z\}_{i+1} = [B] \{Z\}_i$$

$\{Z\}_{i+1}$ → 轴段右端的状态向量

$\{Z\}_i$ → 轴段左端的状态向量

$[B]$ → 轴段的传递矩阵



$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI(1-\nu)} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

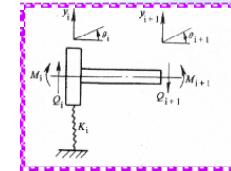
$$\{Z\}_{i+1} = [B]_i \{Z\}_i$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI(1-\nu)} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{轴段的传递矩阵}$$

$l \Rightarrow$ 轴段的长度 $\nu \Rightarrow$ 剪切变形系数
 $E \Rightarrow$ 材料弹性模量 $I \Rightarrow$ 轴段的轴惯性矩

④ 为了减少部件，节省计算时间，可将刚性圆盘和无质量的等截面弹性轴段组合成一个部件，则组合部件两端面状态向量间的关系为

$$\{Z\}_{i+1} = [T]_i \{Z\}_i$$



$$[T]_i = [B]_i [D] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{l^3}{6EI}(1-\nu)(m\omega^2 - K_j) & 1 + \frac{l^2}{2EI}(J_p - J_d)\omega^2 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI}(1-\nu) \\ \frac{l^2}{2EI}(m\omega^2 - K_j) & 1 + \frac{l}{EI}(J_p - J_d)\omega^2 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ l(m\omega^2 - K_j) & (J_p - J_d)\omega^2 & 1 & l \\ (m\omega^2 - K_j) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如果一个转子有 N 个组合部件，有 $N + 1$ 个截面，各截面状态向量间的关系可写为

$$\begin{aligned} \{Z\}_2 &= [T]_1 \{Z\}_1 \\ \{Z\}_3 &= [T]_2 \{Z\}_2 = [T]_2 [T]_1 \{Z\}_1 \\ &\dots \\ \{Z\}_i &= [T]_{i-1} \{Z\}_{i-1} = [T]_{i-1} [T]_{i-2} \dots [T]_1 \{Z\}_1 = [A]_{i-1} \{Z\}_1 \\ [A]_{i-1} &= [T]_{i-1} [T]_{i-2} \dots [T]_1 \quad i = 1, 2, \dots, N + 1 \end{aligned}$$

④ 上式表达了转子系统各截面状态向量 $\{Z\}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N + 1$) 与起始截面状态向量 $\{Z\}_1$ 间的关系

即各截面状态向量中的元素都可表示为起始截面状态向量中各元素的线性组合

④ 对于汽轮机转子来说，起始截面一般为自由端，该截面的弯矩 $M = 0$ ，切力 $Q = 0$ ，因此对任意截面 i ，状态向量间有如下表达式

$$\{Z\}_i = [A]_{i-1} \{Z\}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{i-1} \begin{Bmatrix} y \\ Q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_1$$

对于末端截面 $N + 1$ 有 $\begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_{N+1} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}_N \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_1$

对于末端截面 $N + 1$ 的边界条件是自由端

$$\begin{cases} M_{N+1} = 0 \\ Q_{N+1} = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{转子系统的频率方程} \\ \text{满足该式条件 } \Delta(\omega^2) = 0 \end{array}$$

则剩余量 $\Delta(\omega^2)$ 为 $\Rightarrow \Delta(\omega^2) = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}$

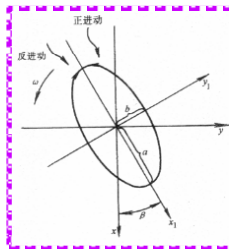
- 在计算转速范围内，初定初始角速度 ω 和适当的增量 $\Delta\omega$ ，用 ω ， $\omega + \Delta\omega$ ，... 作为试算频率
- 通过传递矩阵 $[A]_{i-1}$ 和 $\Delta(\omega^2)$ 的计算可求出各试算频率的剩余量，如果剩余量 $\Delta(\omega^2)$ 等于零，该试算频率就是转子系统的临界转速。
- 根据转子的位移可绘制临界转速的振型曲线

2.3 单转子不平衡计算

转子在不平衡力或力矩的激励下产生的振动称为不平衡响应

- 是一种与转速同频的强迫振动
- 计算转子各个截面在不同转速下响应幅值的大小，通常应对支承处（轴颈和轴承）进行计算
- 计算的目的是求解升速过程中响应峰值的大小和响应峰值的转速

在各向异性支承条件下，转子振动轨迹为一椭圆



为了表征转子某一截面振动幅值随转速的变化关系，经常用振动椭圆的长半轴和转速绘制成幅频曲线

转子不平衡量的大小可按式确定

整锻转子 $\Rightarrow u_i = 1.25 \times 10^{-5} W_i R_i$

焊接转子 $\Rightarrow u_s = 8 \times 10^{-6} M$

u_i \Rightarrow 转子第 i 轴段的不平衡质量矩 (kg · m)

W_i \Rightarrow 转子第 i 轴段质量 (kg)

R_i \Rightarrow 转子第 i 轴段回转半径 (m)

u_s \Rightarrow 转子跨度内的不平衡量 (kg · m) M \Rightarrow 转子跨度内的质量 (kg)

☞ 整锻转子 $\Rightarrow u_i = 1.25 \times 10^{-5} W_i R_i$

④ 按上式确定的不平衡量分别施加在对应的第 i 轴段上，这种方法是**施加不平衡量**

☞ 焊接转子 $\Rightarrow u_s = 8 \times 10^{-6} M$

④ 按上式确定的是集中施加的不平衡量，它与转子的振型有关

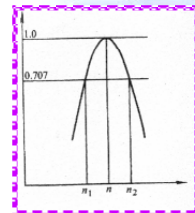
- ☞ 一阶振型，则加在振型最高处的不平衡量是 u_s
- ☞ 二阶振型，则加在振型最高处的不平衡量是 $u_s/2$
- ☞ 转子外伸端，则加在振型最高处的不平衡量是 $2u_s$

④ 在求得转子某轴颈截面的幅频曲线后，在某一转速下，响应有最大值，该转速就是转子系统的阻尼临界转速

④ 对于不同转速的系统，峰值的大小和带宽也不相同，峰值愈高，带宽愈窄，说明转子对不平衡响应愈敏感，否则，对不平衡响应的敏感性较差，转子的稳定性较好

④ 为了评定转子的敏感性，可用峰值响应敏感性系数来表示 (Q 系数)

$$Q = \frac{n}{n_2 - n_1}$$



n \Rightarrow 阻尼临界转速，峰值为1.0

n_2 \Rightarrow 对应于响应峰值为0.707的较高转速

n_1 \Rightarrow 对应于响应峰值为0.707的较低转速

2.4 理论计算结果的评判

④ 不论是单转子或者是轴系的弹性临界转速相对于工作转速的避开裕量应大于 $\pm 10\%$ ，对于大功率多转子的轴系如不能满足上述要求，应进一步考核轴系的不平衡响应

④ 在给定不平衡量和相位的条件下，求得轴系各轴颈的阻尼临界转速相对工作转速也应避开。轴颈最大响应的峰峰值应满足下列要求：

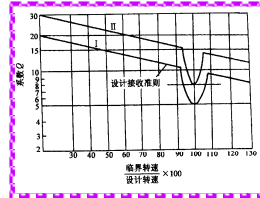
☞ 在 25%~85% 工作转速范围内，轴系不平衡响应峰峰值应小于 0.229mm

在 85%~125% 工作转速范围内，不平衡响应峰峰值应小于 0.076mm

对于某些转子如不能满足上述要求，应进一步考核轴系的稳定性

轴系稳定性考核标准有两个内容，一是峰值响应敏感性系数 (Q 系数)；二是对数衰减率和失稳转速

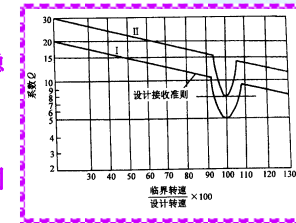
对于单转子的 Q 系数值应符合右图的规定 (轴系的系数一般比单转子小些)



如果单转子的 Q 值位于曲线 I 以下的范围内，则认为转子稳定性是好的

如果位于曲线 I 和 II 之间范围内，也认为转子稳定性良好

如果位于曲线 II 以上的范围内，则认为转子时是较为敏感的，稳定性较差，特别是阻尼临界转速位于工作转速附近的转子应给予适当的改进设计



工作转速时轴系的最小对数衰减率应大于零，同时轴系的最低失稳转速应大于 $1.25 n_0$ (n_0 为工作转速)，由于计算方法的不同和油膜特性计算的非线性，目前国内对上述规定尚无统一的标准

如果轴系的稳定性仍不能满足上述考核标准，在对转子进行改进设计之前，看是否有类似的机组在正常运行

对于轴系的各阶扭振频率都需避开工频和倍频的 $\pm 10\%$ ，当发生二相短路时，最大的剪切应力应小于材料的许用剪切应力

本章参考书籍

中国动力工程学会主编，火力发电设备技术手册（第二卷，汽轮机），北京：机械工业出版社，2007