实践：一些简单的CFD技术入门与实例

2 不可压缩Couette流动：由隐式方法得到的数值解

航天航空学院 王 娴

应用实例：不可压缩Couette流动：由隐式方法得到的数值解

讨论：

① 隐式有限差分；

② 抛物型方程；

③ 粘性流动。

不可压缩Couette 流动：

① 精确解由NS方程确定；

② 是最简单的粘性流动；

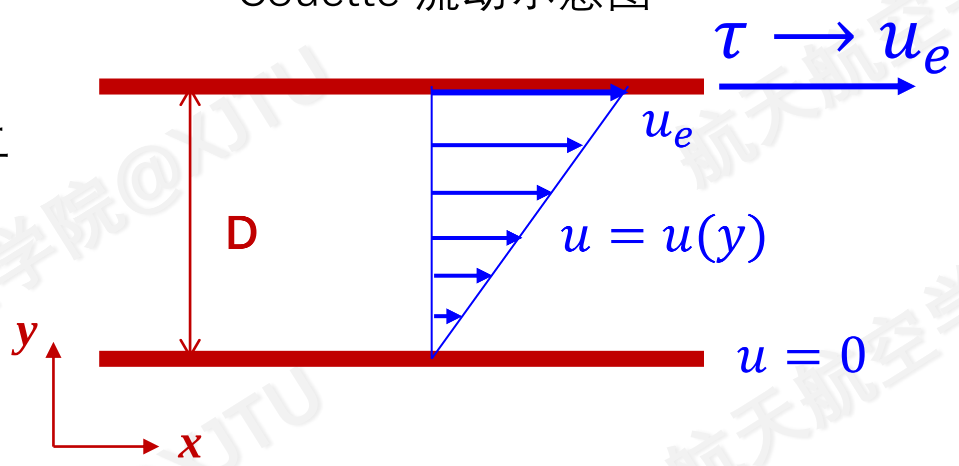
③ 包含相同的比较复杂的边界层物理特性。

抛物型方程本身可以得到推进解，但使用隐式格式可以增大推进步。

（1）物理问题和精确解

- 两平板间流动：上板运动，下板静止
- 流动：剪切力，流体粘性
- 控制方程：不可压N-S方程组

Couette 流动示意图

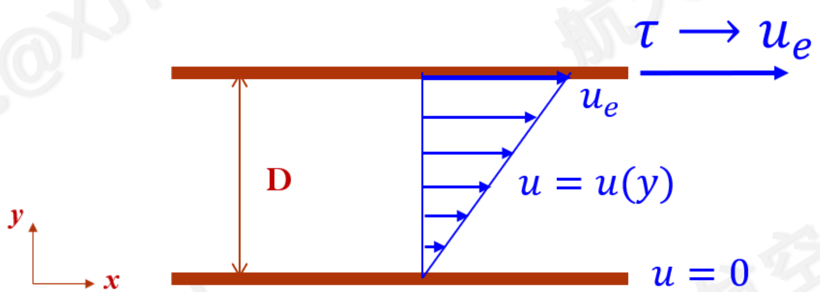


$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

（1）物理问题和精确解



1.1简化控制方程：

流动在x方向无穷远，没有起点和终点 ⇨ 流动参数与x无关

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

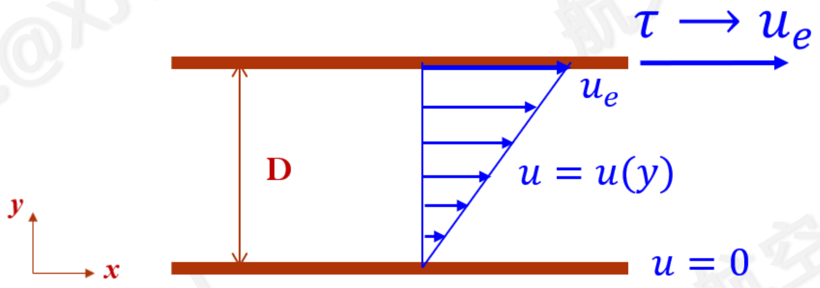
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

即：v在y方向上无变化

壁面处：y=0，v=0 ⇨ $v(y) = 0$

对于库特流动，流场任何点都没有垂直方向上的速度分量，流线是水平的平行线。

（1）物理问题和精确解



1.1简化控制方程：

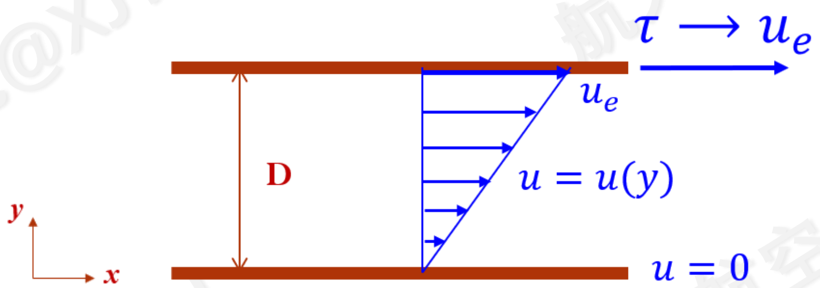
将v=0，带入y方向上的（稳态）动量方程：

$$\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = 0} + \boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = 0}$$

对于库特流动，x、y方向都没有压力梯度

（1）物理问题和精确解



1.1 简化控制方程：

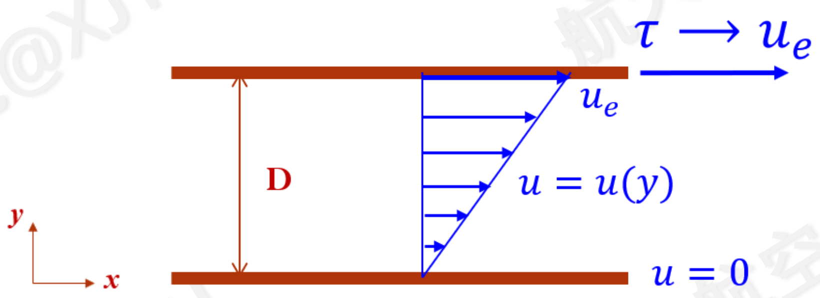
基于 $\frac{\partial}{\partial x} = 0, v = 0$，简化 x方向上的动量方程（最终达到稳态）：

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}} = \cancel{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}} + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

不可压等温库特流动的控制方程

（1）物理问题和精确解



1.2 求解控制方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

对y 积分两次得到： $u = c_1 y + c_2$

积分常数由边界条件得到：

$$y = 0, u = 0$$
$$y = D, u = u_e$$

$$c_1 = \frac{u_e}{D}$$
$$c_2 = 0$$

精确解：

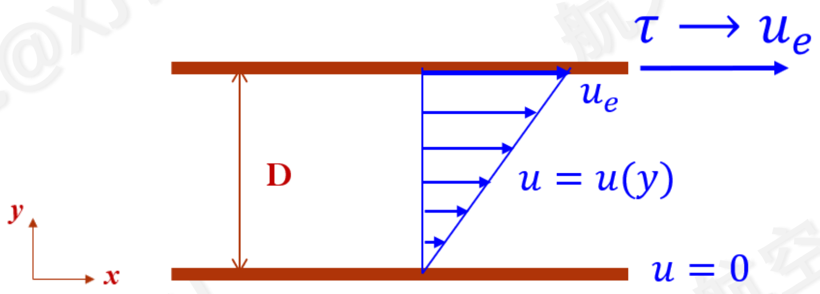
$$u = \frac{u_e}{D} y$$

数值解的对比依据

不可压等温库特流动速度剖面解析解：*u* 随 *y* 线性变化

（2）数值求解

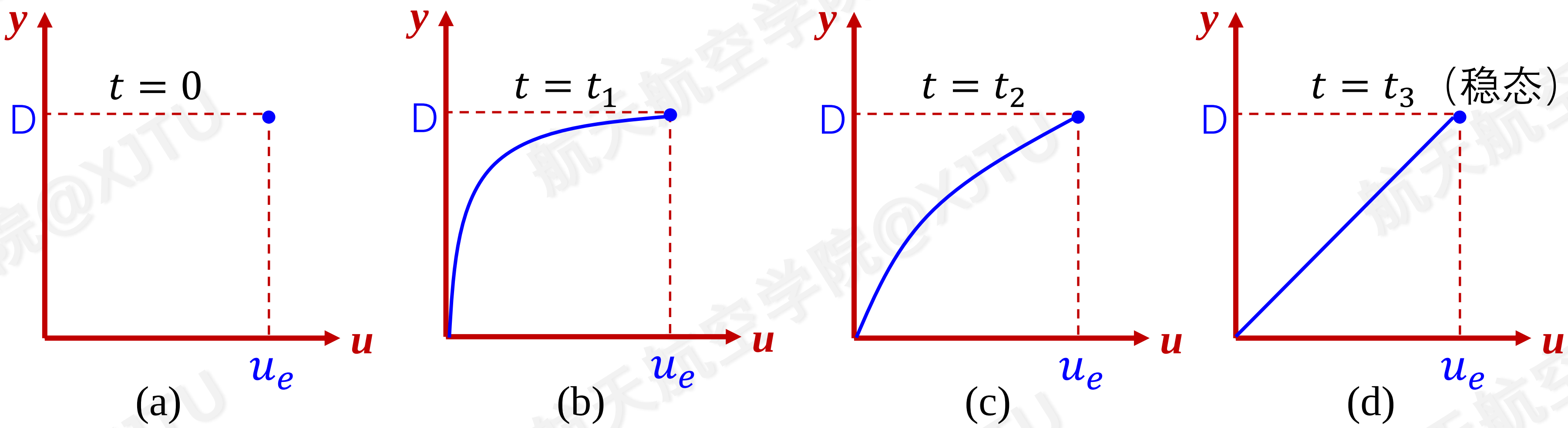
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



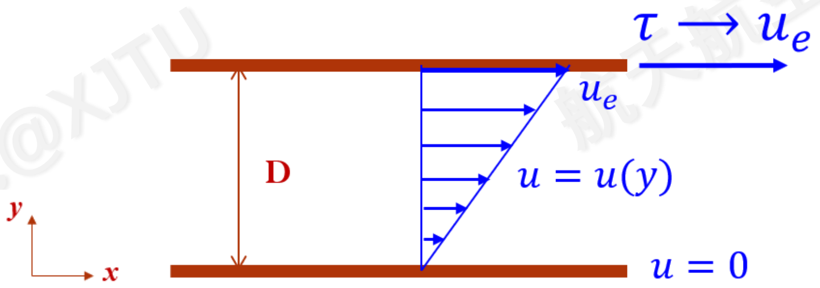
$0 \le y < D$: $u = 0$

$y = D$: $u = u_e$

- **抛物型**偏微分方程，从**初始值**开始，时间推进求解；
- 建立流场的**时间推进**数值解，可以看到速度剖面随时间的变化（a-d）；
- 从**初始**速度分布（a），计算时间足够时，达到**稳态**分布（d）。



（2）数值求解

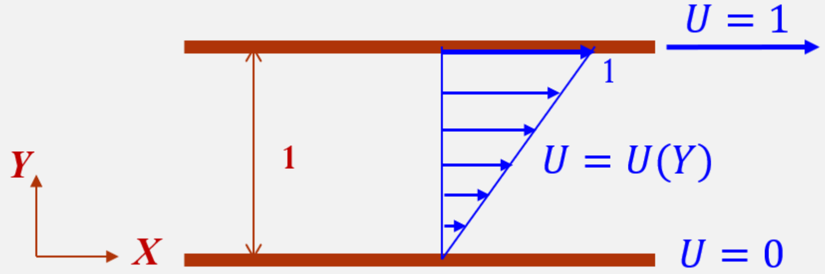


2.1 方程无量纲化：

令 $U = \dfrac{u}{u^*} \quad Y = \dfrac{y}{L^*} \quad \tau = \dfrac{t}{t^*} \qquad u^* = u_e,\ L^* = D,\ t^* = \dfrac{D}{u_e}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial(Uu^*)}{\partial(\tau t^*)} = \nu \frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(YL^*)^2} \Rightarrow \frac{u^*\partial U}{t^*\partial\tau} = \nu \frac{u^*}{L^{*2}}\frac{\partial^2 U}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \qquad Re = \frac{u_e D}{\nu}$$



$Y = 0: U = 0$

$Y = 1: U = 1$

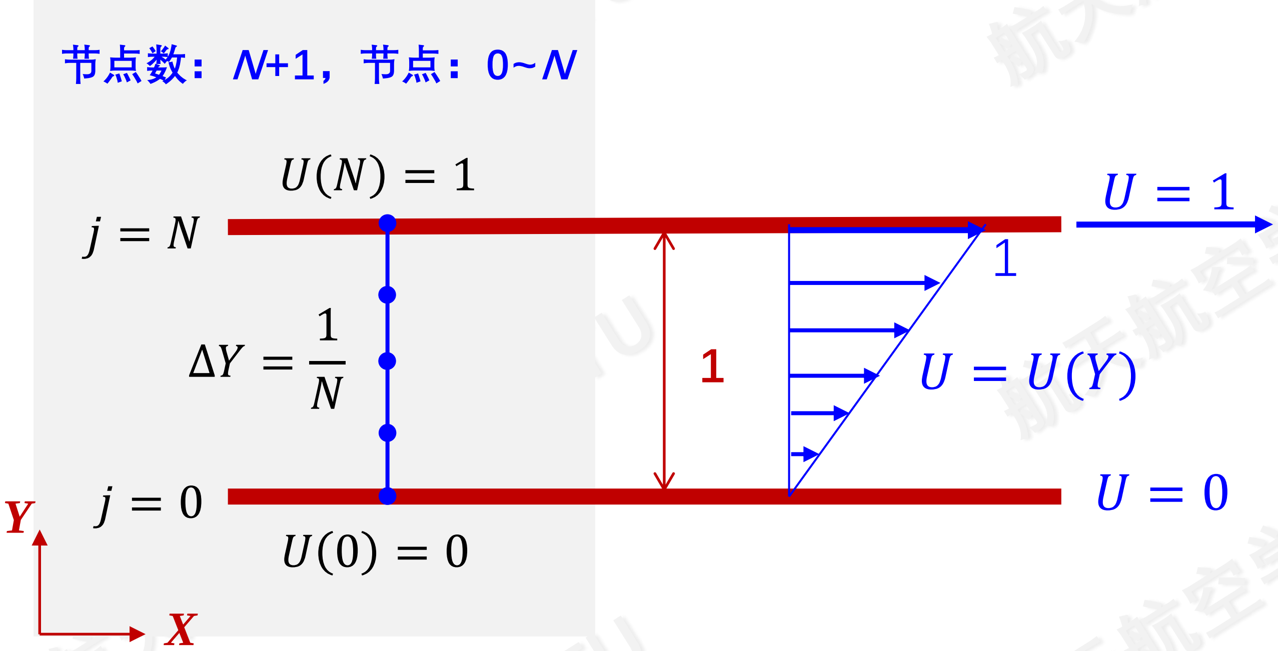
$\tau = 0:\ 0 \le Y < 1: U = 0$

精确解 $U = Y$

(2) 数值求解

2.2 显式格式离散及其结果讨论：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$$



$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta \tau} = \frac{1}{Re}\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{(\Delta Y)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{Re}\Delta \tau}{\Delta Y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n \frac{\Delta \tau}{Re(\Delta Y)^2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)$$

$$\boldsymbol{\Delta \tau \leq \frac{1}{2} Re(\Delta Y)^2 \rightarrow S}$$

（S：时间步长最大取值）

(2) 数值求解

编程求解：

$$n=0: U(j)=0$$
$$j=0: U(j)=0$$
$$j=N: U(j)=1$$

每个时间步长内:

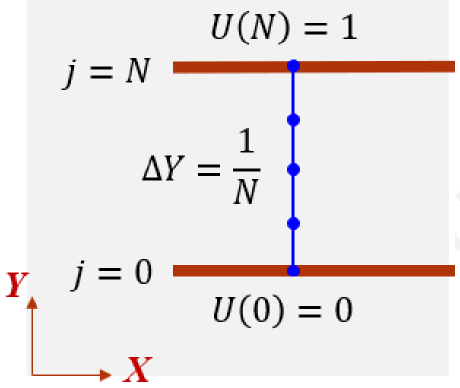
$do\ j=1, N-1$（内节点）

```
for(t=0.0;tt<time_max;t=t+dt)
{
    tt=tt+1;
    eps1=0.0;

    for(j=1;j<N;j++)
    {
      un[j] = u[j] + (dt/(Re*dy*dy)) * ( u[j+1] + u[j-1] -2.0*u[j] );

    }

    for(j=1;j<N;j++)
    {
      u[j]=un[j];

      eps = u[j]-y[j] ;

      if (eps < 0) eps = -eps;

     if (eps > eps1)  eps1 = eps ;     //找最大误差，最大误差小于1E-4，则收敛

    }
```

$\varepsilon=\max[U(j)-Y]<10^{-4}$

精确解： $U=Y$

节点数：N+1，节点：0~N



考察算例：Re =5000，N=20，循环次数（时间步进）：10、20、50、200

$$\Delta Y=\frac{1}{N}$$

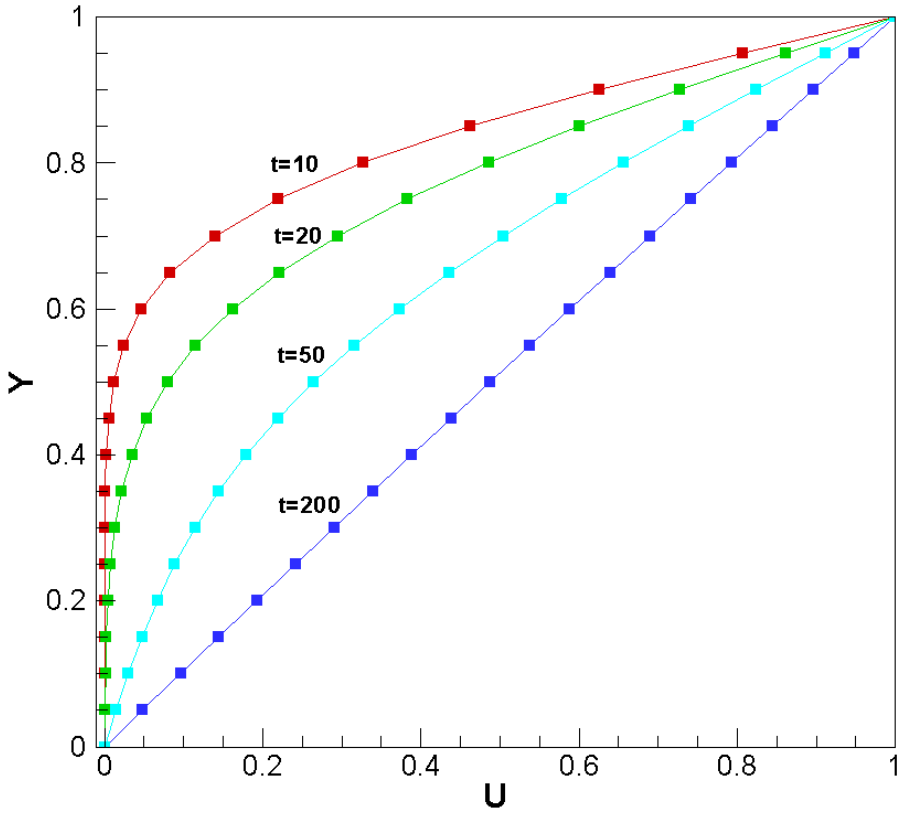
$$\Delta\tau\le\frac{1}{2}Re(\Delta Y)^2$$

$$\boxed{\Delta\tau\le S}$$

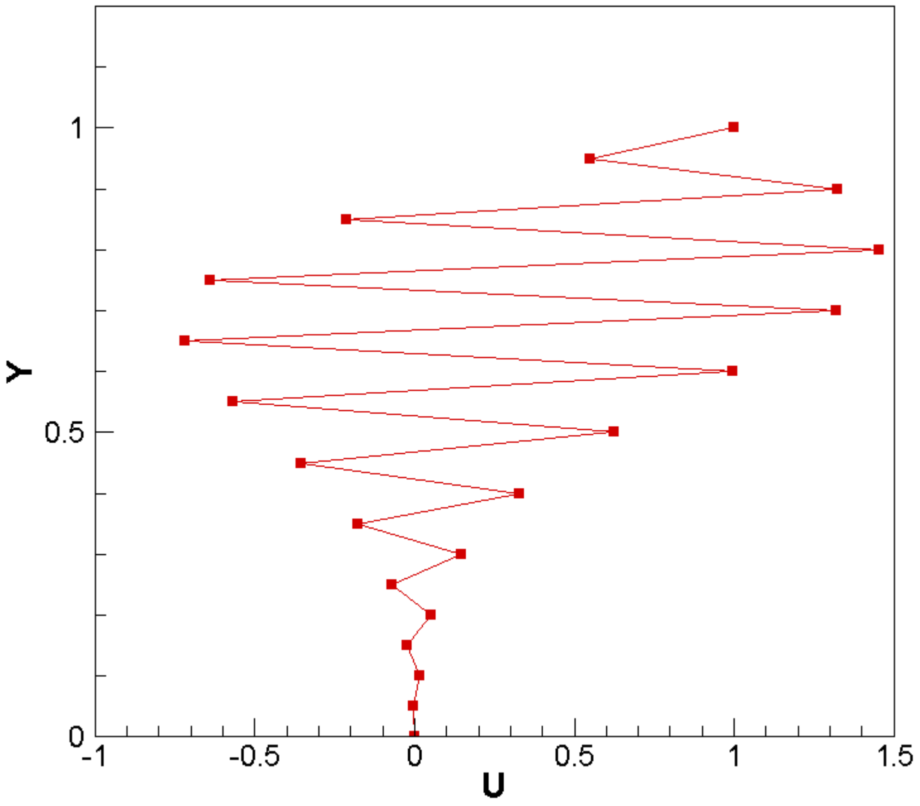
时间步长 $\Delta\tau$	收敛步数 ($\varepsilon<10^{-4}$)
0.1 S	7109
0.5 S	1419
0.9 S	786
1.1 S	发散

(2) 数值求解

结果讨论：



$\Delta\tau=0.9S$



$\Delta\tau=1.1S$

(2) 数值求解

2.2 隐式C-N格式离散及其结果讨论：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 U}{\partial Y}$$

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^{n}}{\Delta\tau}=\frac{1}{Re}\frac{\frac{1}{2}\left(U_{j+1}^{n+1}+U_{j+1}^{n}\right)+\frac{1}{2}\left(-2U_j^{n+1}-2U_j^{n}\right)+\frac{1}{2}\left(U_{j-1}^{n+1}+U_{j-1}^{n}\right)}{(\Delta Y)^2}$$

将未知量写同在一边，将差分方程变形得：

$$\frac{-\Delta\tau}{2(\Delta Y)^2 Re}U_{j-1}^{n+1}+\left[1+\frac{\alpha\Delta\tau}{(\Delta Y)^2 Re}\right]U_j^{n+1}+\frac{-\Delta\tau}{2(\Delta Y)^2 Re}U_{j+1}^{n+1}$$

$$\boxed{=\left[1-\frac{\alpha\Delta\tau}{(\Delta Y)^2 Re}\right]U_j^{n}+\frac{\Delta\tau}{2(\Delta Y)^2 Re}\left(U_{j+1}^{n}+U_{j-1}^{n}\right)}$$

n时层上已知

K_j

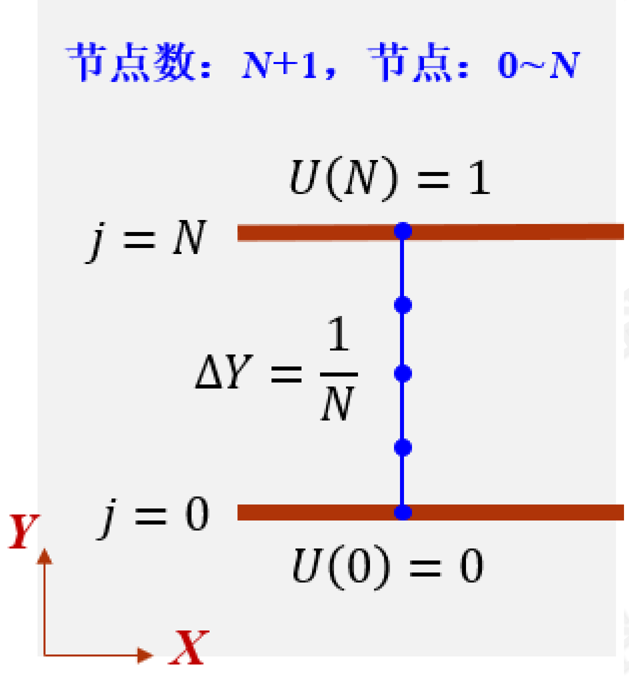
$$A=\frac{-\Delta\tau}{2(\Delta Y)^2 Re}\qquad B=1+\frac{\alpha\Delta\tau}{(\Delta Y)^2 Re}=1-2A\qquad K_j=[1+2A]U_j^{n}-A\left(U_{j+1}^{n}+U_{j-1}^{n}\right)$$

(2) 数值求解

2.2 隐式C-N格式离散及其结果讨论：

$$AU_{j-1}^{n+1}+BU_j^{n+1}+AU_{j+1}^{n+1}=K_j$$

（A、B为常数，均分网格，$j=1,N-1$）



第一个方程（下壁处 j=1）

$$AU_0^{n+1}+BU_1^{n+1}+AU_2^{n+1}=K_1$$

BC: $U_0=0$

$$BU_1^{n+1}+AU_2^{n+1}=K_1$$

最后一个方程（上壁处 j=N-1）

$$AU_{N-2}^{n+1}+BU_{N-1}^{n+1}+AU_N^{n+1}=K_{N-1}$$

BC: $U_N=1$

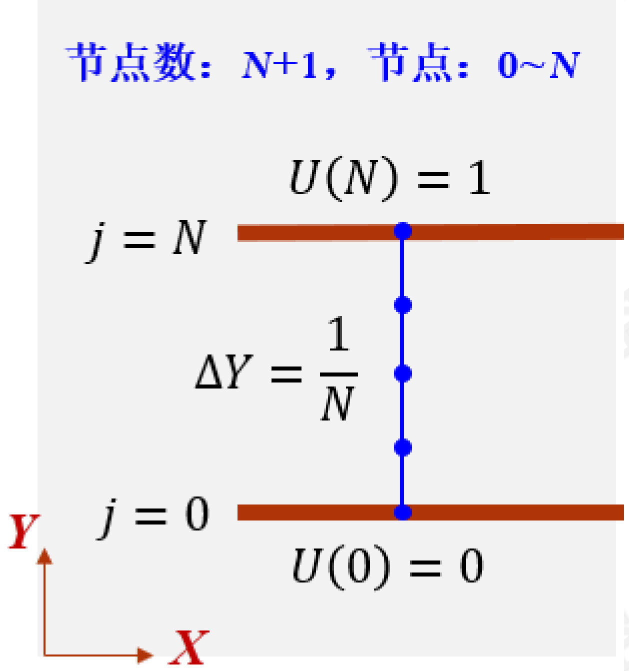
$$AU_{N-2}^{n+1}+BU_{N-1}^{n+1}=K_{N-1}-A$$

(2) 数值求解

2.2 隐式C-N格式离散及其结果讨论：

$$AU_{j-1}^{n+1}+BT_{j}^{n+1}+AT_{j+1}^{n+1}=K_j$$

（A、B为常数，均分网格）



编程求解：

$$\begin{bmatrix} B & A & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ A & B & A & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & B & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & B & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & A & B & A \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N-2}^{n+1} \\ U_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_{N-2} \\ K_{N-1}-A \end{bmatrix}$$

(2) 数值求解

编程求解：

$$n = 0: U(j) = 0$$

$$j = 0: U(j) = 0$$

$$j = N: U(j) = 1$$

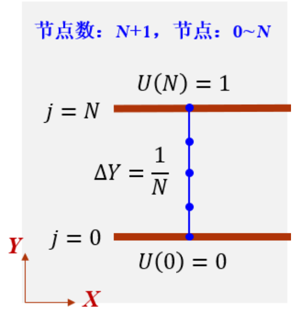
每个时间步长内:

$do\ j = 1, N-1$（内节点）

解得:

$$[\, U_1^{n+1}, U_2^{n+1}, U_3^{n+1}, \cdots, U_{N-2}^{n+1}, U_{N-1}^{n+1}]$$

重复以上过程若干个时间步，直到数值解收敛到稳态。

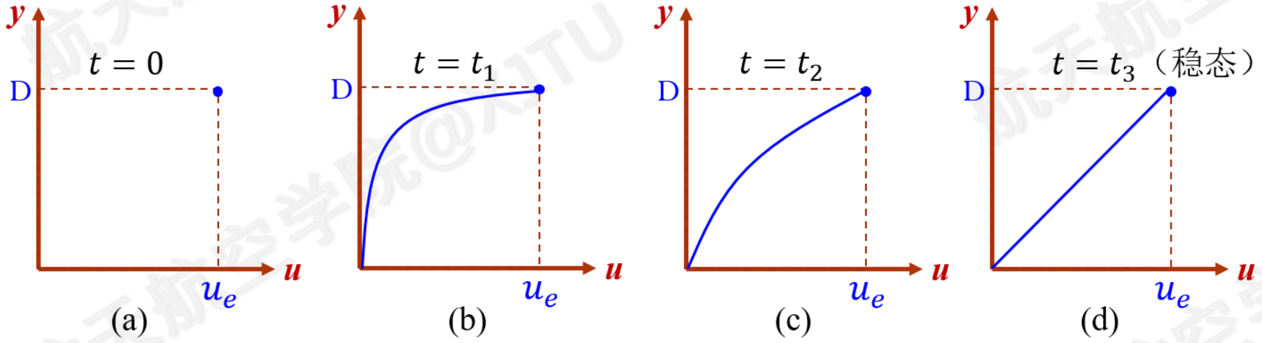



```
A=-dt/(2.0*dy*dy*Re);
B=1.0-2.0*A;
B1[1]=B;

eps = 0.0;
eps1= 0.0;
tt=0;
        for(t=0.0;tt<time_max;t=t+dt)
        {
         tt=tt+1;
             eps1=0.0;

             for(j=1;j<N;j++)
             {
               K[j] = ( 1.0 + 2.0*A ) * u[j] - A * ( u[j+1] + u[j-1] );
             }
               K[N-1] = K[N-1]-A;


          K1[1] = K[1];
      for(j=2;j<N;j++)
             {
               B1[j] = B - A*A/B1[j-1];
               K1[j] = K[j] - K1[j-1]*A/B1[j-1];
             }


          un[N-1] = K1[N-1]/B1[N-1];
          for(j=N-2;j>0;j--)
          {
          un[j] = ( K1[j] - A * un[j+1] ) / B1[j] ;
          }

             for(j=1;j<N;j++)
         {
               u[j]=un[j];

               eps = u[j]-y[j] ;

               if (eps < 0) eps = -eps;

if (eps > eps1)  eps1 = eps ;     //找最大误差，最大误差小于1E-4，则收敛
             }

   if (eps1 < 0.0001) time_max = tt;

        }
```

$$\varepsilon = \max[U(j) - Y] < 10^{-4}$$

精确解： $U = Y$

(2) 数值求解



问题讨论：

- **时间步长如何确定？**

C-N格式：无条件稳定。（i）从稳定性考虑，可以选择任何大小的时间步长$\Delta\tau$；（ii）想得到初始值之后某一过渡时刻的值，需要足够小的$\Delta\tau$，以减少截断误差；（iii）如果仅关心定常后的解，随时间变化的误差不用特别在意。

显式：$\Delta\tau \le \frac{1}{2}Re(\Delta Y)^2 \to S$

（S：时间步长最大取值）

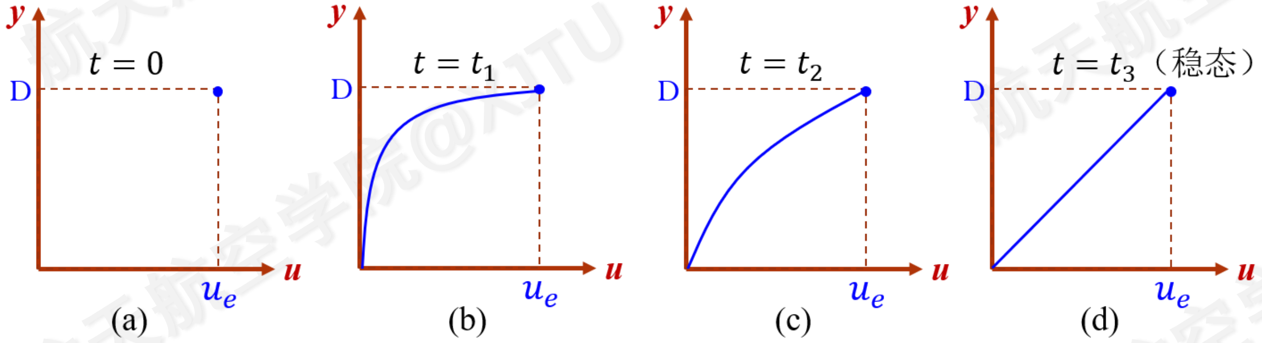
C-N隐式：$\Delta\tau = ERe(\Delta Y)^2 = 2ES$

显式中：

取 2E=0.9（E=0.45），即$\Delta\tau$=0.9S，收敛

取 2E=1.1（E=0.55），即$\Delta\tau$=1.1S，发散

(2) 数值求解



问题讨论：

- **同一时间步长下，比较显式与隐式的计算时间**

Re=5000，$\varepsilon=\max[U(j)-Y]<10^{-4}$

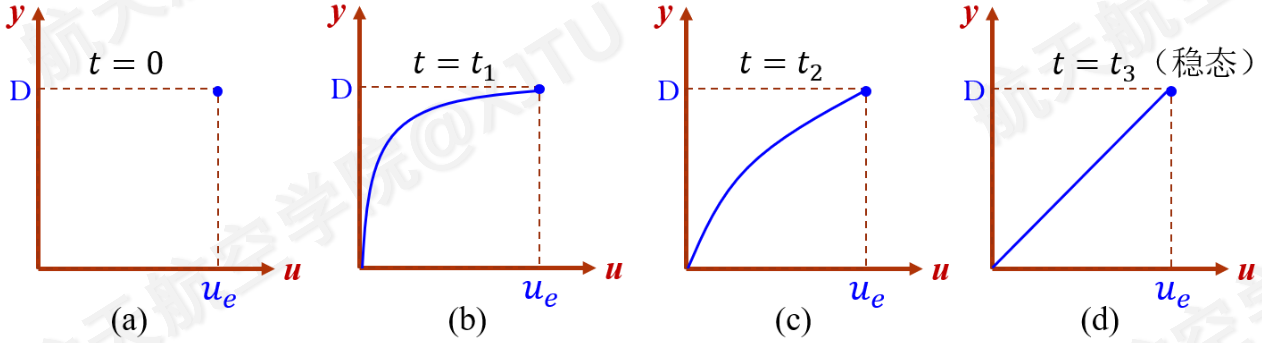
取 2E=0.9（E=0.45）：即$\Delta\tau$=0.9S，编程计算可得：

显式计算：786 $\Delta\tau$，$\varepsilon<10^{-4}$

C-N隐式计算：791 $\Delta\tau$，$\varepsilon<10^{-4}$

➢ 虽然推进步数相当，但隐式要求解矩阵，每一个时间步长内计算时间长，导致其总计算时间远大于显式求解。

(2) 数值求解



问题讨论：

- **C-N格式无条件稳定，增加$\Delta\tau$，是否会给解带来影响？**

显式：E>0.5，发散。考察：C-N隐式，E=1~4000的结果

验证中间过程（未达稳态时，τ=2500）： $\boldsymbol{\Delta\tau = ERe(\Delta Y)^2 = 2ES}$

$\boldsymbol{E=1}$: $\Delta\tau_1 = 1\times 5000\times(\frac{1}{20})^2 = 12.5$， 需要 **200 $\Delta\tau$** 达到 τ=2500；

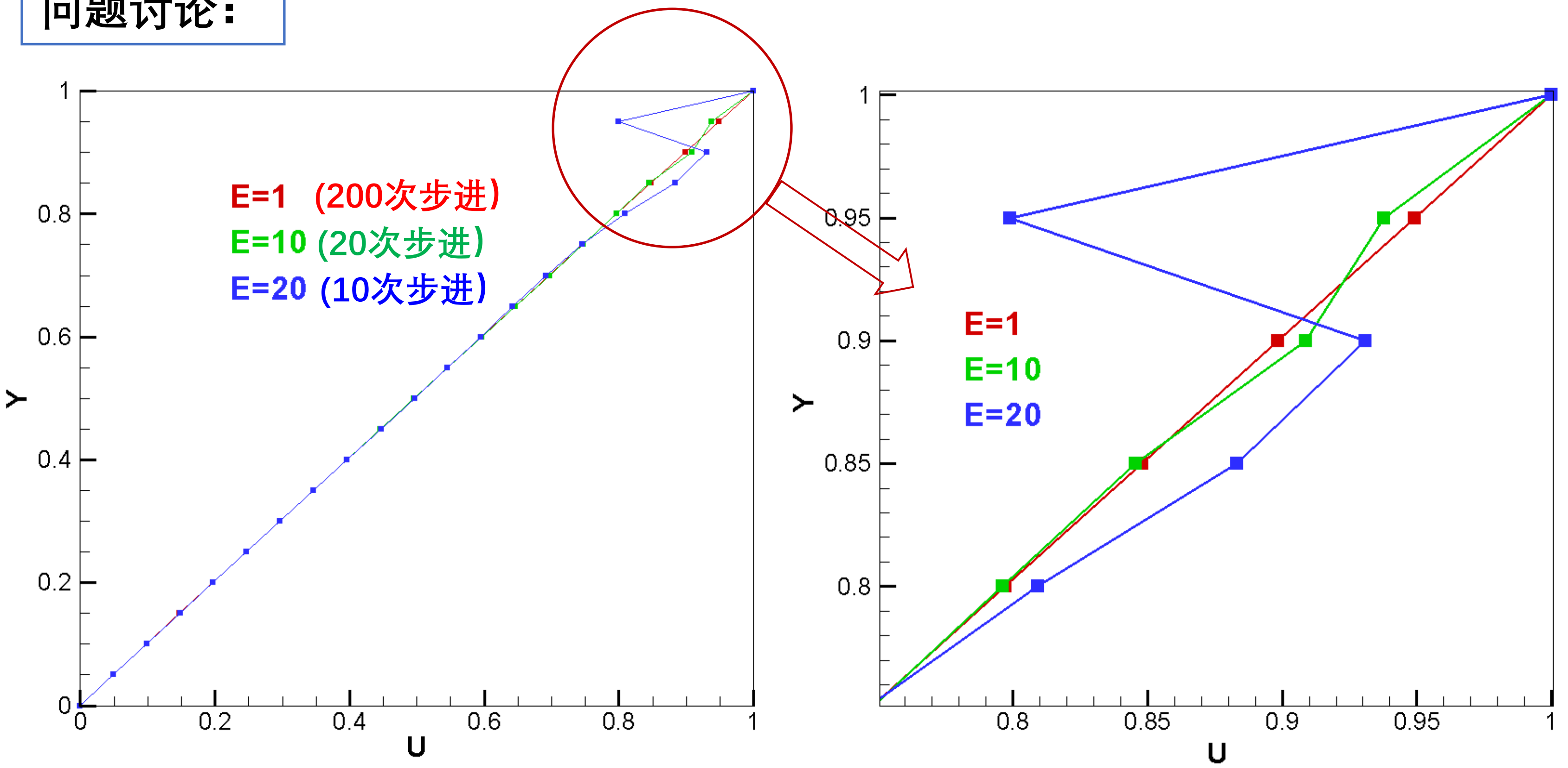
$\boldsymbol{E=10}$: $\Delta\tau_2 = 10\times 5000\times(\frac{1}{20})^2 = 125$， 需要 **20 $\Delta\tau$** 达到 τ=2500；

$\boldsymbol{E=20}$: $\Delta\tau_3 = 20\times 5000\times(\frac{1}{20})^2 = 250$， 需要 **10 $\Delta\tau$** 达到 τ=2500.

E越大，即时间步长越大，则达到某一状态的所需的计算时间越短。

(2) 数值求解

问题讨论：



E增大，即时间步长增大，会引起明显的过渡解误差。

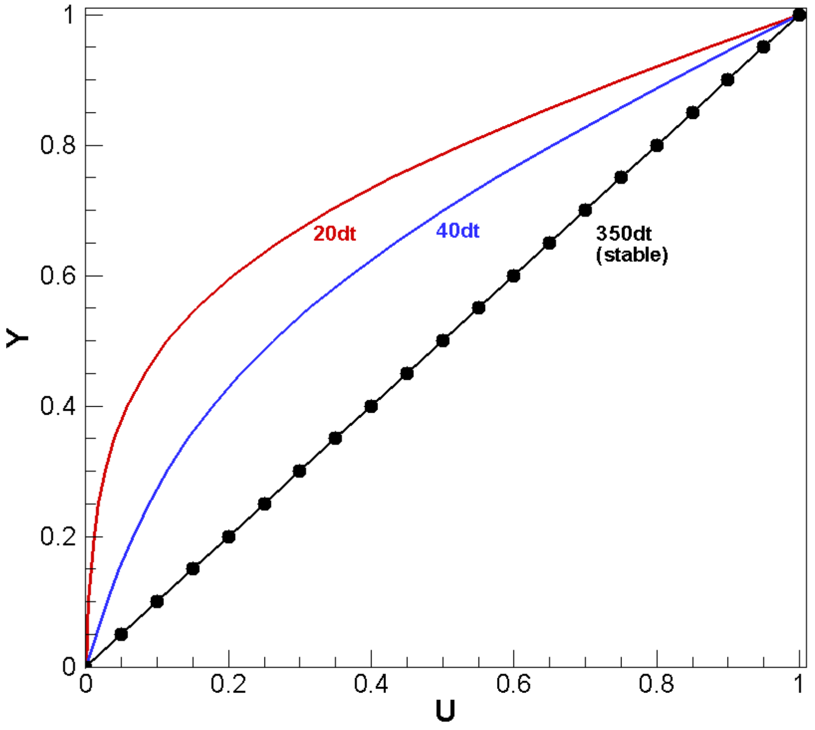
即在同一时刻（未达稳态时），时间步长大，过渡解误差大。

(2) 数值求解

问题讨论：

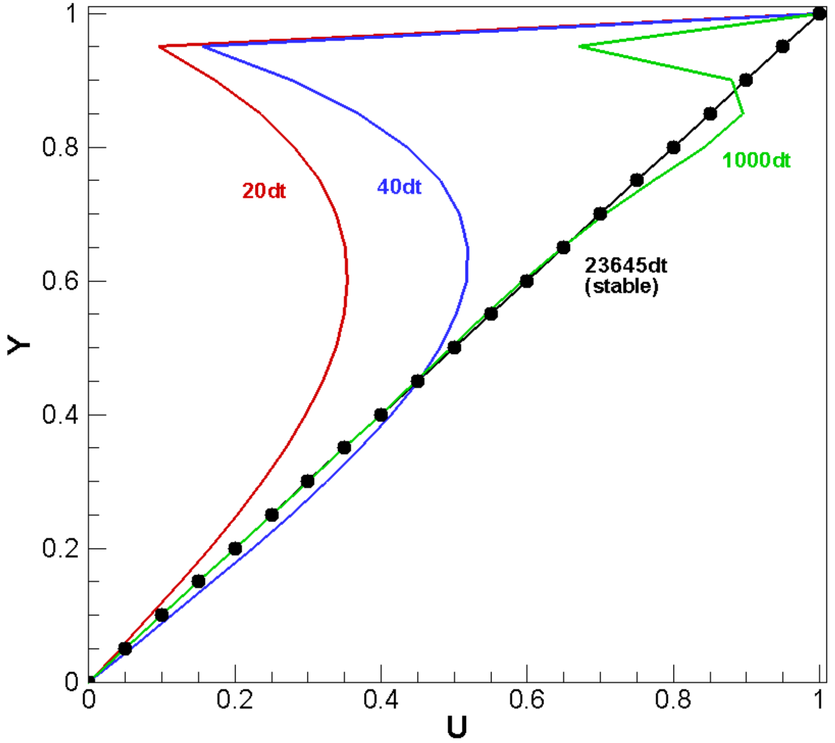
隐式：极端情况比较

E=1



（收敛：350步）

E=4000



（收敛：23645步）

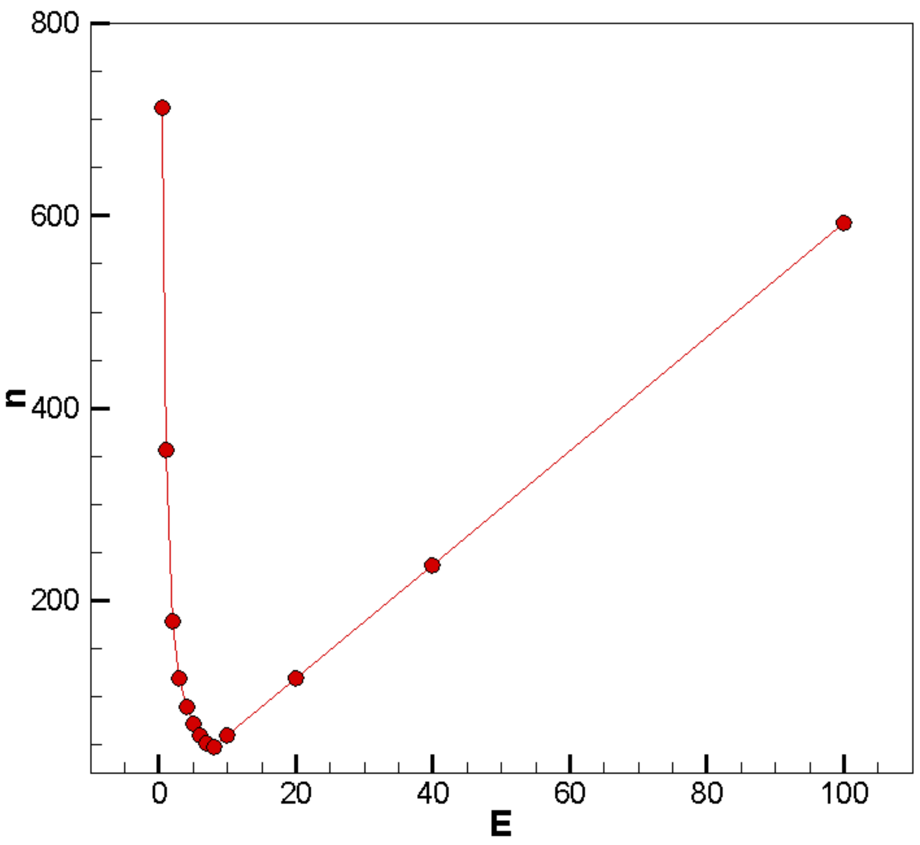
(2) 数值求解

问题讨论：

- **随着时间步长的增加，达到稳态解得时间推进步数？** $\varepsilon < 10^{-4}$

E(Δt)	n
（n：达到稳态解的推进步数）	
0.5 *	712
1	356
2	178
3	119
4	89
5	72
6	60
7	51
8	48
10	60
20	119
40	237
100	592
1000	5912
4000	23645

* E=0.5 显式最大时间步长



存在时间步长E的最佳取值，使得达到稳态解的推进步数最小。

(3) 结 论

- 显式：简单，但是有稳定性条件限制。时间步长小，计算时间长。
- 隐式：无条件稳定，可以取较大的时间步长，但：
  - ➢ Δt 很大时，由于截断误差随Δt 的增大而增大，瞬时精度无法达到。求解稳态问题时， Δt 较大的隐式格式方法是不适合的。但若不关心达到稳态如何变化，可采用；
  - ➢ 当使用隐式格式和较小的Δt 时，隐式格式丧失了其魅力；
  - ➢ 通过简单增大Δt，使达到稳态所需要的总时间步有所减小，这和隐式格式的优点相符合。但当Δt 增加到足够大时，这种趋势正好相反。继续增加Δt ，达到稳态的总时间步反而增加。即存在Δt 的最优取值。