

基础物理教学现代化问题

伽尔顿板实验的计算机模拟

彭芳麟

(北京师范大学 物理系, 北京 100875)

摘要:实现了用计算机模拟伽尔顿板实验,模拟实验可以显示每个粒子的运动轨迹和落点,并对落点位置进行统计,不仅得到了与实际实验一样的统计规律与涨落现象,而且得到了一些有趣的新的结果.

关键词:伽尔顿板实验;计算机模拟

中图分类号:O 414.2

文献标识码:A

文章编号:1000-0712(2005)01-0045-05

伽尔顿板实验是人们熟知的一个物理教学演示实验,其装置如图 1 所示.代表粒子的小球从漏斗口下落,通过与钉子碰撞以后,进入到下面的狭槽,当小球数达到足够多以后,小球在狭槽内就会堆积成高斯曲线形状的分布.照片中所显示的就是一次实验的结果.

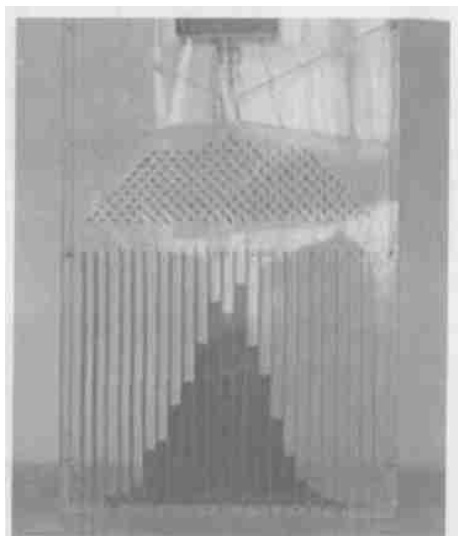


图 1 伽尔顿板实验的照片

由于此实验装置简单,演示效果好,能直观快捷地表现宏观现象中的统计规律,因而通常教材^[1,2]中常用它来说明统计规律的必然性总是寓于大量的个别事件的偶然性之中,以及统计规律中常出现的涨落现象.

使用计算机模拟这个实验,就是希望知道,如果用牛顿力学来描述每个粒子的运动,所得的落点分

布是否会呈现同样的统计规律呢?更进一步,我们还希望知道是什么因素在影响粒子落点的分布.

计算机模拟是科学研究的重要手段,它是一种纯理论计算的虚拟的实验.我们曾经利用计算机模拟来研究力学系统的运动^[3].现在我们希望借助于计算机的高速运算能力以及优秀的数学软件 MATLAB,来重新审视伽尔顿板实验.

1 计算机模拟的实现

我们在计算机模拟中采用的物理模型是:粒子从漏斗口落下时,由于在漏斗中互相碰撞,滚动下落,得到一定的速度,然后,在进入钉子阵列区域后,又与钉子发生碰撞(此时不再考虑粒子之间的碰撞),不断地改变运动的方向,最后落到狭槽内.仿照实际情况,我们采用了简化的二维模型,即粒子是在作平面运动.在模拟实验中,钉子的排列是交错的,钉子与粒子的大小基本相当,即取半径相同,粒子流的宽度就是漏斗口的宽度,粒子的位置在这个宽度内随机分布,同时水平方向的速度大小也是随机的.在下落过程中,若粒子中心与钉子中心的距离小于直径时,就认为是发生了碰撞,碰撞过程遵循能量守恒与动量守恒定律,由此计算出碰撞后粒子的运动轨迹,并画出图形.图中以圆圈表示钉子的位置,以实线表示粒子的轨迹.最后对粒子落点的位置进行统计,画出直方图,再拟合成高斯曲线.

幸运的是,尽管这个程序有相当的难度,我们还是获得了成功.与实际实验不同,在模拟实验中,完全由牛顿力学来定量描述的单个粒子的运动轨迹可以

收稿日期:2003-11-10;修回日期:2004-09-27

基金项目:北京市高校 2002 年教育教学改革项目——理论物理数字化教学的探索

作者简介:彭芳麟(1947—),男,江西泰和人,北京师范大学物理系教授,硕士,从事光学与计算物理研究.

完整的记录与显示,并由此对落点进行统计.例如图 2 是 5 个粒子的运动轨迹图.图中,不仅每个粒子的轨迹不同,还有一个粒子居然没有发生碰撞就落到了底部.尽管发生这种现象的概率极低,但却是可能的.

计算机模拟能够再现实际的伽尔顿板实验的结果,图 3 是 1 000 个粒子的模拟实验结果,图 3(a)是粒子运动轨迹图,图 3(b)是对落到底部的粒子位置统计的结果.可以看到它确实有高斯形状的分布.在统计图中,横坐标是粒子位置,纵坐标是粒子数.在模拟实验的计算公式中,都采用了无量纲化处理.以下的统计图都使用同样的画法.

在实际实验中出现的涨落现象也可很好地表

现出来.图 4 是 200 个粒子的模拟实验结果,可以看出,它与高斯曲线有较大的偏离,也就是出现了涨落现象.

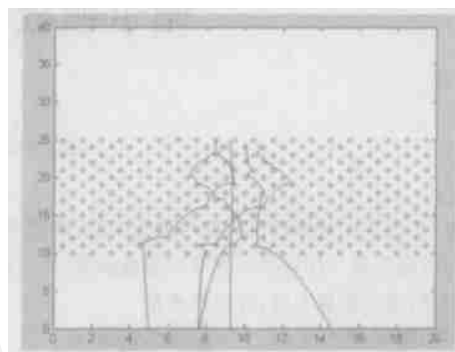
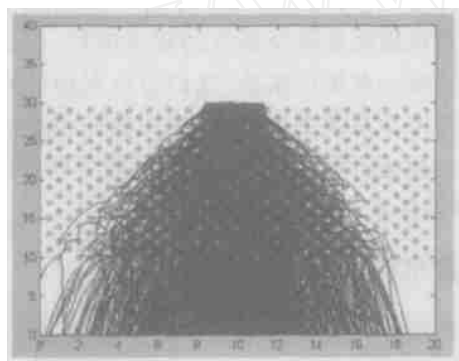
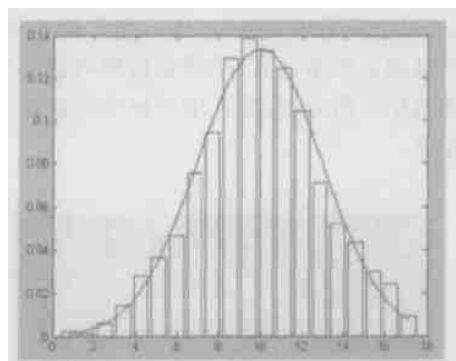


图 2 5 个粒子的运动轨迹

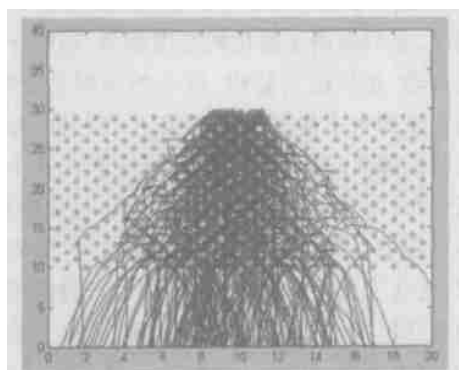


(a) 1 000 个粒子的运动轨迹

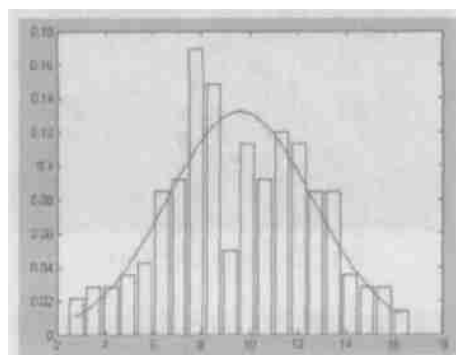


(b) 落点分布统计

图 3



(a) 200 个粒子的运动轨迹



(b) 落点分布统计

图 4

为了对这个实验了解多一点,我们还测量了其他一些量.

首先我们研究了粒子在脱离钉子区域以后到落到底部以前的运动对落点的分布的影响.为此测量了上述实验中粒子刚离开钉子区的位置分布

(见图 5),显然,此时的粒子的位置分布已经可以看成是高斯分布.

那么粒子在落到底部时,其水平速度分布如何呢?图 6 就是统计的结果.可以看出,它并不具有高斯曲线分布.不过,它们已经不是均匀分布了,也没

有达到比较好的高斯分布. 在其他实验中统计的结果也与此相似.

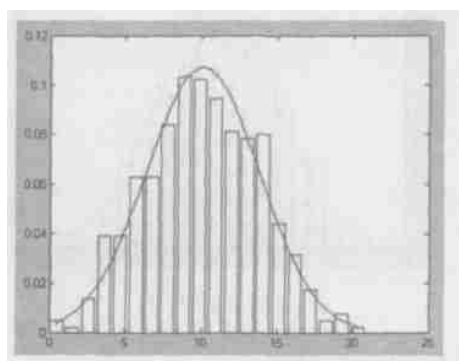


图 5 粒子在刚离开钉子区时的位置分布

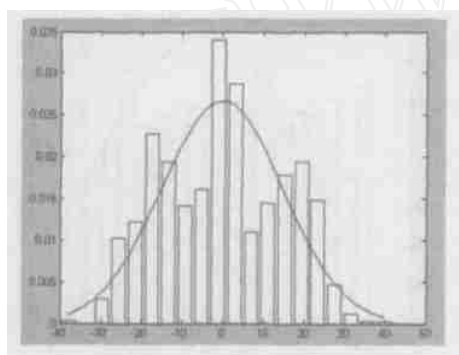


图 6 粒子的速度分布曲线

2 粒子初始速度分布对高斯分布的影响

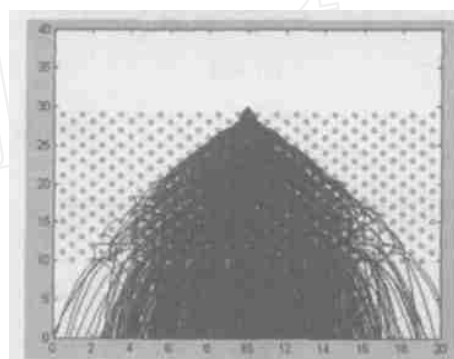
对计算机模拟而言,如果初始位置和初始速度不变,粒子运动的轨迹以及落点就是唯一确定的,这是牛顿力学的必然结果,不管多少粒子,只要是相同的初速、初位移,它们的落点都是相同的,不会产生高斯分布.因此,粒子轨迹如果发生改变,必定是二者之一有了改变.为了能更深入地了解初速和初位移与高斯分布之间的关联,我们利用计算机模拟可以进行与实际不同的虚拟实验的优势,对此作了更细致的研究.

我们设计了两种特殊的实验,一是粒子的位置保持不动,但速度不同,其水平速度取两种分布,一是均匀的在 $-10 \sim 10$ 之间随机分布,另一是在 $-10 \sim 10$ 之间为高斯型的随机分布.

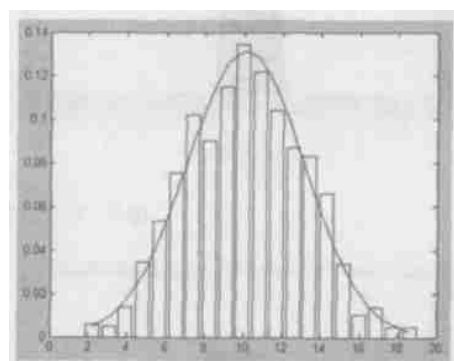
图 7 显示的是粒子位置不变,速度在 $-10 \sim 10$ 之间均匀分布,图 7(a) 是所得到的轨迹,图 7(b) 是落点分布统计. 图 8 显示的是粒子位置不变,速度在 $-10 \sim 10$ 之间呈高斯分布,图 8(a) 是所得到的轨

迹,图 8(b) 是与落点分布统计.

两种实验的结果仍然是符合高斯分布曲线,可见速度的初始分布方式并不重要,只要是随机的就行.从轨迹上可以看到,由于粒子位置不变,所有轨迹都有相同的起点,但是经过一段运动以后,轨迹就产生了分离.此外,我们还考虑过更极端的情形,就是所有速度都是正值的情况,所得结果也与此相似,这个结果也是我们所不曾想到的.



(a) 轨迹



(b) 落点分布统计

图 7 粒子位置不变,速度在 $-10 \sim 10$ 之间均匀分布

如果粒子不发生碰撞而直接落地,其落点分布如图 9 所示,基本上是均匀分布的.它与图 7、图 8 的差别是显而易见的.有关碰撞的作用下面会专门讨论.

3 粒子初始位置分布对高斯分布的影响

再考虑另一种可能改变粒子轨迹与落点的方法,就是粒子的速度不变,只改变粒子的位置.我们让粒子随机地均匀地分布在漏斗口的宽度上,有趣的是,得到的也是高斯形状的分.图 10 为实验结果.

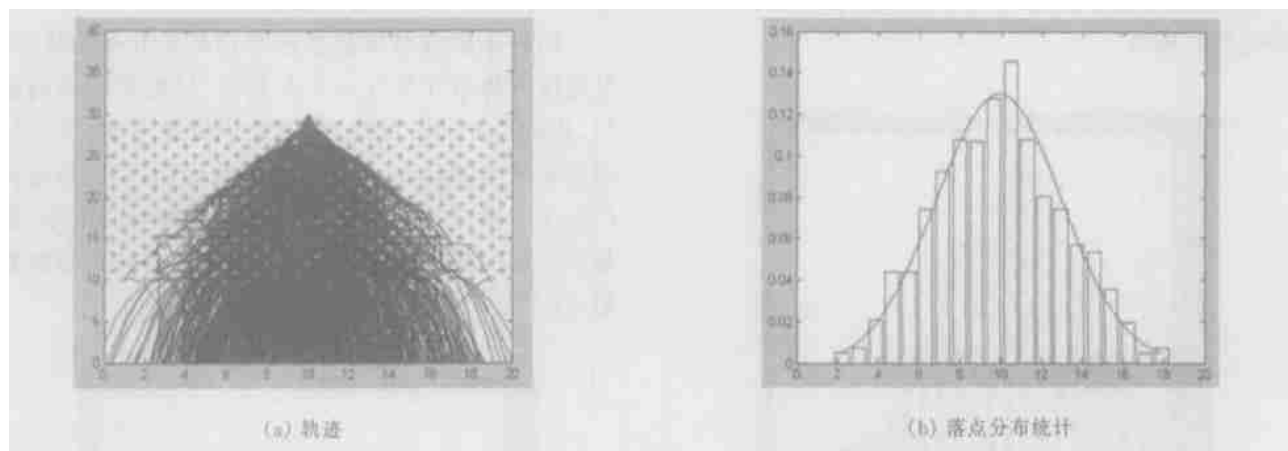


图 8 粒子位置不变,速度在 $-10 \sim 10$ 之间呈高斯分布

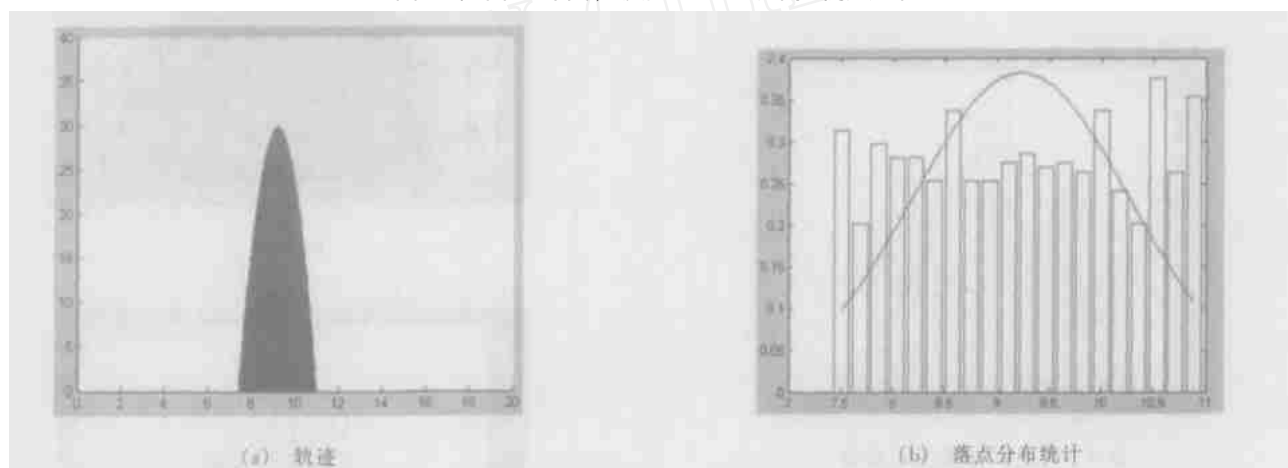


图 9 粒子位置不变,速度在 $-10 \sim 10$ 之间均匀分布,没有与钉子碰撞

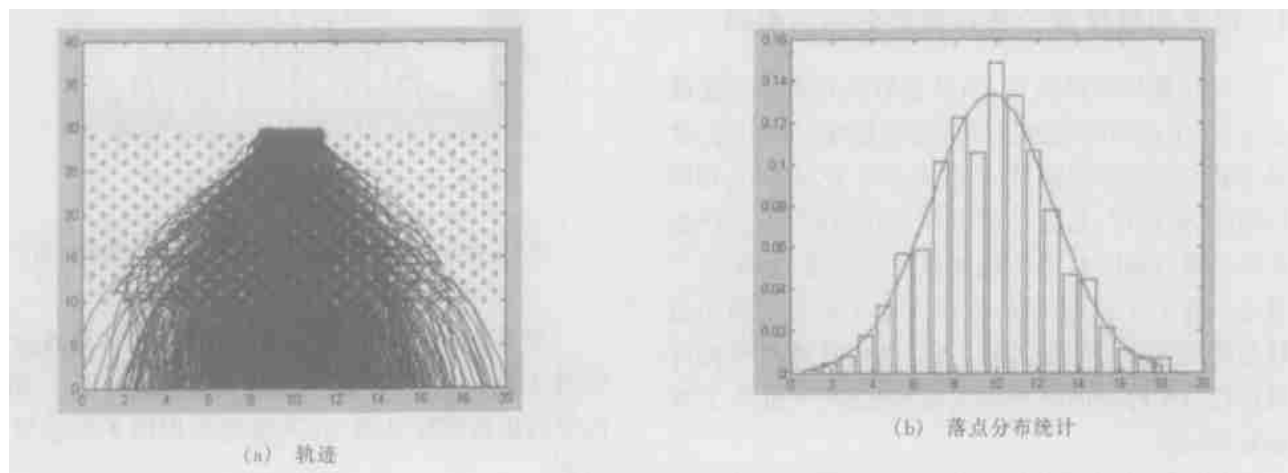


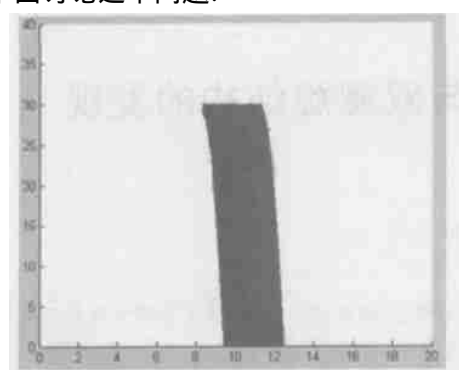
图 10 粒子速度不变,位置作随机分布

粒子如果没有经过碰撞而落地,所得的落点分布统计结果见图 11,也是均匀分布的.这里再一次显现出粒子与钉子碰撞的重要作用.

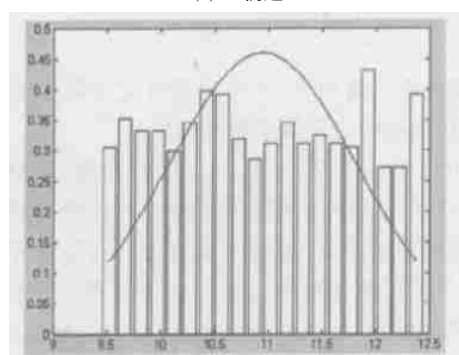
由此可得出结论,随机分布的粒子速度或者随机分布的粒子位置是粒子落点呈现高斯分布的根

源.没有这两个因素,是不会产生由统计规律所描述的现象的.或者说,在这个实验中,统计规律描述的是,具有随机大小的速度或随机的位置分布的粒子在通过钉子阵列时与钉子发生碰撞以后会出现的落点分布规律.那么粒子与钉子的碰撞起了什么作用

呢?下面讨论这个问题.



(a) 轨迹



(b) 落点分布统计

图 11 粒子速度不变,位置作随机均匀分布,与钉子不发生碰撞

4 钉子数目对高斯分布的影响

在计算机模拟中,粒子的初始速度与初始位置是随机给定的,所以它们的位置分布不是高斯分布.由于粒子在下落过程中不断与钉子发生碰撞,改变了运行轨迹和落点位置,才使最后的落点呈现高斯分布.

仔细观察一下各次实验中的轨迹图,可以看出,在钉子区域内,所有粒子的轨迹都形成一个梯形,可见粒子的位置的分布是在逐渐地“扩散”.为了更细致的研究,我们将钉子数目减少一半,重新做实验.图 12 是将钉子数目减少一半所得的 1 000 个粒子的实验结果.显然,落点分布与高斯曲线有较大差别.图 13 是在钉子数减少一半时,2 000 个粒子的落点的统计结果.粒子的落点分布还是没有出现高斯分布.换言之,如果钉子数目太少,即使增加粒子数目,也不会得到高斯分布曲线.

可见,碰撞的作用更重要,没有足够数目的钉子以确保有足够次数的碰撞,则无论是随机性的位置分布或随机性的速度分布都不能产生最后落点的高斯分布.而有了足够次数的碰撞,随机性的位置分布

或者随机性的速度分布之中的任一个都能产生最后落点的高斯分布.所以,有足够次数的钉子与小球的碰撞是必要条件.

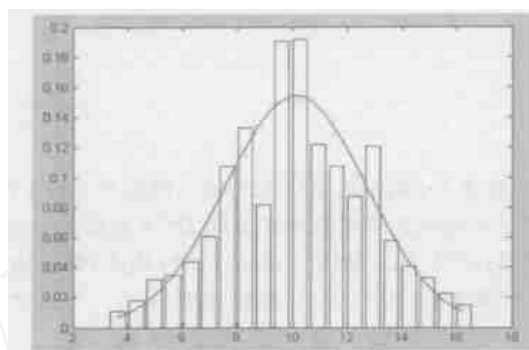


图 12 钉子数目少时 1 000 个粒子的落点分布

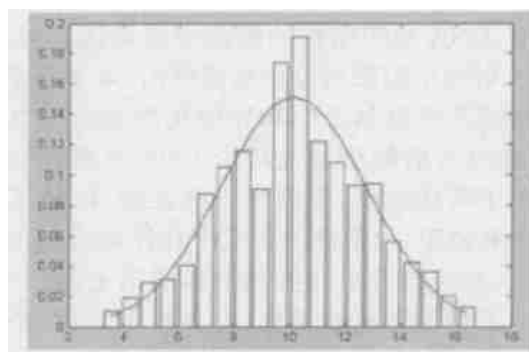


图 13 钉子数目少时 2 000 个粒子的落点分布

5 结论

综上所述可以认为,通过用牛顿力学描述单粒子运动,我们成功地用计算机模拟了伽尔顿板实验,计算机模拟的结果反映了实际实验中的涨落现象与统计规律.粒子落点形成最终的高斯分布的根源是小球位置的随机分布或者小球速度的随机分布,而小球与钉子的碰撞次数则是产生高斯分布的必要条件,形成这个结论不需要再有其他的概率假设.

本文是用计算机模拟实验研究教学问题的一个实例,对教学也有参考价值.

参考文献:

- [1] 李洪芳. 热学[M]. 北京:高等教育出版社,1994.
- [2] 复旦大学物理学编写组. 物理学[M]. 北京:人民教育出版社,1978.
- [3] 彭芳麟等. 理论力学计算机模拟[M]. 北京:清华大学出版社,2002.

(下转 58 页)

从事的 X 射线的研究工作越来越被认为是杰出的。*我与克里克都极为赞赏她那正直的品格和宽宏大量的秉性。只是在多年之后,我们才逐渐理解了这位才华横溢的妇女。*直到她去世前的几个星期,她还在不遗余力地从事高水平的工作,富兰克林的这种勇敢精神是值得我们学习的。^[12]

致谢 感谢中国科学院生物物理研究所董贻诚研究员审阅了此文以及他提出的宝贵意见。

参考文献:

- [1] 蒲杜嘉 (Portugal F H), 寇恩 (Cohen J S). DNA 世纪之回顾——遗传物质构造及机能的研究发展史 [M]. 孙克勤译. 台湾:徐氏基金会;北京:世界图书出版公司, 1989. 53 ~ 96, 232 ~ 235, 277 ~ 280, 282.
- [2] [美]加兰 E 艾伦. 20 世纪的生命科学史 [M]. 田名译. 上海:复旦大学出版社, 1999. 237 ~ 238.
- [3] 周公度. 晶体结构测定 [M]. 北京:科学出版社, 1981. 37 ~ 38, 139 ~ 140, 168 ~ 170.
- [4] Crick F H C, Cochran W, Vand V. The Structure of Synthetic Polypeptides. 1. The Transform of Atoms on a Helix [J]. Acta Cryst, 1952 (5) : 581 ~ 583.
- [5] Astbury W T. X-Ray Study of Thymonucleic Acid [J]. Nature, 1938, 141 : 747 ~ 748.
- [6] Wilkins M H F, Stokes A R, Wilson H R. Molecular Structure of Deoxypentose Nucleic Acids [J]. Nature, 1953, 171 : 738 ~ 740.
- [7] Wilkins M H F, Seeds W E, Stokes A R, et al. Helical Structure of Crystalline Deoxypentose Nucleic Acid [J]. Nature, 1953, 172 : 759 ~ 762.
- [8] Franklin Rosalind E, Gosling R G. Molecular Configuration in Sodium Thymonucleate [J]. Nature, 1953, 171 : 740 ~ 741.
- [9] Franklin Rosalind E, Gosling R G. Evidence for 2-Chain Helix in Crystalline Structure of Sodium Deoxyribonucleate [J]. Nature, 1953, 172 : 156 ~ 157.
- [10] Crick Francis. The double helix: a personal view [J]. Nature, 1974, 248 : 766 ~ 769.
- [11] Crick F H C. The Structure of the Hereditary Material [J]. Scientific American, 1954 (10) : 54 ~ 61.
- [12] [美]沃森 J D. 双螺旋——发现 DNA 的故事 [M]. 刘望夷等译. 北京:科学出版社, 1984. 143 ~ 144.

X-ray diffraction analysis of DNA fibre and the discovery of DNA double helices structure

XIANG Yi-he

(Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: A brief survey of the establishment of DNA chemistry structure is given. The concept, principle and method of X-ray diffraction analysis: crystal, Bragg equation, reciprocal lattice, the method of swing, the transformation of helices are introduced. The remarkable contribution of physicist Wilkins and physicochemist Franklin to give evidence of the experiment of DNA double helices structure are discussed.

Key words: DNA chemistry structure; X-ray diffraction; crystal; Bragg equation; reciprocal lattice; Bessel function; Patterson function; DNA double helices structure

(上接 49 页)

Computational simulation of Calton 's experiment

PEN G Fang-lin

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: Computational simulation of Calton 's experiment is realized. The simulation experiment can show the locus and the position of dropped particles. The distribution law of particles in the simulation experiment is same as Calton 's experiment, and some interesting solution are obtained.

Key words: Calton 's experiment; computational simulation