

伊辛模型的研究进展简介

张志东

教授,中国科学院金属研究所,中国科学院国际材料物理中心,沈阳材料科学国家(联合)实验室,沈阳 110016

关键词 伊辛模型 精确解 三维 临界现象 猜想

本文首先简单地介绍了伊辛(Ising)模型及其应用的范围、二维伊辛模型精确解的求解过程、三维伊辛模型精确解所面临的困难。然后回顾并总结了人们用分子场理论及其改进理论、高温级数展开、低温级数展开、重整化群理论、蒙特·卡罗模拟等近似计算三维伊辛模型的物理性质和临界指数的研究进展。最后,介绍了我们对三维简单正交晶格伊辛模型的猜想以及推定的精确解。

1 伊辛模型简介

伊辛(Ising)模型是一个最简单且可以提供非常丰富的物理内容的模型^[1],它可以被用来帮助我们发现物理世界的原则。它不仅可以用来描述晶体的磁性,还可以用来描述非常广泛的现象,如合金中的有序-无序转变、液氮到超流态的转变、液体的冻结和蒸发、晶格气体、玻璃物质的性质、森林火灾、城市交通、蛋白质分子进入它们的活性形式的折叠等。科学家对伊辛模型的广泛兴趣还源于它是描述相互作用的粒子(或自旋)最简单的模型。它可以用来测试研究相互作用的粒子在多体系统(特别是理解在临界点及其附近的合作现象和临界行为)任何近似方法的理想工具。进一步说,三维伊辛模型可以研究从无限大温度到绝对零度相互作用的粒子(或自旋)系统的演变过程,如果将热力学中的温度做为动力学中时间来考量,它不仅可以理解热力学平衡的无限系统如一个磁铁,还可以帮助理解我们的宇宙。另外,平衡相变的理论可以用来研究连续的量子相变、基本粒子的超弦理论、在动力学系统到混沌的转变、系统偏离平衡的长时间行为和动力学临界行为等。由于伊辛模型中的粒子(或自旋)具有两种可能的状态(自旋向上或向下),它实际上可以对应黑白、上下、左右、前后、对错、是非、满空、正负、阴阳……所以,原则上伊辛模型可以描述所有具有两种可能的状态的多体系统,描述两种极端条件间的相互竞争。

伊辛模型是一个非常简单的模型^[1],在一维、二维或三维的每个格点上占据一个自旋。自旋是电子的一个内禀的性质,每个自旋在空间有两个量子化的方向,即其指向可以向上或向下。尽管伊辛模型是一个最简

单的物理模型,目前仅有一维和二维的精确解。现在考虑一维伊辛模型, M 个自旋排成一排,每个自旋与其左右两个最近邻的自旋手拉手。手拉手表示它们之间有相互作用。简单起见,我们仅考虑倾向于使近邻自旋的方向一致的相互作用。二维正方伊辛模型就是有 N 个相同的自旋排,每个自旋不但与其左右两个最近邻的自旋手拉手,而且与前后相邻的自旋排中的两个最近邻的自旋手拉手,构成了一个二维的自旋阵列。三维立方伊辛模型就是有 L 个相同的二维自旋阵列,每个自旋与其左右、前后、上下六个最近邻的自旋手拉手。可以看出,随着维度的增加,每个自旋的最近邻自旋数增加,与周围自旋的相互作用也在增强。

由于相互作用倾向于使近邻自旋的方向一致,所以在绝对零度时,系统的基态是铁磁态,所有自旋的取向完全一致。有两个可能,都是向上或都是向下。一旦选定了向上,就大家一起向上,非常有序。如升高温度 T ,温度将要对这种有序的状态进行扰动,某一个自旋可能会挣脱其他自旋对它的相互作用的束缚,而变成向下。这个调皮的自旋可能又会影响到其他自旋的取向,从而引入了无序的成分。我们面临的问题就是,在什么温度下,系统从有序态变成无序态。这个温度就是我们关心的相变的临界温度。在统计物理中有一套标准的程序^[2],从系统的哈密顿量 H 出发,写出其配分函数。配分函数就是对系统的所有可能不同状态根据哈密顿量 H 写下波尔兹曼权重的指数函数 $\exp(-H/k_B T)$,并对所有的可能状态的值求和。一个状态在温度 T 下出现的可能性正比于该状态的指数函数 $\exp(-H/k_B T)$ 除以配分函数。其中需要对写下所有可能状态的波尔兹曼权重的矩阵对角化求能量本征值。对大型复杂矩阵的对角化是一个难点。然后事情就变得非常简单,根据

热力学统计物理的标准手续从配分函数就立即得到系统的自由能,对自由能进行微分立即得到磁化强度、比热、磁化率等物理性质。所以,问题的关键在于求出系统的配分函数。而写出系统的所有可能不同状态又成为一个难点。

如果一个自旋的取向有两种可能,那么两个自旋的取向有四种可能,三个自旋的取向有八种可能,四个自旋的取向有16种可能,以此类推, M 个自旋的取向有 2^M 种可能。一维伊辛模型 M 个自旋排成一排,在热力学极限下,自旋数 M 趋于无限大。数数是不可能的,即使目前功能最强大的计算机对精确求解一维问题都无能为力,更不要说精确求解二维和三维问题了。对于一维伊辛模型可以将配分函数根据系统的状态写成矩阵形式,每两个最近邻的自旋状态的组合构成 2×2 的矩阵,配分函数是 M 个 2×2 的矩阵相乘后对系统的所有可能不同状态的求和。求解这个问题的关键是引入了一个周期性边界条件,将一维伊辛模型 M 个自旋的首尾相连,从而将问题简化为对 2×2 矩阵求能量本征值后,系统的能量本征值是 2×2 矩阵的能量本征值的 M 次方。这种周期性边界条件的引入对在热力学极限下自旋数 M 趋于无限大的情况没有任何的影响,类似于固体物理学中能带理论的玻恩-冯卡门周期性边界条件。所以,我们可以非常容易地获得一维伊辛模型的精确解,根据1925年伊辛发表的结果^[1],在一维伊辛模型中不存在有限温度的相变温度。也就是说,系统仅在绝对零度时为有序态,一点点温度就可以使系统变成无序态。这主要是由于一维伊辛模型中自旋之间的相互作用非常脆弱,而且系统的不同状态的能量差非常小。当然,精确求解二维或三维模型已超出了伊辛的能力范围,他简单地推断在二维和三维也不存在相变。

2 二维伊辛模型研究进展回顾

大家对伊辛模型感兴趣的主要原因就是它能很好地显示连续相变过程,特别是在相变的临界温度附近的临界现象^[2-4]。对临界现象的研究可以追溯到1869年安住斯(Andrews)引入临界点的概念,1873年范德瓦尔斯(van der Waals)用分子动力学理论讨论了气液两相转变和临界点的问题。1895年居里(Curie)研究了铁磁体的铁磁-顺磁相变,并指出铁磁-顺磁相变与气-液相变的相似性,所以相变的临界点也称为居里点。1907年外斯(Weiss)提出了铁磁-顺磁相变的分子场理论,也称为平均场理论。铁磁-顺磁相变的平均场理论与范德瓦尔斯的气-液相变理论又是相对应的。现在可以证明平均

场理论是四维及四维以上空间伊辛模型的精确解。平均场理论的精神就是将一个自旋周围的所有自旋对它的作用平均成一个有效磁场。在最紧邻伊辛模型中仅考虑最紧邻自旋之间的相互作用,但由于所有的自旋均与其最紧邻手拉手,某个自旋的指向不仅受到其最紧邻自旋的影响,由于自旋的关联作用还受到其他所有自旋(甚至无限远处的自旋)的影响。平均场理论实际上忽略了自旋的关联作用的细节之处,所以仅能在四维及四维以上空间精确。这是由于四维及更高维空间的关联非常之强大,使其效应可以用一个平均的有效磁场来描述。但对于低维空间,平均场理论仅给出近似的定性结果,可以说是一个零级近似。

为了获得更多的信息,一些科学家试图对平均场理论进行改进。在20世纪30年代布喇格、威廉斯、肖克莱(Shockley)等人在研究合金中的有序-无序转变时将伊辛模型的研究向前推进^[5,6],并引起更多的关注。如布喇格-威廉斯近似忽略了自旋间的短程关联;Bethe近似对布喇格-威廉斯(Bragg-Williams)近似进行改进,考虑了短程序;……但这些改进属于小打小敲的修修补补,没有逃脱掉平均场理论影子。而且,也无法进一步按其路线再发展下去。突破还要求出伊辛模型的精确解,才能获得精确的物理信息。1941年Kramers和Wannier以及Montroll分别利用二维伊辛模型的对偶性精确地确定了正方伊辛模型的居里点为 $x_c = e^{-2K}$ 。 $=\sqrt{2}-1$,即白银解^[7-9]。这为一个重要人物在伊辛模型的舞台的登场提供了一个坚实的台阶。1944年耶鲁大学化学系昂萨格(Onsager)教授用代数法求出了二维长方伊辛模型配分函数和比热的精确解^[10]。昂萨格是一位数学家,在化学系任职,做的大部分工作是与物理有关的问题,最后得到了诺贝尔化学奖。昂萨格的工作第一次清楚地证明从一个没有奇异性的系统哈密顿量出发,在热力学极限下能导致热力学函数在临界点附近的奇异行为,它向以前的所有相变理论提出了严重的批评;在临界点,比热不是不连续,而是对数发散。昂萨格的工作在量子统计物理领域具有重要的意义。但是,昂萨格用的代数法非常繁杂,让人很难理解和接受。后来,昂萨格带的一个女学生考夫曼(Kaufman)发展出一个更为简便优雅的方法^[11]。Kaufman文章中的推导过程可以让人容易地理解,所以极大地推动了相关工作的进展。当然,Kaufman的求解过程还是较复杂的。简单地说,与能带理论可以在三维方向引入玻恩-冯卡门周期性边界条件不同,求解伊辛模型时仅能引入一次周期性边界条件。这是由于能带理论将问题简化为一个电子在晶体的三维周期势上的运动,而伊辛模型是许多自

旋之间的相互作用问题,是一个多体问题。所以,在求解二维伊辛模型就比一维复杂多了。一维可以将问题简化为对 2×2 矩阵求能量本征值。二维伊辛模型就要面对两个 $2^N \times 2^N$ 矩阵相乘后求能量本征值问题。首先将两个 $2^N \times 2^N$ 矩阵用泡利自旋矩阵表示,写成泡利自旋矩阵直乘及其乘积的线性组合,构成这两个矩阵的自旋表象;然后,通过两个引理证明自旋表象矩阵的本征值对应于相应的 $2N \times 2N$ 转动矩阵的本征值;从转动矩阵具有特殊的形式,可以列出容易求解的本征值方程,求出本征值;返回去求出系统的能量本征值^[11]。从这以后,二维伊辛模型的求解变得简单了。许多科学家纷纷加入,找到了许多更简单的方法,甚至有人发表了题目为“伊辛模型的第 399 种求解方法”。也求解出其他类型的二维伊辛模型,如三角、蜂窝、Kagomé 等模型及其变种^[12-14]。但是,具有次紧邻相互作用的二维伊辛模型和磁场下的伊辛模型至今没有精确解。

昂萨格的文章仅给出二维伊辛模型的本征值、配分函数、自由能、比热等的精确解^[10]。自发磁化强度的求解需要加上磁场,而磁场下的伊辛模型至今没有精确解。但这不影响昂萨格在 20 世纪 40 年代末的两次国际会议别人的报告的讨论中,在黑板上写下自发磁化强度的精确解的公式。当时的国际会议文集不但发表学术报告的正文,还发表报告后的讨论内容,所以有相关的记录。但昂萨格到去世也没有公开他的自发磁化强度的精确解的求解过程。杨振宁于 1952 年用微扰法求出二维伊辛模型的自发磁化强度^[15]。

3 三维伊辛模型研究进展回顾

自从德国物理学家楞茨教授 1920 年提出模型,他的学生伊辛 1925 年求出一维模型的解以来^[1],求解三维伊辛模型的精确解一直是人类追求的梦想。近 90 年来,人们探索自然奥秘的追梦之旅充满了艰辛,一个不小心就会堕入万丈深渊。尽管在攀登的过程中有时会有一些意外的收获和惊喜,但至今顶峰之路仍然是艰辛遥远。

得到二维伊辛模型的精确解表明人们已在追梦之旅中有了很大的收获,可是人们追求梦想的旅程只是站到一个新的起跑线,前面的旅途更加遥远艰险。在昂萨格求出二维长方伊辛模型的精确解之时就意识到用他的方法不能直接推广到三维,用 Kaufman 的求解过程也不可能直接求出三维伊辛模型的精确解。问题出在三维与二维的不同。那么,三维与二维的不同之处是什么?从空间来讲,二维是一个平面,而三维是立体的。

但在伊辛模型中几何空间形态的不同仅是表面现象,两者不同之本源是拓扑学上的差别^[12]。主要起源于自旋本身具有两种指向的特性、系统存在的相互作用以及数学处理时所用到的矩阵形式。前面已经说到,一维可以用周期性边界条件将问题简化为对 2×2 矩阵求能量本征值。二维就要面对两个 $2^N \times 2^N$ 矩阵相乘后求能量本征值问题。用周期性边界条件简化后,三维还要面对三个 $2^{NL} \times 2^{NL}$ 矩阵相乘后求能量本征值问题。困难还不在于多了一个矩阵,矩阵阶数从 2^N 变成 2^{NL} ,困难在于三个矩阵之间的矩阵元的排序相互交叉,非常混乱地交织在一起。这时,人们遇到了一个新问题:拓扑学的问题。甚至有人发表论文证明因为拓扑学的结的存在而无法解出三维伊辛模型的精确解。无法精确地理解三维世界的自然奥秘,这对于生活在三维世界的人们不能不说是个遗憾。

当然,科学家们并没有被困难吓倒,他们各显神通,采取迂回的战略,从不同的路径曲折地向上攀登。主要的路径有以下几条:①杨振宁先生和李政道先生合作证明解存在的条件,并证明伊辛模型与格气问题相等价^[16,17]。他们的思路是:既然暂时不能求出精确解,那就先从数学上证明这种解存在,而且证明出连续相变存在的范围,得出在零磁场条件下存在连续相变。给大家一个信心,顶峰就在前方。②以 C. Domb 教授为代表的科学家集中精力进行级数展开^[3,18],包括低温展开、高温展开等。他们的思路是:既然暂时不能求出精确解,那就从我们知道的状态出发。我们知道的状态有两个,一个是最低温(即绝对零度)的完全有序态,另一个是最高温(即无限大温度)的完全无序态。从这两个状态分别出发,用函数级数展开形式给出体系的能量和其他物理量的表达式,然后通过外推的方法估计临界点处的数值。随着级数项的增加,其工作量成几何级数地增加,目前仅能得到几十项展开级数项的表达式,离无限多项还差得远。大家仍能坚持做下去是由一个信念支撑:级数展开的每一项的系数都是精确。精确解的展开式应与级数展开每一项的系数相同。③以 Widom, Fisher 和 Kadanoff 等教授为代表的科学家研究临界现象的规律性^[19-22]。他们的思路是:既然暂时不能求出精确解,那就从临界点附近入手,总结临界现象的规律性。发展了标度理论,并发现了临界指数之间的标度关系。并证明在六个临界指数 $\alpha, \beta, \gamma, \eta, \delta$ 和 ν 中仅有两个独立的变量。④1971 年 Wilson 在标度理论和普适性的基础上,利用高能物理中的重正化的概念,发展了重正化群理论^[23,24]。重正化群理论是临界现象研究方面的一个重大突破。Wilson 的思路是:既然暂时不能求出精

确解,根据在临界点处关联长度趋于无限大,体系应具有尺度变化下的不变性,利用这种尺度变化下的不变性,从而确定临界点和临界指数。发展到今天,重正化群理论在许多领域得到应用,成为主流的时尚技术。⑤蒙特-卡罗模拟等计算机技术的发展^[25]。为了解决计算量庞大的矛盾,一个思路是发展功能强大的计算机,另一个就是发展简便的计算算法以节约计算时间。蒙特-卡罗模拟就是一个非常有效的简便算法。⑥实验测定不同物质的临界指数^[22]。通过对不同物质的临界指数的测定,分门别类地归纳总结,并与不同理论模型(如伊辛模型、XY模型、海森堡模型)的结果进行比较,得出普适性的规律。分出不同物质及模型的临界指数的普适类。认为普适类仅与空间维数 d 和序参量的维数 n 有关,与晶格常数和对称性、相互作用的性质、相互作用的力程大小等因素无关。⑦尝试直接求解或推导一些可能解析关系。到目前为止,所有的关于精确求解三维伊辛模型的报导不是被证明是错误的,就是没有得到大家的承认。当然,还有一些科学家尝试求解一些与二维模型有一定关联性的特殊的三维模型;也有一些科学家通过对近似结果的理解提出一些解析关系或猜想。

人们用分子场理论及其改进理论、高温级数展开、低温级数展开、重整化群理论、蒙特·卡罗模拟等近似计算三维伊辛模型的居里温度和临界指数对我们了解其物理性质起到重要的作用。其中Wilson于1971年发展的重整化群理论可以较高的精度计算三维伊辛模型的近似结果^[23,24],是统计物理领域的一个重大进展。

4 三维伊辛模型精确解的新进展

寻找三维伊辛模型的精确解是物理学家近一个世纪的梦想。出于对自然奥秘的探求,我们对这个问题进行了多年的思索和研究。最近,我们报导了对三维简单正交晶格伊辛模型的猜想以及对推定的精确解的详细计算过程^[25]。通过引入第四卷曲起来的维和本征矢量上的权重这两个猜想作为处理三维伊辛模型的拓扑学问题的边界条件。

如上所述,一维伊辛模型可以用周期性边界条件将问题简化为对 2×2 矩阵求能量本征值。这相当于将一根麻绳的问题简化为一个麻点的问题。当然,一个麻点对应于 2×2 矩阵。二维用周期性边界条件将问题简化,就相当于将一片麻布的问题简化为一根麻绳的问题。一根麻绳对应于两个 $2^N \times 2^N$ 矩阵相乘。关键是,这根麻绳象我们买的一扎毛线一样是有秩序地绕好的。只要你仔细,可以轻松地将一扎毛线整理出来。三维用

周期性边界条件后,相当于将一块立体的麻块简化为一片麻布。一片麻布对应于自旋表象中三个 $2^{NL} \times 2^{NL}$ 矩阵相乘,相应地对应于三个 $2^{NL} \times 2^{NL}$ 转动矩阵。关键是,这片麻布是由麻绳非常混乱地编织在一起的。包含了上面所说的拓扑学的问题:存在各种各样的扭曲和纽结。简单地说,就是一团乱麻。如何将这团毫无秩序的乱麻理成有秩序的一根或几根麻绳,已经困扰了学术界六十余年。只要我们能将这团乱麻整理出来,求能量本征值问题迎刃而解。下面是我们提出的两个猜想^[25]:

猜想一:三维伊辛模型的拓扑学问题可以被在四维空间引入的一个附加的旋转解决,因为在三维空间的扭曲和纽结可以被在四维空间的旋转打开。针对三维伊辛模型,我们可以在 $2^N \times L \times O$ 空间(其中 $O = (N \cdot L)^{1/2}$)进行这个旋转,它对应于在 $2^{N \cdot L \cdot O}$ 空间的自旋表象。同时,自旋表象矩阵及其对应的旋转矩阵将在这种高维的空间被重新安排和表示。

猜想二:用在 $[-1, 1]$ 范围内变化的权重因子 w_x, w_y 和 w_z 作用在本征矢量来表达 $\exp(i t_x \pi / N), \exp(i t_y \pi / L)$ 和 $\exp(i t_z \pi / O)$ 在四维空间对系统的能谱的贡献。

我们应用这两个猜想用自旋分析法评估了三维简单正交晶格伊辛模型的配分函数^[25],并发现系统的对称性越高,居里温度越高,简单立方伊辛模型在三维系统具有最高的对称性,居里温度为黄金解。正方伊辛模型在二维系统具有最高的对称性,所以白银解是二维伊辛模型中最高的居里温度。如果猜想是正确的,三维简单正交晶格伊辛模型的比热在相变的临界点具有对数发散的奇异性,这与二维伊辛模型的比热的奇异性一致。我们还用微扰技术推导了三维简单正交晶格伊辛模型的自发磁化强度,并用与二维伊辛模型类似的方法,计算了三维简单正交晶格伊辛模型的自旋关联函数、关联长度、磁化率。由此推定的三维简单正交晶格伊辛模型的临界指数满足普适律和标度律。三维伊辛模型的临界指数与一维及二维伊辛模型的临界指数间也存在很好的数学上的对应关系。研究了在临界点附近的临界现象,并将在猜想基础上获得的结果与其他近似结果和实验结果进行了比较。用一些判据评估了推定的精确解。解释了其他近似结果和实验结果与解的偏差。在推定的精确解基础上,发现三维到二维的转变现象不同于二维到一维的转变现象。当系统具有等于或小于白银解的居里温度时,具有二维的临界指数。高于白银解的区域,有一个从三维到二维的临界指数的逐渐变化的转变过程。还特别注意到由于引入第四卷曲起来的维导致的能量增加和由本征矢量上的权重揭示的在无

限大温度和其附近的状态的不同。讨论了猜想和存在多一维度的背后可能的物理内涵。我们获得的结果具有一定的对称性和美学价值,并可以在极限条件下自动返回到二维和一维的结果。

需要强调的是,我们推定的精确解的正确性取决于这两个猜想的正确性^[25]。当然,我们引入第四卷曲起来的维的想法并不是一个全新的思想。它与科学家们在相对论、结合电磁力和重力的理论、超弦理论、量子重力理论中采取的思路不谋而合。对三维物理世界的理解可能需要引入第四维的帮助。通过引入第四卷曲起来的维在(3+1)维打开三维伊辛模型存在拓扑学的结具有一定的合理性,因为在低维空间的拓扑学的结可以被在高一维空间的旋转来打开。权重的引入是数学中通常使用的一个手段,也具有一定物理思想。另外,推定得的精确解与目前学术界通常接受的评价标准仍不完全吻合。学术界对伊辛模型的精确解的评价标准为:精确解的能量、比热、磁化强度等函数在低温和高温的级数展开项应与用低温级数展开、高温级数展开技术获得的结果完全一致。这是由于二维伊辛模型的精确解与低温级数展开、高温级数展开的结果完全一致。在我们的猜想的基础上推定的三维伊辛模型的精确解可以与高温级数展开在无限大温度及其附近一致,但在有限温度不符。与低温级数展开的结果不符合。我们解释了这种不吻合的可能原因:①三维伊辛模型的低温级数展开是一个发散的级数,导致了一个非物理奇点的出现,并且其收敛半径可能为零,从而使高温级数展开的收敛半径趋于零;②根据李-杨相变理论,在无限大温度也可能会存在一个相变,导致无限大温度和有限温度系统的物理性质发生变化。如果这两个原因合理,则原来学术界公认的评价标准可能不能作为三维伊辛模型的精确解的评价标准。这主要是由于对三维伊辛模型的级数展开仅考虑三维的局域的环境,而没有考虑三维伊辛模型可能存在的拓扑学的结实际上已将所有的参加相互作用的粒子(或原子或自旋)紧密地联系在一起,系统中存在很强的非局域效应,需要引入新的一维空间(或类时空间)来进行讨论。对本问题的探讨不仅涉及凝聚态物理和统计物理,可能还与量子场论、宇宙理论、高能粒子物理、图论和计算机科学有一定的关联。我们公开相关研究结果的目的是为了对该问题的最终解决可能有一点点推动,对其他研究者的探索可能有一点点启示。正确与否一切由时间来检验。

(2007年9月30日收到)

- 1 ISING E. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus [J]. Z Phys, 1925, 31, 253-258.
- 2 HUANG K. Statistical Mechanics[M]. 1963.

- 3 DOMB C, GREEN M S. Phase transitions and critical phenomena[M]. London: Academic Press, 1974.
- 4 MA S K. Modern theory of critical phenomena[M]. Redwood: Addison-Wesley, 1976.
- 5 BRAGG W L, WILLIAMS E J. The effect of thermal agitation on atomic arrangement in alloys[J]. Proc Roy Soc, 1934, A145, 699-730.
- 6 SHOCKLEY W. Theory of order for the copper gold alloy system[J]. J Chem Phys, 1938, 6, 130-144.
- 7 KRAMERS H A, WANNIER G H. Statistics of the two-dimensional ferromagnet, Part I[J]. Phys Rev, 1941, 60, 252-262.
- 8 KRAMERS H A, WANNIER G H. Statistics of the two-dimensional ferromagnet, Part II[J]. Phys Rev, 1941, 60, 263-276.
- 9 MONTROLL E W. Statistical mechanics of nearest neighbor systems[J]. J Chem Phys, 1941, 9, 706-721.
- 10 ONSAGER L. Crystal statistics. I. a two-dimensional model with an order-disorder transition[J]. Phys Rev, 1944, 65, 117-149.
- 11 KAUFMAN B. Crystal statistics. II. partition function evaluated by spinor analysis[J]. Phys Rev, 1949, 76, 1232-1243.
- 12 NEWELL G F, MONTROLL E W. On the theory of the Ising model of ferromagnetism[J]. Rev Mod Phys, 1953, 25, 353-389.
- 13 BAXTER R J. Exactly solved models in statistical mechanics [M]. London: Academic Press, 1982.
- 14 MCCOY B M, WU T T. The two-dimensional Ising model [M]. Cambridge: Harvard University Press, 1973.
- 15 YANG C N. The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model[J]. Phys Rev, 1952, 85, 808-816.
- 16 YANG C N, LEE T D. Statistics theory of equations of state and phase transitions. I. Theory of condensation[J]. Phys Rev, 1952, 87, 404-409.
- 17 LEE T D, YANG C N. Statistics theory of equations of state and phase transitions. II. Lattice gas and Ising model[J]. Phys Rev, 1952, 87, 410-419.
- 18 DOMB C. On the theory of cooperative phenomena in crystals [J]. Adv Phys, 1960, 9, 149-361.
- 19 FISHER M E. Renormalization group theory: its basis and formulation in statistical physics[J]. Rev Mod Phys, 1998, 70, 653-681.
- 20 RUSHBROOKE G S. On the thermodynamics of the critical region for the Ising problem[J]. J Chem Phys, 1963, 39, 842-843.
- 21 WIDOM B. Equation of state in the neighborhood of the critical point[J]. J Chem Phys, 1965, 43, 3898-3905.
- 22 KADANOFF L P, et al. Static phenomena near critical points: theory and experiment[J]. Rev Mod Phys, 1967, 39, 395-431.
- 23 WILSON K G. Renormalization group and critical phenomena I. Renormalization group and Kadanoff scaling picture[J]. Phys Rev B, 1971, 4, 3174-3183.
- 24 WILSON K G. Renormalization group and critical phenomena II. Phase-space cell analysis of critical behavior[J]. Phys Rev B, 1971, 4, 3184-3205.
- 25 ZHANG Z D. Conjectures on exact solution of three-dimensional (3D) simple orthorhombic Ising lattices[J]. Philosophical Magazine, 2007, 87, 5309-5419.

(下转第101页)

言中枢等功能区。在不同的功能区,皮质的厚薄、神经纤维的疏密程度和神经细胞的分布情况各不相同,皮质中所含的神经元的形状和大小也不完全相同。大脑半球的这些形态、结构使人们很自然地联想到用非线性系统分析法来研究大脑的生理现象,包括脑电信号。

正是基于大脑皮质神经元的形态、结构及其神经电生理特性以及大脑半球的解剖学结构,人们可以从非线性系统动力学的角度出发,选择恰当的动力学参数和信号处理方法来研究人体的脑电信号。其实,人体的脑电信号还受到心率的变化、血液动力学、体内激素和代谢的变化、个体的健康水平、外界环境等众多因素的影响,是一个非常复杂的量。我们深信,随着非线性系统动力学和混沌理论的深入研究,在多学科交叉的背景下,人们可以结合人工神经网络和人工智能等先进工程手段,多角度、多样化地研究脑电信号,从而促进脑科学的发展。

(2007年10月12日收到)

- 1 尧德中. 脑功能探测的电学理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2003.
- 2 STAM C J, van WOERKOM T C, PRITCHARD W S. Use of non-linear EEG measures to characterize EEG changes during mental activity[J]. *Electroencephalogr Clin Neurophysiol*, 1996,100(3): 214-224.
- 3 王永红,杨浩. 脑电信号混沌态的初步临床研究[J]. *重庆医科大学学报*, 1997,22(4): 318-320.
- 4 徐琳,徐百华. 非线性动力学脑电信号分析方法的研究与应用[J]. *心理科学*, 2005,28(3): 761-763.
- 5 史习智. 信号处理与软计算[M]. 北京:高等教育出版社,2003.
- 6 JELLES B, van BIRGELEN J H, SLAETS J P, et al. Decrease of non-linear structure in the EEG of Alzheimer patients compared to healthy controls[J]. *Clin Neurophysiol*, 1999,110(7): 1159-1167.
- 7 JEONG J. EEG dynamics in patients with Alzheimer's disease[J]. *Clin Neurophysiol*, 2004,115(7): 1490-1505.
- 8 JEONG J, CHAE J H, KIM S Y, et al. Nonlinear dynamic analysis of the EEG in patients with Alzheimer's disease and

vascular dementia[J]. *J Clin Neurophysiol*, 2001,18(1): 58-67.

- 9 JEONG J, KIM S Y, HAN S H. Non-linear dynamical analysis of the EEG in Alzheimer's disease with optimal embedding dimension[J]. *Electroencephalogr Clin Neurophysiol*, 1998,107(3): 220-228.
- 10 万柏坤,陈寿,蔡宏志. 早发性痴呆的脑电复杂度与近似熵特征分析[J]. *北京生物医学工程*, 2005,24(2): 103-107.
- 11 RADHAKRISHNAN N, GANGADHAR B N. Estimating regularity in epileptic seizure time-series data. A complexity-measure approach[J]. *IEEE Eng Med Biol Mag*, 1998,17(3): 89-94.
- 12 ABÁSOLO D, HORNERO R, GÓMEZ C, et al. Analysis of EEG background activity in Alzheimer's disease patients with Lempel-Ziv complexity and central tendency measure[J]. *Med Eng Phys*, 2006,28(4): 315-322.
- 13 ZHANG X S, ROY R J, JENSEN E W. EEG complexity as a measure of depth of anesthesia for patients[J]. *IEEE Trans Biomed Eng*, 2001,48(12): 1424-1433.
- 14 何菊人,陈子彬. 生理学[M]. 上海:上海医科大学出版社,1988.
- 15 邱树华. 正常人体解剖学[M]. 上海:上海科学技术出版社,1986.

Physiological and Anatomical Fundamentals on the Non-Linear Analysis of EEG Signals

YING Le-an^①, WANG Cheng-tao^②

①Doctor, ②Professor, Institute of Biomedical Manufacturing and Life Quality Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China

Abstract After a brief introduction and review on the non-linear analysis of EEG signals, this paper aims at explaining why non-linear dynamical parameters could be used in the research of EEG signals from the neurophysiology and anatomy view.

Key words EEG, non-linear analysis, neurophysiology, anatomy

(责任编辑:丁嘉羽)

(上接第98页)

Advances on the Ising Model

ZHANG Zhi-dong

Professor, Shenyang National Laboratory for Materials Science, Institute of Metal Research and International Centre for Materials Physics, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016, China

Abstract The Ising model and its applications, the procedure for deriving the exact solution of the two-dimensional Ising model, the difficulty for solving explicitly the three-dimensional (3D) Ising model have been introduced briefly. The progresses in studying

physical properties and critical phenomena of the 3D Ising model by various approximation methods such as the mean field theory and its extensions, renormalization group theory and Monte Carlo simulations etc. have been reviewed. Finally, our recent advances in the conjectures and the putative exact solution of the 3D Ising model are introduced.

Key words Ising model, exact solution, three-dimensional, critical phenomena, conjectures

(责任编辑:温文)