线性系统理论

主讲人：自动化学院　曹建福

办公室电话：82664629　　E-mail:cjf@xjtu.edu.cn

主页：http://gr.xjtu.edu.cn/web/cjf

绪 论

“线性系统理论”使学生在把握控制学科精髓和本质、具备本学科坚实的基础理论和系统的专业知识等方面起着重要作用。

课程目的：

- 学习和掌握线性多变量系统的分析、设计方法；
- 了解控制学科最新研究成果

一、线性系统理论主要内容

对　象：线性动态系统、多变量系统

复习概念

动态系统、线性系统、非线性系统、系统模型、连续时间系统、离散时间系统

Dynamical Systems

The input-output relationship of a dynamic system is governed by differential equation(s). For example, a mass-spring system can be described by

$$M\ddot{x} + k_1\dot{x}_ + k_2 x = F(t)$$

Linear Systems

A system is called a linear system if it satisfies superposition. Assuming that a linear system is mathematically described by L, then given any inputs u_1, u_2 and any non-zero constants c_1 and c_2,

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1L(u_1) + c_2L(u_2)$$

For example, the system described by $\dot{y} + 2y = u$

Causality

A system is called causal if its output depends only on its past and current inputs, i.e. y(t) depends only on u(τ);τ≤t.

分析理论：

（研究线性系统运动规律）

定性
- a. 稳定性
- b. 能控性
- c. 能观性

定量　解析解或数值求解

综合理论：

（使系统的性能达到希望的性能指标或实现最优化）

a. 性能指标

b. 控制器设计算法

c. 实现中的问题
- 状态变量不完全测量时构造控制器
- 模型不精确对结果的影响
- 参数的不确定性

二、线性系统理论发展过程

学科发展的开端：奈奎斯特（H.Nyquist）在 20 世纪30年代对反馈放大器稳定性的研究。

1、经典线性系统理论

20世纪30年代，奈奎斯特稳定性判据

a. 波特图

b. 根轨迹法

c. 应用具有很大成功

研究对象：单输入单输出系统

数学基础：傅立叶变换和拉普拉斯变换

主要手段：作图与近似计算相结合

经典线性系统理论的局限性：

① 局限于线性定常系统，难以解决时变系统、多输入多输出系统（耦合）。

② 采用输入/输出描述（传函），忽视了系统结构的内在特性

③ 设计方法为试行错误法，无法得到“最好的设计”。

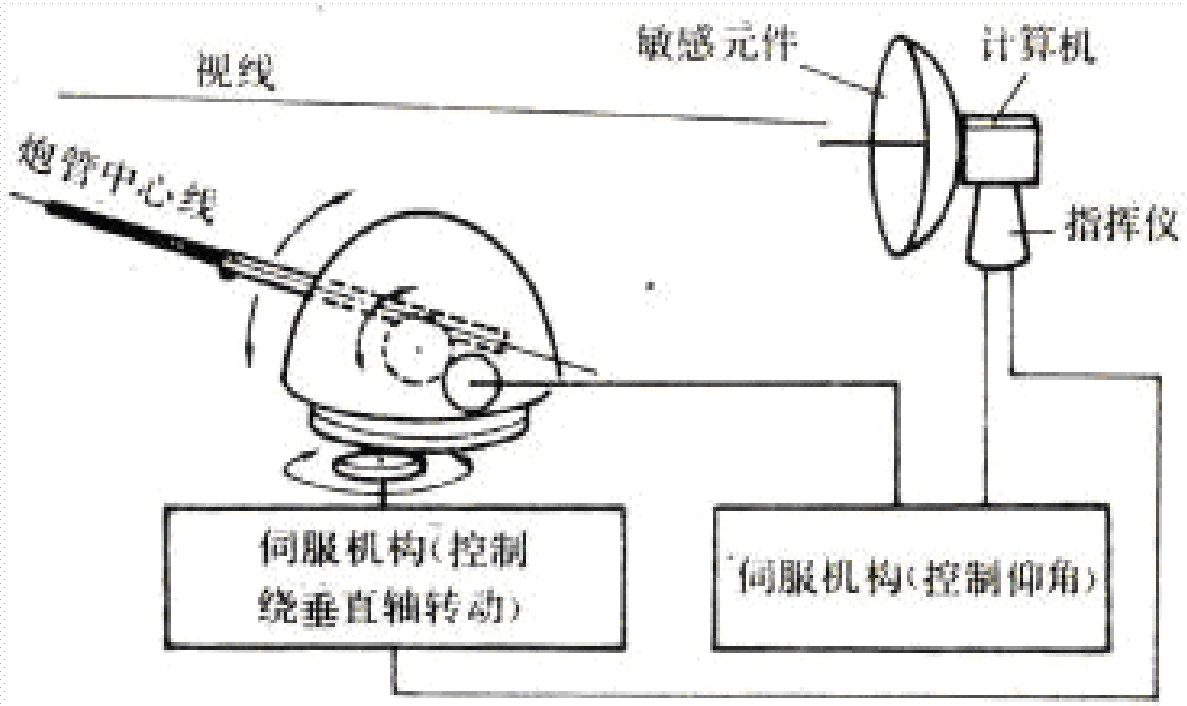

图1 火炮伺服跟踪系统

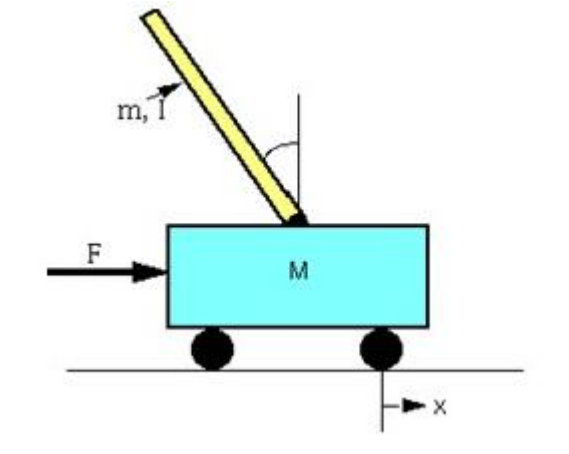

图2 倒立摆系统

2、现代线性系统理论

60年代，卡尔曼

Rudolf Emil Kalman，匈牙利裔美国数学家。1953年于麻省理工学院获得电机工程学士，1957年于哥伦比亚大学获得博士学位。1964年至1971年任职斯坦福大学。1972起任瑞士苏黎世联邦理工学院数学系统理论中心主任。

卡尔曼提出了状态空间描述方法，及现称为卡尔曼滤波的新的滤波方法和能控性、能观性的概念，为20世纪50年代末至60年代初发展起来的现代控制理论作出了杰出贡献。

2、现代线性系统理论

采用状态空间法，内部描述代替外部描述，时域

主要概念能控、能观性

主要成果：**状态空间法，**几何理论，代数理论，频域理论

状态空间法：

状态方程和输出方程

数学基础是线性代数　　时间域方法

分析和综合：矩阵运算和矩阵变换。

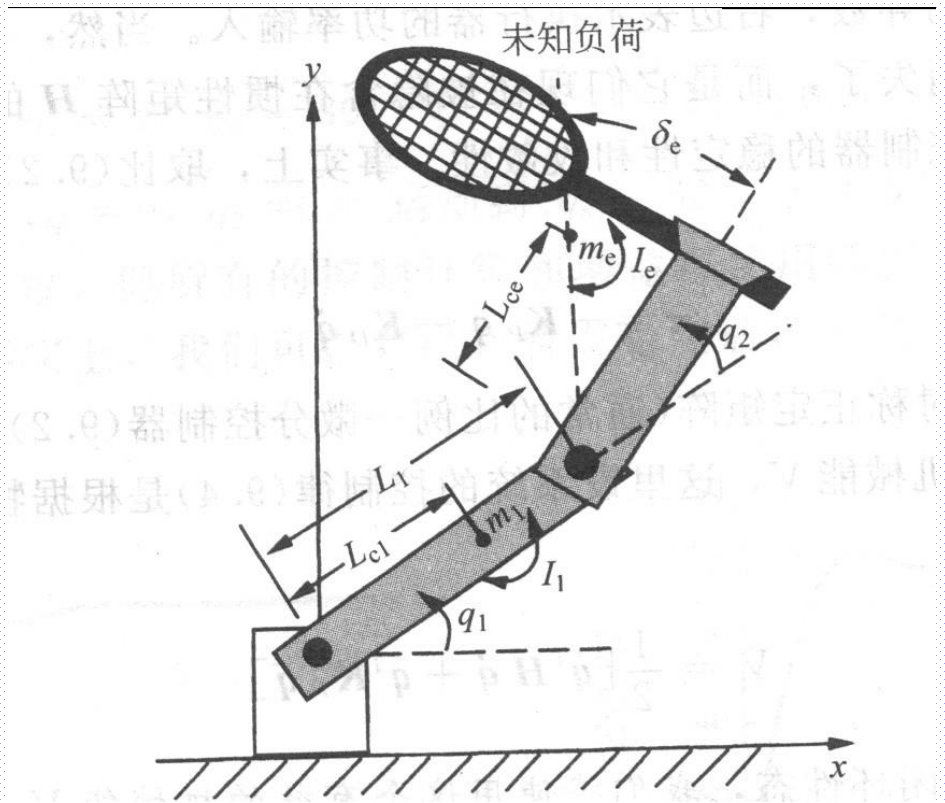

图3 机器人控制系统

$$H(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)=\tau$$

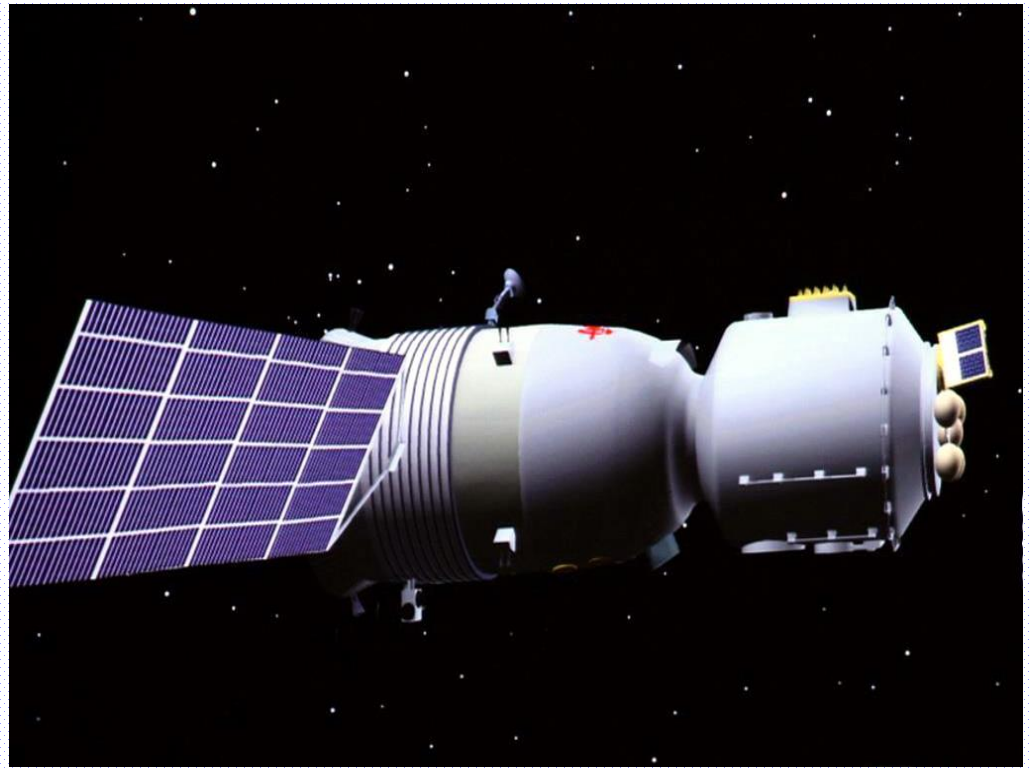

图4 空间飞行器

在不考虑太阳能帆板等挠性附件的影响，空间站的动力学方程为

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = \vec{\mathbf{T}}$$

$$J_x\dot{\omega}_x + J_{xy}\dot{\omega}_y + J_{xz}\dot{\omega}_z - \left(J_y - J_z\right)\omega_y\omega_z - J_{yz}\left(\omega_y^2 - \omega_z^2\right) - J_{xz}\omega_x\omega_y + J_{xy}\omega_x\omega_z = T_x$$

$$J_{xy}\dot{\omega}_x + J_y\dot{\omega}_y + J_{yz}\dot{\omega}_z - \left(J_z - J_x\right)\omega_z\omega_x - J_{xz}\left(\omega_z^2 - \omega_x^2\right) - J_{xy}\omega_y\omega_z + J_{yz}\omega_y\omega_x = T_y$$

$$J_{xz}\dot{\omega}_x + J_{yz}\dot{\omega}_y + J_z\dot{\omega}_z - \left(J_x - J_y\right)\omega_x\omega_y - J_{xy}\left(\omega_x^2 - \omega_y^2\right) - J_{yz}\omega_z\omega_x + J_{xz}\omega_z\omega_y = T_z$$

几何理论

对线性系统的研究化为状态空间中的几何问题。

新概念：（A，B）不变子空间，（A，B）能控子空间。

数学工具：几何形式的线性代数。

优点：简捷明了，不用矩阵运算

代数理论

用抽象代数工具研究线性系统。

把各组变量间关系看作为某些代数结构之间的映射关系。

多变量频域方法

采用频率域的系统描述和频率域的计算方法，来分析和综合线性定常系统。

现代控制理论的其它分支：

最优控制，系统辨识，最优估计，随机控制，非线性系统

线性系统理论是基础，给出现代控制理论框架

大量的概念、方法、原理和结论，成为系统和控制理论的许多学科分支的必不可少的预备知识。

三、本课程主要内容

1、线性系统描述方法

状态空间描述，有关系统描述的主要概念，状态空间模型建立，系统等价，描述之间的转换，线性运动分析

2、线性系统能控能观性

能控能观定义、判据，对偶性原理

3、线性系统稳定性

李雅谱诺夫第二稳定性原理，线性多变量系统稳定性分析方法

4、系统的标准形及实现

规范型，标准分解

5、线性反馈控制系统的综合

- 状态反馈与输出反馈
- 极点配置
- 观测器设置、降维观测器
- 解耦控制，抗干扰跟踪控制器

6、传递函数矩阵的实现理论

7、线性系统的多项式矩阵描述

矩阵分式描述，系统的多项式矩阵描述，能控能观性

8、多变量系统的频域设计

奈氏稳定性，控制系统设计的奈氏阵列法，动态补偿器

四、预备知识

a. 线性代数，常微分方程

b. 经典控制理论

c. 现代控制理论基础

d. MATLAB数值仿真工具

五、课程要求

a. 对重要的概念和结论，既要掌握它的物理意义又要注意其形式化数学描述

b. 为了掌握课堂内容，课后应按时完成作业

c. 考核方式：平时作业+期末考试（闭卷）

课程特点: (1) 理论性强，涉及的公式多，具有深度;

(2) 实践性强，应用的背景多，具有难度

(3) 思想性强，蕴含的方法多

与本科生《现代控制理论基础》课程差别：

从课程内容、深度与本科生课程不同：

（1）内容方面：系统描述的等价与转化，结构分解与标准型，降维观测器，李雅普诺夫函数构造，抗干扰控制，频域设计方法

（2）深度方面：本科生主要讲结论，但对研究生一定交待清楚问题的来龙去脉，训练对问题及算法的严格数学描述，注意研究方法的提炼；

本科生设计的基本基本为单变量系统，本课程题目为多变量线性系统。

（3）实验设计，突出理论能解决实际问题

这门课蕴涵着许多处理复杂问题的方法，如黑箱方法、反馈方法、线性非奇异变换方法、增广向量法、分离原理、对偶原理等。

六、参考文献

a. 线性系统理论，郑大钟，清华大学出版社, 2005年版

b. 线性系统理论与设计（第3版），段广仁，2016年

c. Rugh, W J. Linear System Theory, 2nd ed., Prentice-Hall, 1996