西安交通大学本科毕业设计（论文）

二次分式几何规划的分支定界算法

学院：理学院

申请人：刘嘉

指导老师：张可村教授

2008.6

摘 要

分式规划是在金融领域，尤其是投资组合模型中经常遇到的一种数学问题模型。本文致力于通用的二次分式几何规划（QFGP）模型的求解。此类模型由有穷的二次规划，多项式规划，几何规划分式的和或乘积组合而成。对此问题，考虑定义域于多面体上，我们提出一种基于分支定界算法的标准全局算法。此算法通过两步线性化的变形方法，将原问题放缩为一系列的线性规划问题从而求解。另为解决单层非线性规划子问题提出了一种基于几何规划变形的改进算法。其间给出算法的收敛性证明。最后给出了用于讨论算法稳定性和效率的数值验证和算法收敛性的证明。

关键词：分式规划，线性化，全局，分支定界

ABSTRACT

Quadratic fractional geometric program is a familiar problem in finance and other subjects, specially in the research of Investment combination.The paper consider the solution of generalized quadratic fractional geometric program (QFGP) problem which contains various variants such as a sum or product of a finite number of ratios of quadratic functions, polynomial fractional programming, generalized geometric programming, etc. over a polytope. For such problem, we present an efficient global method. In this method, by utilizing a transformation a two-step linearization method, a sequence of linear programming relaxations of the initial nonconvex programming problem are derived which are embedded in a branch-and-bound algorithm. For solving the single-level program sub-problem, an improved algorithm based on geometric transformation is proposed. The convergence of the algorithm is proved meanwhile. At last numerical results is given to show the feasibility and effectiveness of the proposed algorithm.

KEY WORDS: fractional program，linearize，global，bound and branch

目录

前言……………………………………………………………………………1
第 1 章 分式变形理论…………………………………………………………… 3
1.1 模型变形………………………………………………………………… 3
1.2 单层化…………………………………………………………………… 3
第 2 章 单层规划理论……………………………………………………………7
2.1 参数化放缩法…………………………………………………………… 7
2.2 单层线性规划…………………………………………………………… 9
2.4 分子为常数的分式规划问题…………………………………………… 9
2.4 分子为常数的分式规划算法…………………………………………… 10
第 3 章 分式上下界估计理论…………………………………………………… 14
第 4 章 全局算法………………………………………………………………… 18
4.1 分支定界算法简介……………………………………………………… 19
4.2 全局算法描述…………………………………………………………… 19
第 5 章 收敛性证明……………………………………………………………… 21
第 6 章 数值算例………………………………………………………………… 23
总结 ……………………………………………………………………………25
致谢 ……………………………………………………………………………26
参考文献 ………………………………………………………………………27

前 言

分式（二层）规划是在金融领域，尤其是投资组合模型中经常遇到的一种数学问题模型。

本文章考虑如下形式的二次分式几何规划

$$
\text{(QFGP)}\quad
\begin{aligned}
\min \quad & F(x)=\sum_{j=1}^{N} t_j \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{f_i(x)}{g_i(x)}\right)^{\gamma_{ij}} = \sum_{j=1}^{N} t_j \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{x^{\mathrm{T}}P_i x + c_i^{\mathrm{T}}x+\alpha_i}{x^{\mathrm{T}}Q_i x + d_i^{\mathrm{T}}x+\beta_i}\right)^{\gamma_{ij}} \\
s.t. \quad & h_k(x)=x^{\mathrm{T}}H_k x + f_k^{\mathrm{T}}x \le b_k, \quad k=1,\cdots,p, \\
& X=\{x: 0<x^L\le x\le x^U<+\infty\}.
\end{aligned}
$$

这里 $P_i,Q_i,H_k \in R_{n\times n}$， $c_i,d_i,f_k,x\in R_n$， t_j 是任意实数， r_{ij} 是实数 $(i=1,...,M, j=1,...,N)$ 。在这篇文章中，我们假定在 x 定义域内， $f_i(x)>0$， $g_i(x)\ge\alpha>0$（即 $g_i(x)$ 的下界严格大于零）。

在过去的数年中，分式规划的研究主要集中在线性分式规划，也就是分子分母均为线性函数的特殊情况，而解决方案较为著名的研究有 Konno 提出解决大规模问题的单纯形法[8]；Konno and Abe 提出的有效的启发式算法[7]；A. Beck, C. Audet 提出的分支定界算法； Pei-Ping Shen 基于分枝定界算法推广的特殊算法[1]。然而实际工程中，经常会遇见高次的分式规划问题，例如多级随机航运，串分析，多目标投资组合模型等，尤其以二次分式规划最为常见。但是一次分式的算法并不能轻易的推广到二次规划中来。

对于二次分式规划有 M. A. Amouzegar 将遗传算法引入两层规划问题的计算求解；李宏、王宇平和焦永昌等研究给出了计算求解该类非线性两层规划问题的一种改进的自适应遗传算法；郑玉谬通过引入解耦向量将非线性两层规划问题分解为独立且易于求解的子问题，并借助于分解一协调原理并按迭代方式最终求得问题的最优解；郑丕谔等研究提出一类非线性两层规划的递阶优化解法[14]；LeeHc, YangH 将下层是凸规划的非线性分式规划转化为单层规划问题并利用遗传算法的想法也广受关注。

几何规划一类特殊的非线性规划。它的目标函数和约束函数都是正定多项式（或称正项式）。几何规划本身一般不是凸规划，但经适当变量替换，即可变为凸规划。几何规划的局部最优解必为整体最优解。求解几何规划的方法有两类。

一类是通过对偶规划去求解；另一类是直接求解原规划，这类算法大多建立在根据几何不等式将多项式转化为单项式的思想上。

本文将下层函数在定义域内下界大于零的二次分式几何规划模型转化为单层规划问题，并通过进一步线性化放缩转化为单层线性规划。由此提出了一种基于分枝定界算法的改进算法用于解决此二次几何分式规划问题。

本课题拟构造该问题的全局最优数值解法，并证明其收敛性。

文章第一章将二次分式几何规划转化为单层形式；第二章讨论单层规划的线性化和边界的求解；第三章就单层函数区间内上下界的子算法进行讨论；第四章给出全局分支定界算法；第五章证明算法收敛性；第六章给出数值算例。

第 1 章 分式变形理论

1.1 模型变形

首先，对 QFGP 模型，很容易将γ_{ij}全部转化为正定的形式，对于所有$\gamma_{ij} \le 0$时，令$\gamma_{ij} = -\gamma_{ij}$，并将分式作如下形式上的变换：

$$(\frac{x^{\mathrm{T}} P_i x + c_i^{\mathrm{T}} x + \alpha_i}{x^{\mathrm{T}} Q_i x + d_i^{\mathrm{T}} x + \beta_i})^{\gamma_{ij}} = (\frac{x^{\mathrm{T}} Q_i x + d_i^{\mathrm{T}} x + \beta_i}{x^{\mathrm{T}} P_i x + c_i^{\mathrm{T}} x + \alpha_i})^{-\gamma_{ij}}$$

这样即可将所有的γ_{ij}转化为大于等于 0 的形式。

我们将t_j正负的情况分开，令：

$$t_j^+ = \begin{cases} t_j & (t_j \ge 0) \\ 0 & (t_j < 0) \end{cases} \quad , \quad t_j^- = \begin{cases} 0 & (t_j \ge 0) \\ t_j & (t_j < 0) \end{cases} \quad , \quad (j = 1, \ldots, N) \tag{1.1}$$

同时将分式各部分简记为：

$$y_i = \frac{f_i(x)}{g_i(x)} = \frac{x^{\mathrm{T}} P_i x + c_i^{\mathrm{T}} x + \alpha_i}{x^{\mathrm{T}} Q_i x + d_i^{\mathrm{T}} x + \beta_i} ,$$

由假定有$f_i(x) > 0$，$g_i(x) \ge \alpha > 0$，那么$y_i > 0$，同时可令$y_i = \exp(u_i)$，则

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} t_j \prod_{i=1}^{M} (y_i)^{\gamma_{ij}} = \sum_{j=1}^{N} t_j \exp(\sum_{i=1}^{M} r_{ij} u_i) = \sum_{j=1}^{N} t_j^+ \exp(\sum_{i=1}^{M} r_{ij} u_i) + \sum_{j=1}^{N} t_j^- \exp(\sum_{i=1}^{M} r_{ij} u_i) \tag{1.2}$$

且有$t_j^+ \ge 0$，$t_j^- < 0$。

1.2 单层化

定理 1.1 （幂函数线性上下界定理）

对$x \in [x^L, x^U] \subset R$，且$x^L \ne x^U$，由于函数$\exp(x)$凸且单调递增。故有：

$$\overline{K}(1 + x - \ln \overline{K}) \le \exp(x) \le \overline{K} \cdot x - \overline{K} \cdot x^L + \exp(x^L) \quad , \tag{1.3}$$

其中$\overline{K}=\dfrac{\exp(x^U)-\exp(x^L)}{x^U-x^L}$。（定理引自参考文献[3]）

定理 1.2 （指数函数线性上下界定理）

对$x\in[x^L,x^U]\subset R$，且$x^L\neq x^U$，由于函数$\ln(x)$凸且单调递增。故有：

$$\overline{L}\cdot(x-x^L)+\ln\overline{L}\le\ln(x)\le\overline{L}\cdot x-1+\ln\overline{L} \quad , \tag{1.4}$$

其中$\overline{K}=\dfrac{\ln(x^U)-\ln(x^L)}{x^U-x^L}$。（定理引自参考文献[3]）

首先要在一个矩形区域内给出原规划目标函数的线性下界函数。故令$H=\{x\,|\,x_\tau^L\le x_\tau\le x_\tau^U,\tau=1,...,n\}$为定义域。由约束条件可以知道，必存在$f_i$,g_i ,z_i确定的上下界$f_i^L,f_i^U,g_i^L,g_i^U,z_i^L,z_i^U$且满足：

$$f_i^L\le f_i\le f_i^U,\quad g_i^L\le g_i\le g_i^U,\quad z_i^L\le z_i\le z_i^U,\quad \forall x\in H,i=1,...M\,, \tag{1.5}$$

对于$f_i^L,f_i^U,g_i^L,g_i^U,z_i^L,z_i^U$的计算方法将在第二章中给出并予以讨论。（可参见第二章）

以下为简便记：

$$\begin{cases} Y_j=\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i, \quad j=1,...N, \\ Y_j^L=\sum_{i=1}^{M}\min(\gamma_{ij}\cdot\ln y_i^L,\gamma_{ij}\cdot\ln y_i^U), \quad j=1,...N, \\ Y_j^U=\sum_{i=1}^{M}\max(\gamma_{ij}\cdot\ln y_i^L,\gamma_{ij}\cdot\ln y_i^U), \quad j=1,...N, \\ K_j=\dfrac{\exp(Y_j^U)-\exp(Y_j^L)}{Y_j^U-Y_j^L} \quad ,j=1,...N. \end{cases} \tag{1.6}$$

由定理 1.1 可推知：

$$K_j(1+\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i-\ln K_j)\le\exp(\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i)\le K_j\cdot\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i-K_j\cdot Y^L+\exp(Y^L)\,,$$

从而，对$j=1,...N$，$t_j^+\ge0$，有：

$$t_j^+K_j(1+\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i-\ln K_j)\le t_j^+\exp(\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i) \tag{1.7}$$

对 $j=1,\ldots N$ ， $t_j^-<0$ ，有：

$$t_j^- K_j(\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i - Y^L) + t_j^- \exp(Y^L) \le t_j^- \exp(\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i) \tag{1.8}$$

由（2.3）的定义 $(j=1,\ldots,N)$

$$\sum_{j=1}^{N} t_j^+ K_j(1+\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i - \ln K_j) + \sum_{j=1}^{N} t_j^-(K_j\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i - K_jY^L + t_j^- \exp(Y^L)) \le \sum_{j=1}^{N} t_j \exp(\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i)$$

也就是说 y_i 有如下的线性下界函数（LLBF），记为 $F_j^L(u)$

$$F^L(u) = \sum_{j=1}^{N} t_j^+ K_j(1+\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i - \ln K_j) + \sum_{j=1}^{N} t_j^-(K_j\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}u_i - K_jY^L + t_j^- \exp(Y^L)) \tag{1.9}$$

将 $\dfrac{x^{\mathrm T}P_ix + c_i^{\mathrm T}x + \alpha_i}{x^{\mathrm T}Q_ix + d_i^{\mathrm T}x + \beta_i} = \exp(u_i)$ 变形可得到

$$\begin{aligned} u_i &= \ln\frac{f_i(x)}{g_i(x)} = \ln\frac{x^{\mathrm T}P_ix + c_i^{\mathrm T}x + \alpha_i}{x^{\mathrm T}Q_ix + d_i^{\mathrm T}x + \beta_i} = \ln(f_i(x)) - \ln(g_i(x)) \\ &= \ln(x^{\mathrm T}P_ix + c_i^{\mathrm T}x + \alpha_i) - \ln(x^{\mathrm T}Q_ix + d_i^{\mathrm T}x + \beta) \end{aligned} \tag{1.10}$$

由此，将 u_i 代入（1.7）（1.8）可以得到如下的 y_i 的线性下界函数（LLBF）：

$$\begin{aligned} F_1^L(u) &= \sum_{j=1}^{N} t_j^+ K_j(1+\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}(\ln(f_i(x)) - \ln(g_i(x))) - \ln K_j) \\ &+ \sum_{j=1}^{N} t_j^-(K_j\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}(\ln(f_i(x)) - \ln(g_i(x))) - K_jY^L + t_j^- \exp(Y^L)) \end{aligned} \tag{1.11}$$

或直接写作只与 x 有关的格式：

$$\begin{aligned} F_1^L(u) = &\sum_{j=1}^{N} t_j^+ K_j(1+\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}(\ln(x^{\mathrm T}P_ix + c_i^{\mathrm T}x + \alpha_i) - \ln(x^{\mathrm T}Q_ix + d_i^{\mathrm T}x + \beta)) - \ln K_j) \\ &+ \sum_{j=1}^{N} t_j^-(K_j\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}(\ln(x^{\mathrm T}P_ix + c_i^{\mathrm T}x + \alpha_i) - \ln(x^{\mathrm T}Q_ix + d_i^{\mathrm T}x + \beta)) - K_jY^L + t_j^- \exp(Y^L)) \end{aligned} \tag{1.12}$$

再利用定理 1.2 中的结论：

$$K_{1i}(f_i(x) - f_i^L) + \ln f_i^L \le \ln f_i(x) \le K_{1i}f_i(x) - 1 + \ln K_{1i} \tag{1.13}$$

$$K_{2i}(g_i(x) - g_i^L) + \ln g_i^L \le \ln g_i(x) \le K_{2i}g_i(x) - 1 + \ln K_{2i} \tag{1.14}$$

其中$K_{1i}=\dfrac{\ln(f_i^U)-\ln(f_i^L)}{f_i^U-f_i^L}$ ， $K_{2i}=\dfrac{\ln(g_i^U)-\ln(g_i^L)}{g_i^U-g_i^L}$

可以进一步得到：

$$
\begin{aligned}
F_2^L(u)=&\sum_{j=1}^{N}t_j^+K_j(1+\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}(K_{1i}(f_i(x)-f_i^L)+\ln f_i^L-K_{2i}g_i(x)-1+\ln K_{2i})-\ln K_j)\\
&+\sum_{j=1}^{N}t_j^-(K_j\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}(K_{1i}f_i(x)-1+\ln K_{1i}-K_{2i}(g_i(x)-g_i^L)+\ln g_i^L)-K_jY^L+t_j^-\exp(Y^L)
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

将形式简化可得：

$$
\begin{aligned}
F_2^L(u)=&\sum_{j=1}^{N}t_j^+K_j(1+\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}(K_{1i}(x^{\mathrm{T}}P_ix+c_i^{\mathrm{T}}x+\alpha_i-f_i^L)+\ln f_i^L-K_{2i}(x^{\mathrm{T}}Q_ix+d_i^{\mathrm{T}}x+\beta)\\
&-1+\ln K_{2i})-\ln K_j)+\sum_{j=1}^{N}t_j^-(K_j\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}(K_{1i}(x^{\mathrm{T}}P_ix+c_i^{\mathrm{T}}x+\alpha_i)-1+\ln K_{1i}\\
&-K_{2i}(x^{\mathrm{T}}Q_ix+d_i^{\mathrm{T}}x+\beta-g_i^L)+\ln g_i^L)-K_jY^L+t_j^-\exp(Y^L)\\
=&\sum_{j=1}^{N}t_jK_j(t_j\sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}(K_{1i}(x^{\mathrm{T}}P_ix+c_i^{\mathrm{T}}x+\alpha_i-f_i^L)-K_{2i}(x^{\mathrm{T}}Q_ix+d_i^{\mathrm{T}}x+\beta)+t_j^+(\ln f_i^L-1+\ln K_{2i})\\
&+t_j^-(-1+\ln K_{1i}+\ln g_i^L)))+\sum_{j=1}^{N}t_j^+K_j(1-\ln K_j)+\sum_{j=1}^{N}t_j^-(-K_jY^L+t_j^-\exp(Y^L))
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

这里即可得到关于x的最小二次函数下界,令：

$F_2^L(u)=x^{\mathrm{T}}A'x+c'^{\mathrm{T}}x+\eta'$ 。

同时可将（QFGP）问题转化为二次规划问题（QP）：

$$
\text{(QP)}\quad
\begin{aligned}
\min\quad & F_2^L(u)=x^{\mathrm{T}}A'x+c'^{\mathrm{T}}x+\eta'\\
s.t.\quad & h_k(x)=x^{\mathrm{T}}H_kx+f_k^{\mathrm{T}}x\le b_k,\quad k=1,\cdots,p,\\
& X=\{x:0<x^L\le x\le x^U<+\infty\}.
\end{aligned}
$$

可以使用第二章中关于二次函数线性上下界的方法继续放缩求解。

第 2 章 单层规划理论

本章中讨论了单层的二次规划目标函数的上下界的求法，以用于本文中的（1.15），（1.16）式的求解。所用的常用方法有参数法，规划法等。

2.1 参数化放缩法

这里参照经典的参数法并加以改进以适用于此问题。经典的参数法可参见参考文献[10]。

令 $S=\{x\in R^1:-\infty<l\le x\le u<+\infty\}$，对任意的 $x\in S$，令

$$x(\sigma)=l+\sigma(u-l) \tag{2.1}$$

其中 $\sigma\in\{0,1\}$，且 $x(0)=l$， $x(l)=1$。

定理 2.1 对任意的 $x\in S$，假定 S 的顶点是由(2.1)定义的 $x(\sigma)$。令 $q(x)=x^2$ 及其梯度函数 $q'(x)=\dfrac{\partial q(x)}{\partial x}=2x$。则必存在向量 $z^L,z^U\in R^1$ 满足：

$$q^L(x;S,\sigma)=z(\sigma)x+q(x(\sigma))-z(\sigma)x(\sigma)$$

$$q^U(x;S,\sigma)=z(1-\sigma)x+q(x(\sigma))-z(1-\sigma)x(\sigma)$$

且对任意 $x\in S$ 满足

$$q^L(x;S,\sigma)\le q(x)\le q^U(x;S,\sigma)$$

$$q^L(x(\sigma);S,\sigma)=q^U(x(\sigma);S,\sigma)=q(x(\sigma))$$

其中 $z(\sigma)$ 如(2.1)定义般的为区间 $Z=[z^L,z^U]$ 的顶点。$q^L(x;S,\sigma)$，$q^U(x;S,\sigma)$ 则表示 q^L，q^U 有受变量 S 和 σ 影响的自变量 x。

从定理 2.1 中我们能得到二次函数 $q(x)=x^2$ 的线性上下界函数。而对于任意的二次函数 $F_2^L(u)=x^{\mathrm{T}}A'x+c'^{\mathrm{T}}x+\eta'$ ，令 n 为 A' 的阶数。由

$2x_ix_k=(x_i+x_k)^2-(x_i^2+x_k^2)\quad(i,k=1,\dots,n)$ 可得

$$\begin{aligned} F_2^L(u) &= \sum_{i=1}^{n} c_i' x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}' x_i x_k = \sum_{i=1}^{n}(c_i' x_i + A_{ii}' x_i^2) + \sum_{i=1, i\neq k}^{n} A_{ik}' x_i x_k \\ &= \sum_{i=1}^{n}(c_i' x_i + A_{ii}' x_i^2) + \frac{1}{2}\sum_{i=1, i\neq k}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}'[(x_i + x_k)^2 - (x_i^2 + x_k^2)] \end{aligned} \tag{2.2}$$

以下，对 $X=[x^L, x^U] \subseteq X^0$ 及任意的 $x=(x_i)_{l\times n} \in X$，令：

$$X_{ik}^L = x_i^L + x_k^L \quad , \quad X_{ik}^U = x_i^U + x_k^U \quad , \quad X_{ik} = x_i + x_k \quad , \quad i \neq k$$

$$\varphi_{ik}^L(x; X, \sigma) = z(\sigma_{n+i+k}) X_{ik} + X_{ik}^2(\sigma_{n+i+k}) - z(\sigma_{n+i+k}) X_{ik}(\sigma_{n+i+k}), i \neq k$$

$$\varphi_{ik}^U(x; X, \sigma) = z(1-\sigma_{n+i+k}) X_{ik} + X_{ik}^2(\sigma_{n+i+k}) - z(1-\sigma_{n+i+k}) X_{ik}(\sigma_{n+i+k}), i \neq k$$

$$\varphi_i^L(x; X, \sigma) = z(\sigma_i) X_i + X_i^2(\sigma_i) - z(\sigma_i) X_i(\sigma_i), i \neq k$$

$$\varphi_i^U(x; X, \sigma) = z(1-\sigma_i) X_i + X_i^2(\sigma_i) - z(1-\sigma_i) X_i(\sigma_i), i \neq k$$

其中 $i,k=1,...,n$，$i \neq k$，$\sigma \in \{0,1\}^{n^2}$，$x_i(\sigma_i)$ 和 $X_{ik}(\sigma_{n+i+k})$ 是 $[x_i^L, x_i^U]$，$[X_{ik}^L, X_{ik}^U]$ 上的顶点。$z(\sigma_i)$，$z(1-\sigma_i)$，$z(\sigma_{n+i+k})$，$z(1-\sigma_{n+i+k})$ 都是如定理 2.1 所定义。由定理 2.1 可确定向量 $\sigma \in \{0,1\}^{n^2}$，对于任意的 $x \in X$ 有：

$$\varphi_{ik}^L(x; X, \sigma) \le (x_i + x_k)^2 \le \varphi_{ik}^U(x; X, \sigma) \qquad \forall i \neq k$$

$$\varphi_i^L(x; X, \sigma) \le x_i^2 \le \varphi_i^U(x; X, \sigma) \qquad \forall i,k \in \{1,...,n\}。$$

因此有

$$A_{ii}' x_i^2 \ge \varphi_i^{LL}(x; X, \sigma) := \begin{cases} A_{ii}' \varphi_i^L(x; X, \sigma), & if\ A_{ii}' > 0 \\ A_{ii}' \varphi_i^U(x; X, \sigma), & if\ A_{ii}' < 0 \end{cases}$$

$$A_{ii}'(x_i + x_k)^2 \ge \varphi_{ik}^{LL}(x; X, \sigma) := \begin{cases} A_{ii}' \varphi_{ik}^L(x; X, \sigma), & if\ A_{ii}' > 0 \\ A_{ii}' \varphi_{ik}^U(x; X, \sigma), & if\ A_{ii}' < 0 \end{cases}$$

$$A_{ii}'(x_i^2 + x_k^2) \ge \phi_{ik}^{LL}(x; X, \sigma) := \begin{cases} A_{ii}'(\varphi_i^L(x; X, \sigma) + \varphi_k^L(x; X, \sigma)), & if\ A_{ii}' > 0 \\ A_{ii}'(\varphi_i^U(x; X, \sigma) + \varphi_k^U(x; X, \sigma)), & if\ A_{ii}' < 0 \end{cases}$$

由此，可将(2.2)式变成如下形式：

$$F_2^L(u) \ge F_3^L(u) := \sum_{i=1}^{n}(c_i' x_i + \varphi_i^{LL}(x; X, \sigma)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1, i\neq k}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\varphi_{ik}^{LL}(x; X, \sigma) - \phi_{ik}^{LL}(x; X, \sigma)) \tag{2.3}$$

这里，可对(QP)模型中约束函数和目标函数使用参数法进行放缩，均可转化为线性函数，记将$x^{\mathrm{T}}H_k x+f_k^{\mathrm{T}}x$线性化为$h'x$，$x^{\mathrm{T}}A'x+c'^{\mathrm{T}}x+\eta'$线性化为$F_3^L(u)=c''^{\mathrm{T}}x+\eta''$，则可将(QP)模型转化为线性单层规划问题(LP)。

$$
\text{(LP)}\quad
\begin{array}{ll}
\min & F_3^L(u)=c''^{\mathrm{T}}x+\eta'' \\
s.t. & h'_k(x)=h'^{\mathrm{T}}x\le b_k, \qquad k=1,\cdots,p, \\
 & X=\{x:0<x^L\le x\le x^U<+\infty\}.
\end{array}
$$

2.2 单层线性规划

线性规划问题是一类常见且有较完善理论和算法的规划问题。

常用的算法有：1947 年美国数学家 G.B.丹齐克提出线性规划的一般数学模型和求解线性规划问题的通用方法——单纯形法；1954 年 C.莱姆基提出的对偶单纯形法；1960 年 G.B.丹齐克和 P.沃尔夫提出分解算法；1984 年美国贝尔电话实验室的印度数学家 N.卡马卡提出解线性规划问题的新的多项式时间算法等。

这里使用 Matlab.linprog 线性规划程序包，使用单纯形法的改进算法。详尽算法参见参考文献[4][5][6]

2.3 分子为常数的分式规划

这里考虑求解$\omega_i=\dfrac{1}{g_i(x)}=\dfrac{1}{x^{\mathrm{T}}Q_i x+d_i^{\mathrm{T}}x+\beta_i}$上下界问题的求解。

由于$g_i(x)\ge\alpha>0$，故而我们只要能得到$g_i(x)$的上下界就可以简单的得到ω_i的界。所以可以简单的来考虑$g_i(x)$上下界的问题。

最简单考虑是使用 2.1 中所采用的参数法求出其线性上下界，然后得到在区间内上下界。然而，参数法有其难以克服的缺陷，即当在苛刻的条件下，例如非常陡峭的二次函数时，会求解出值域区域很大的上下界。在数值验证中发现，对于$g_i(x)$在求解区域内较接近零的情况，会导致求出的$g_i(x)$下界小于零，这对于下一步展开中对于下界严格于零的要求不能满足，会导致算法异常。

由于上述参数法的缺陷，我们考虑将$g_i(x)$上下界的求解当作一个二次规划

问题来看待，通过求解一个二次规划问题来解决此问题。

$$
\text{(QP)}\quad
\begin{aligned}
\min\quad & f_i(x)=x^{\mathrm{T}}P_ix+c_i^{\mathrm{T}}x+\alpha_i\\
s.t.\quad & h_k(x)=x^{\mathrm{T}}H_kx+f_k^{\mathrm{T}}x\le b_k,\qquad k=1,\cdots,p,\\
& X=\{x:0<x^L\le x\le x^U<+\infty\}.
\end{aligned}
$$

2．4 中提出了一种通过对文中第三章算法的改进，用几何规划变形并放缩出线性上下界来求解的算法。

2.4 分子为常数的分式规划算法

本节的算法以用于求解(QP)问题

$$
\text{(QP)}\quad
\begin{aligned}
\min\quad & f_i(x)=x^{\mathrm{T}}P_ix+c_i^{\mathrm{T}}x+\alpha_i\\
s.t.\quad & h_k(x)=x^{\mathrm{T}}H_kx+f_k^{\mathrm{T}}x\le b_k,\qquad k=1,\cdots,p,\text{。}\\
& X=\{x:0<x^L\le x\le x^U<+\infty\}.
\end{aligned}
$$

可做以下变形：

$$
\begin{aligned}
& f_i(x,\omega_i)=(x^{\mathrm{T}}P_ix+c_i^{\mathrm{T}}x+\alpha_i)\\
& =\sum_{j=1}^{N}(P_i)_{jj}x_j^2+\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{l=j+1}^{N}[(P_i)_{jl}+(P_i)_{lj}]x_jx_l+\sum_{j=1}^{N}c_{ij}x_j+\alpha_i\\
& h_k(x)=x^{\mathrm{T}}H_kx+f_k^{\mathrm{T}}x+b_i\\
& =\sum_{j=1}^{N}(H_k)_{jj}x_j^2+\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{l=j+1}^{N}[(H_k)_{jl}+(H_k)_{lj}]x_jx_l+\sum_{j=1}^{N}f_{kj}x_j+b_k
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

并令：$\chi=(x_1^2,\ldots,x_n^2,x_1,\ldots,x_n,x_1x_2,x_1x_3,\ldots,x_{n-1}x_n,1)^{\mathrm{T}}$ 及

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&\dots&0\\0&2&0&\dots&0\\&&\dots&&\\0&0&0&\dots&2\\1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\&&\dots&&\\0&0&0&\dots&1\\1&1&0&\dots&0\\1&0&1&\dots&0\\&&\dots&&\\0&0&\dots&1&1\\0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}_{K\times n} \tag{2.5}$$

其中 $K=2N+\frac{1}{2}(N-1)^2+1$

A 是用来表示 χ 的矩阵形式，其中例如 x_1^2 的展开向量是 $(2,0,0,\dots,0)$，x_1x_2 其展开向量是 $(1,1,0,\dots,0)$，1 的展开向量为 $(0,0,0,\dots,0)$。令

$\overline{c_i}=(diag(P_i)^{\mathrm{T}},c_i^{\mathrm{T}},(P_i)_{12}+(P_i)_{21},\dots,(P_i)_{n,n-1}+(P_i)_{n-1,n},\alpha_i)^{\mathrm{T}},i=1,\dots,M;$

$\overline{f_k}=(diag(H_k)^{\mathrm{T}},f_k^{\mathrm{T}},(H_k)_{12}+(H_k)_{21},\dots,(H_k)_{n,n-1}+(H_k)_{n-1,n},b_k)^{\mathrm{T}},k=1,\dots,p;$

我们将 $\overline{c_i}$，$\overline{d_i}$，$\overline{f_k}$ 正负的情况分开，令：

$$\overline{c_i}^{+}=\begin{cases}\overline{c_i} & (\overline{c_i}\ge 0)\\ 0 & (\overline{c_i}<0)\end{cases}\quad \overline{c_i}^{-}=\begin{cases}0 & (\overline{c_i}\ge 0)\\ \overline{c_i} & (\overline{c_i}<0)\end{cases}\qquad (j=1,\dots,N)$$

同理可得 $\overline{f_k}^{+},\overline{f_k}^{-}$。则有：

$$f_i(x)=\overline{c_i}^{\mathrm{T}}\chi=\sum_{l=1}^{K}(\overline{c_i})_l^{\mathrm{T}}\chi_l=\sum_{l=1}^{K}(\overline{c_i})_l^{\mathrm{T}}\prod_{k}^{N}x_k^{A_{lk}}; \tag{2.6}$$

$$h_k^i(x_i)=\overline{f_k}^{\mathrm{T}}\chi=\sum_{l=1}^{K}(\overline{f_k})_l^{\mathrm{T}}\chi_l=\sum_{l=1}^{K}(\overline{f_k})_l^{\mathrm{T}}\prod_{k}^{N}x_k^{A_{lk}}\le 0; \tag{2.7}$$

令 $x_k=\exp(z_k)$，则立刻有 $\ln x_k^L\le z_k\le \ln x_k^U$.。对(2.6)(2.7)使用 $x_k=\exp(z_k)$ 变换可得：

$$f_i(z)=\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^+\exp(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k)+\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^-\exp(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k);\tag{2.8}$$

$$h_k^i(z)=\sum_{l=1}^{K}(\overline{f}_k)_l^+\exp(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k)+\sum_{l=1}^{K}(\overline{f}_k)_l^-\exp(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k)\le 0;$$

令：

$$\begin{cases} Z_{il}=\sum_{K=1}^{N}A_{lk}z_k,\quad l=1,\dots,K,\\ Z_{il}^L=\sum_{K=1}^{N}\min(A_{lk}\cdot\ln x_k^L,A_{lk}\cdot\ln x_k^U),\quad l=1,\dots,K,\\ Z_{il}^U=\sum_{K=1}^{N}\max(A_{lk}\cdot\ln x_k^L,A_{lk}\cdot\ln x_k^U),\quad l=1,\dots,K,\\ L_{il}=\dfrac{\exp(Z_{il}^U)-\exp(Z_{il}^L)}{Z_{il}^U-Z_{il}^L}\quad ,j=1,\dots N. \end{cases}$$

由定理 1.1

$$L_{il}(1+\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k-\ln L_{il})\le\exp(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k)\le L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k-Z_{il}^L)+\exp(Z_{il}^L)\tag{2.9}$$

由(2.9)式可以推知 $f_i(z)$，$h_k^i(z)$ 的上下界。

这里仅以 $f_i(z)$ 为例：

$$\begin{aligned} f_i^L(z)=&\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^+[L_{il}(1+\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k-\ln L_{il})]\\ &+\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^-[L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k-Z_{il}^L)+\exp(Z_{il}^L)]; \end{aligned}\tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} f_i^U(z)=&\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^+[L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k-Z_{il}^L)+\exp(Z_{il}^L)]\\ &+\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^-[L_{il}(1+\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k-\ln L_{il})]; \end{aligned}\tag{2.11}$$

进一步将其中的 $z_k=\ln(x_k),k=1,\dots,N$ 展开。令：

$$s_k=\frac{\ln(x_k^U)-\ln(x_k^L)}{x_k^U-x_k^L},k=1,\dots,N$$

由定理 1.2 可得:

$$s_k(x_k-x_k^L)+\ln x_k^L\le\ln x_k\le s_kx_k-1+\ln s_k,k=1,\dots,N,\tag{2.12}$$

将(2.10) (2.11)带入方程(2.12)可得(2.4)的上下界

$$Lf_i^L(x)=\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^+[L_{il}(1+\sum_{k=1}^{N}A_{lk}(s_kx_k-s_kx_k^L+\ln x_k^L)-\ln L_{il})]$$
$$+\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^-[L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}(s_kx_k-1+\ln s_k)-Z_{il}^L)+\exp(Z_{il}^L)];$$

由$(\overline{c_i})_l^+$，$(\overline{c_i})_l^-$性质可简化为：

$$Lf_i^L(x)=\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l\,L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}s_kx_k)+\mu_i^L$$

其中

$$\mu_i^L=\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^+[L_{il}(1+\sum_{k=1}^{N}A_{lk}(-s_kx_k^L+\ln x_k^L)-\ln L_{il})]$$
$$+\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^-[L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}(-1+\ln s_k)-Z_{il}^L)+\exp(Z_{il}^L)];$$

同理可相应的写出$f_i(z)$，$h_k^i(z)$的线性上下界，

$$Uf_i^U(x)=\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^{\mathrm{T}}L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}s_kx_k)+\mu_i^U,$$

$$(Lh_k^i)^L(x)=\sum_{l=1}^{K}(\overline{f}_k)_l^{\mathrm{T}}L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}s_kx_k)+(\phi_k^i)^L.$$

至此，已将求解$f_i,i=1,...M$上下界的问题转化为一个如下的线性问题：

$$(LY_i)\quad\begin{cases}\min\ \ Lf_i^L(x)\\ s.t.\ \ (Lh_k^i)^L(x)\le 0,\ k=1,...,M,\\ \qquad 0<x^L\le x\le x^U<+\infty,\\ \qquad 0<\omega^L\le\omega\le\omega^U<+\infty,\end{cases}$$

$$(UY_i)\quad\begin{cases}\min\ \ Lf_i^U(x)\\ s.t.\ \ (Lh_k^i)^L(x)\le 0,\ k=1,...,M,\\ \qquad 0<x^L\le x\le x^U<+\infty,\\ \qquad 0<\omega^L\le\omega\le\omega^U<+\infty,\end{cases}$$

通过求解线性问题(LY_i)，(UY_i)可以轻易的得到$f_i,i=1,...M$的上下界。

第 3 章 分式上下界估计理论

本章的算法以用于求解分式 $y_i = \dfrac{f_i(x)}{g_i(x)} = \dfrac{x^{\mathrm{T}} P_i x + c_i^{\mathrm{T}} x + \alpha_i}{x^{\mathrm{T}} Q_i x + d_i^{\mathrm{T}} x + \beta_i}$ 上下界。

为估计 y 得上下界 y^L, y^U ，须对每个 $y_i, i = 1,...M$ ，而这就会成为2M个二次分式规划，而这是 NP-hard 的。所以这里提出了一种线性逼近算法来转化为2M的子问题。令：

$$\omega_i = \frac{1}{g_i(x)} = \frac{1}{x^{\mathrm{T}} Q_i x + d_i^{\mathrm{T}} x + \beta_i} \tag{3.1}$$

这里用第二章中讨论的两种算法来计算出 ω_i 的上下界 ω_i^L, ω_i^U 且满足 $0 < \omega_i^L < \omega_i^U$ 。

通过新变量 ω_i 的引入，可做以下变形：

$$\begin{aligned} F_i(x,\omega_i) &= y_i = (x^{\mathrm{T}} P_i x + c_i^{\mathrm{T}} x + \alpha_i)\omega_i \\ &= \sum_{j=1}^{N} (P_i)_{jj} \omega_i x_j^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=j+1}^{N} [(P_i)_{jl} + (P_i)_{lj}] \omega_i x_j x_l + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \omega_i x_j + \alpha_i \omega_i \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} G_i(x,\omega_i) &= g_i(x)\omega_i = (x^{\mathrm{T}} Q_i x + d_i^{\mathrm{T}} x + \beta_i)\omega_i \\ &= \sum_{j=1}^{N} (Q_i)_{jj} \omega_i x_j^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=j+1}^{N} [(Q_i)_{jl} + (Q_i)_{lj}] \omega_i x_j x_l + \sum_{j=1}^{N} d_{ij} \omega_i x_j + \beta_i \omega_i \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} H_k^i(x,\omega_i) &= h_k(x)\omega_i = (x^{\mathrm{T}} H_k x + f_k^{\mathrm{T}} x + b_i)\omega_i \\ &= \sum_{j=1}^{N} (H_k)_{jj} \omega_i x_j^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=j+1}^{N} [(H_k)_{jl} + (H_k)_{lj}] \omega_i x_j x_l + \sum_{j=1}^{N} f_{kj} \omega_i x_j + b_k \omega_i \end{aligned} \tag{3.4}$$

并令：

$$\chi = (x_1^2, ..., x_n^2, x_1, ..., x_n, x_1 x_2, x_1 x_3, ..., x_{n-1} x_n, 1)^{\mathrm{T}}$$

用 A 来表示 χ 的矩阵形式，定义见（2.5）。再令

$$\overline{c}_i = (diag(P_i)^{\mathrm{T}}, c_i^{\mathrm{T}}, (P_i)_{12} + (P_i)_{21}, ..., (P_i)_{n,n-1} + (P_i)_{n-1,n}, \alpha_i)^{\mathrm{T}}, i = 1, ..., M;$$

$$\overline{d}_i = (diag(Q_i)^{\mathrm{T}}, d_i^{\mathrm{T}}, (Q_i)_{12} + (Q_i)_{21}, ..., (Q_i)_{n,n-1} + (Q_i)_{n-1,n}, \beta_i)^{\mathrm{T}}, i = 1, ..., M;$$

$$\overline{f}_k = (diag(H_k)^{\mathrm{T}}, f_k^{\mathrm{T}}, (H_k)_{12} + (H_k)_{21}, ..., (H_k)_{n,n-1} + (H_k)_{n-1,n}, b_k)^{\mathrm{T}}, k = 1, ..., p;$$

我们将$\overline{c_i}$，$\overline{d_i}$，$\overline{f_k}$正负的情况分开，令：

$$\overline{c_i}^+ = \begin{cases} \overline{c_i} & (\overline{c_i} \geq 0) \\ 0 & (\overline{c_i} < 0) \end{cases} \quad \overline{c_i}^- = \begin{cases} 0 & (\overline{c_i} \geq 0) \\ \overline{c_i} & (\overline{c_i} < 0) \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

同理可得$\overline{d}_i^+, \overline{d}_i^-, \overline{f}_k^+, \overline{f}_k^-$。

则有：

$$F_i(x, \omega_i) = y_i = \omega_i \overline{c}_i^{\mathrm{T}} \chi = \omega_i \sum_{l=1}^{K} (\overline{c}_i)_l^{\mathrm{T}} \chi_l = \sum_{l=1}^{K} (\overline{c}_i)_l^{\mathrm{T}} \omega_i \prod_{k}^{N} x_k^{A_{lk}}; \tag{3.5}$$

$$G_i(x, \omega_i) = \omega_i \overline{d}_i^{\mathrm{T}} \chi = \omega_i \sum_{l=1}^{K} (\overline{d}_i)_l^{\mathrm{T}} \chi_l = \sum_{l=1}^{K} (\overline{d}_i)_l^{\mathrm{T}} \omega_i \prod_{k}^{N} x_k^{A_{lk}} = 1; \tag{3.6}$$

$$H_k^i(x, \omega_i) = \omega_i \overline{f}_k^{\mathrm{T}} \chi = \omega_i \sum_{l=1}^{K} (\overline{f}_k)_l^{\mathrm{T}} \chi_l = \sum_{l=1}^{K} (\overline{f}_k)_l^{\mathrm{T}} \omega_i \prod_{k}^{N} x_k^{A_{lk}} \leq 0; \tag{3.7}$$

令$x_k = \exp(z_k)$，$\omega_i = \exp(z_i^0)$，则立刻有$\ln x_k^L \leq z_k \leq \ln x_k^U$及$\ln \omega_k^L \leq z_i^0 \leq \ln \omega_k^U$

将(3.5) (3.6) (3.7)使用$x_k = \exp(z_k)$，$\omega_i = \exp(z_i^0)$变换可得：

$$F_i(z, z_i^0) = \sum_{l=1}^{K} (\overline{c}_i)_l^+ \exp(\sum_{k=1}^{N} A_{lk} z_k + z_i^0) + \sum_{l=1}^{K} (\overline{c}_i)_l^- \exp(\sum_{k=1}^{N} A_{lk} z_k + z_i^0); \tag{3.8}$$

$$G_i(z, z_i^0) = \sum_{l=1}^{K} (\overline{d}_i)_l^+ \exp(\sum_{k=1}^{N} A_{lk} z_k + z_i^0) + \sum_{l=1}^{K} (\overline{d}_i)_l^- \exp(\sum_{k=1}^{N} A_{lk} z_k + z_i^0) = 1; \tag{3.9}$$

$$H_k^i(z, z_i^0) = \sum_{l=1}^{K} (\overline{f}_k)_l^+ \exp(\sum_{k=1}^{N} A_{lk} z_k + z_i^0) + \sum_{l=1}^{K} (\overline{f}_k)_l^- \exp(\sum_{k=1}^{N} A_{lk} z_k + z_i^0) \leq 0; \tag{3.10}$$

令：

$$\begin{cases} Z_{il} = \sum_{K=1}^{N} A_{lk} z_k + z_i^0, \quad l = 1, \ldots, K, \\ Z_{il}^L = \sum_{K=1}^{N} \min(A_{lk} \cdot \ln x_k^L, A_{lk} \cdot \ln x_k^U) + \ln \omega_i^L, \quad l = 1, \ldots, K, \\ Z_{il}^U = \sum_{K=1}^{N} \max(A_{lk} \cdot \ln x_k^L, A_{lk} \cdot \ln x_k^U) + \ln \omega_i^U, \quad l = 1, \ldots, K, \\ L_{il} = \dfrac{\exp(Z_{il}^U) - \exp(Z_{il}^L)}{Z_{il}^U - Z_{il}^L} \quad , j = 1, \ldots N. \end{cases}$$

由定理 1.1

$$L_{il}(1+\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k+z_i^0-\ln L_{il})\le\exp(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k+z_i^0)\le L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k+z_i^0-Z_{il}^L)+\exp(Z_{il}^L)$$

则由(3.8) (3.9) (3.10)式可以推知 $F_i(z,z_i^0)$, $G_i(z,z_i^0)$, $H^i_k(z,z_i^0)$ 的上下界。

这里仅以 $F_i(z,z_i^0)$ 为例：

$$\begin{aligned}F_i^L(z,z_i^0)=&\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^+[L_{il}(1+\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k+z_i^0-\ln L_{il})]\\&+\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^-[L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k+z_i^0-Z_{il}^L)+\exp(Z_{il}^L)];\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}F_i^U(z,z_i^0)=&\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^+[L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k+z_i^0-Z_{il}^L)+\exp(Z_{il}^L)]\\&+\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^-[L_{il}(1+\sum_{k=1}^{N}A_{lk}z_k+z_i^0-\ln L_{il})];\end{aligned}\tag{3.12}$$

进一步对其中的 $z_k=\ln(x_k),k=1,\dots,N$， $z_i^0=\ln(\omega_i),i=1,\dots,M$ 展开。令：

$$\begin{cases}s_k=\dfrac{\ln(x_k^U)-\ln(x_k^L)}{x_k^U-x_k^L},k=1,\dots,N,\\ t_i=\dfrac{\ln(\omega_i^U)-\ln(\omega_i^L)}{\omega_i^U-\omega_i^L},i=1,\dots,M.\end{cases}$$

由定理 1.2 可得:

$$s_k(x_k-x_k^L)+\ln x_k^L\le\ln x_k\le s_kx_k-1+\ln s_k,k=1,\dots,N,\tag{3.13}$$

$$t_i(\omega_i-\omega_i^L)+\ln\omega_i^L\le\ln\omega_i\le t_i\omega_i-1+\ln t_i,i=1,\dots,M.\tag{3.14}$$

将(3.11) (3.12)带入方程(3.13) (3.14)可得(3.2)的上下界

$$\begin{aligned}LF_i^L(x,\omega_i)=&\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^+[L_{il}(1+\sum_{k=1}^{N}A_{lk}(s_kx_k-s_kx_k^L+\ln x_k^L)+t_i\omega_i-t_i\omega_i^L+\ln\omega_i^L-\ln L_{il})]\\&+\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^-[L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}(s_kx_k-1+\ln s_k)+t_i\omega_i-1+\ln t_i-Z_{il}^L)+\exp(Z_{il}^L)];\end{aligned}$$

由 $(\overline{c_i})_l^+$， $(\overline{c_i})_l^-$ 性质可简化为：

$$LF_i^L(x,\omega_i)=\sum_{l=1}^{K}(\overline{c}_i)_l^{\mathrm{T}}L_{il}(\sum_{k=1}^{N}A_{lk}s_kx_k+t_i\omega_i)+\mu_i^L$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mu_i^L = & \sum_{l=1}^{K} (\overline{c}_i)_l^+ [L_{il}(1+\sum_{k=1}^{N} A_{lk}(-s_k x_k^L + \ln x_k^L) - t_i \omega_i^L + \ln \omega_i^L - \ln L_{il})] \\
& + \sum_{l=1}^{K} (\overline{c}_i)_l^- [L_{il}(\sum_{k=1}^{N} A_{lk}(-1+\ln s_k) - 1 + \ln t_i - Z_{il}^L) + \exp(Z_{il}^L)];
\end{aligned}
$$

同理可相应的写出 $F_i(z,z_i^0)$, $G_i(z,z_i^0)$, $H_k^i(z,z_i^0)$ 的线性上下界，

$$UF_i^U(x,\omega_i) = \sum_{l=1}^{K} (\overline{c}_i)_l^{\mathrm{T}} L_{il} (\sum_{k=1}^{N} A_{lk} s_k x_k + t_i \omega_i) + \mu_i^U,$$

$$LG_i^L(x,\omega_i) = \sum_{l=1}^{K} (\overline{d}_i)_l^{\mathrm{T}} L_{il} (\sum_{k=1}^{N} A_{lk} s_k x_k + t_i \omega_i) + \nu_i^L,$$

$$UG_i^U(x,\omega_i) = \sum_{l=1}^{K} (\overline{d}_i)_l^{\mathrm{T}} L_{il} (\sum_{k=1}^{N} A_{lk} s_k x_k + t_i \omega_i) + \nu_i^U,$$

$$(LF_k^i)^L(x,\omega_i) = \sum_{l=1}^{K} (\overline{f}_k)_l^{\mathrm{T}} L_{il} (\sum_{k=1}^{N} A_{lk} s_k x_k + t_i \omega_i) + (\phi_k^i)^L.$$

至此，已将求解 $y_i, i=1,...M$ 上下界的问题转化为一个如下的线性问题：

$$
(LY_i)\begin{cases}
\min\ LF_i^L(x,\omega_i) \\
s.t.\ \ LG_i^L(x,\omega_i) \le 1, \\
\qquad UG_i^U(x,\omega_i) \ge 1, \\
\qquad (LF_k^i)^L(x,\omega_i) \le 0,\ k=1,...,M, \\
\qquad 0 < x^L \le x \le x^U < +\infty, \\
\qquad 0 < \omega^L \le \omega \le \omega^U < +\infty,
\end{cases}
$$

$$
(UY_i)\begin{cases}
\min\ LF_i^U(x,\omega_i) \\
s.t.\ \ LG_i^L(x,\omega_i) \le 1, \\
\qquad UG_i^U(x,\omega_i) \ge 1, \\
\qquad (LF_k^i)^L(x,\omega_i) \le 0,\ k=1,...,M, \\
\qquad 0 < x^L \le x \le x^U < +\infty, \\
\qquad 0 < \omega^L \le \omega \le \omega^U < +\infty,
\end{cases}
$$

通过求解线性问题 (LY_i)，(UY_i) 可以轻易的得到 $y_i, i=1,...M$ 的上下界。

第 4 章 全局算法

本章的分支定界算法以用于使用前述的线性规划问题(LP)来解决全局规划问题。

分支定界算法的基本思想是将矩形域划分成多个与线性问题相关联的子矩形域。在算法的第k阶段，假定有一系列有效节点表示为Q_k，每个都与一个矩形$H \subseteq H^0$，$\forall H \in Q_k$相关。对每个矩形域H，我们都能通过求解相应(LP)问题的$LB(H)$来计算 QFGP 问题最优解的下界。在第 k 步矩形域上的最优值可通过计算$LB_k = \max\{LB(H), \forall H \in Q_k\}$来得到。我们将每步的矩形域用下述的方法分成 2 个子矩形域，分别计算每个矩形域的边界。同时，可更新各种所需参数。基于如前的计算节点的方法，可得到用于下一阶段的可用节点，并此方法会被重复直到观测到收敛。

4．1 分支定界

在本文中，选择一种简单的二分法作为分支定界规则。由于分支定界树中对任意变量终会收缩到一点，故这样的规则足以保证收敛性。这里将每步考虑的子区域定义为$H = \{x \in R^n \left| x_\tau^L \le x_\tau \le x_\tau^U, \tau = 1, ..., N \right.\}$。

定义分支规则如下：

（1） 令

$$j = \arg\max\{x_\tau^L - x_\tau^L, \tau = 1, ..., N\}.$$

（2） 令γ_j满足

$$\gamma_j = \frac{1}{2}(x_j^U + x_j^L).$$

（3）令

$$H^1 = \{x \in R^n \left| x_\tau^L \le x_\tau \le x_\tau^U, \tau \ne j, x_j^L \le x_j \le \gamma_j \right.\}.$$

$$H^2 = \{x \in R^n \left| x_\tau^L \le x_\tau \le x_\tau^U, \tau \ne j, \gamma_j \le x_j \le x_j^U \right.\}.$$

通过如上的规则每次分枝都将矩形 H 分成两块子矩形 H^1 和 H^2 。

4．2 算法描述

第 0 步：选择 $\varepsilon \ge 0$ 。求出线性松弛问题(LP)在 $H = H^0$ 时的最优解 x^0 和最优值 $LB(H^0)$ 。令

$$LB_0 = LB(H^0), \quad UB_0 = f(x^0)$$

如果 $UB_0 - LB_0 \le \varepsilon$ ，则循环停止。 x^0 即是 QFGP 问题的 ε 最优解。

否则，令

$$Q_0 = \{H^0\}, \quad F = \varnothing, \quad k = 1$$

同时转至第 k 步。

第 k 步： $k \ge 1$ 。

第 $k1$ 步：令 $UB_k = UB_{k-1}$ 。通过分支定界规则划分 H^{k-1} 为 2 个子矩形 $H^{k,1}, H^{k,2} \subseteq R^n$ 。再令 $F = F \bigcup \{H^{k-1}\}$ 。

第 $k2$ 步：对每个新区间 $H^{k,1}, H^{k,2}$ ，分别在当前矩形域中计算其线性约束函数 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ (i = 1, ..., q)$ 的下界如下

$$\sum_{a_{ij}>0} a_{ij} x_j^L + \sum_{a_{ij}<0} a_{ij} x_j^U \quad ,$$

其中 x_j^L 和 x_j^U 表示当前矩形域中的上下界。如果存在某些 $i \in \{1, ..., q\}$ 满足

$$\sum_{a_{ij}>0} a_{ij} x_j^L + \sum_{a_{ij}<0} a_{ij} x_j^U > b_i$$

而相应的节点会落入 F 。 $H^{k,1}, H^{k,2}$ 全部并入 F 中。

$$F = F \bigcup \{H^{k,1}, H^{k,2}\}$$

然后转入第 $k6$ 步。

第 $k3$ 步：对为选择的子矩形 $H^{k,1}, H^{k,2}$ ，更新其相应的参数 K_j, K_{1i}, K_{2i} ，

$(i=1,...,M, j=1,...,N)$。计算并求出线性松弛问题(LP)在 $H=H^{k,t}$ 时的最优解 $x^{k,t}$ 和最优值 $LB(H^{k,t})$，其中 t=1 或 2 或 1，2。如可能，则更新上界

$$UB_k=\max\{UB_k, f(x^{k,t})\}$$

并令 x^k 表示满足 $UB_k=f(x^k)$ 的点。

第 $k4$ 步：如果 $UB_k \le LB(H^{k,t})$，则设

$$F=F\bigcup\{H^{k,1}\}。$$

第 $k5$ 步：令

$$F=F\bigcup\{H\in Q_{k-1}\big|LB(H)\le UB_k\}。$$

第 $k6$ 步：

$$Q_k=F\bigcup\{H\in Q_{k-1}\bigcup\{H^{k,1},H^{k,2}\},H\notin F\}。$$

第 $k7$ 步：令 $LB_k=\max\{LB(H)\big|H\in Q_k\}$ 并让 $H^k\in Q_k$ 且满足 $LB_k=LB(H^k)$。若 $UB_k-LB_k\le\varepsilon$，则停止循环且 x^k 即是 QFGP 问题 1.1 的 ε 最优解。否则令 $k=k+1$ 并转入第 k 步。

第 5 章 收敛性证明

这里考虑 RLP 问题和原问题之间收敛性的关系。另关于分支定界算法的收敛性证明可参见参考文献[1]。

定理 5.1 令 $\omega_i = z_i^U - z_i^L$，$i = 1,\dots,M$，则对任意 $x \in H$，$F_2^L(x)$，$F(x)$ 满足：

$F_2^L(x) - F(x) \to 0$，$\omega_i \to 0,\quad i = 1,\dots,M$

证明：对任意 $x \in H$，令

$$\Delta = F_2^L(x) - F(x) = \sum_{j=1}^{N}(F_{2j}^L(x) - F_j(x))$$

$$\Delta_j^1 = F_{2j}^L(x) - F_{1j}^L(x)$$

$$\Delta_j^2 = F_{1j}^L(x) - F_j(x)$$

则有：

$$\Delta = \sum_{j=1}^{N}(\Delta_j^1 + \Delta_j^2) \tag{5.1}$$

首先讨论 Δ_j^2

$$\begin{aligned}\Delta_j^2 &= F_{1j}^L(x) - F_j(x)\\ &= t_j K_j \sum_{i=1}^{M}\gamma_{ij}(\ln(x^{\mathrm{T}}P_i x + c_i^{\mathrm{T}}x + \alpha_i) - \ln(x^{\mathrm{T}}Q_i x + d_i^{\mathrm{T}}x + \beta))\\ &\quad + t_j^+ K_j(1 - \ln K_j) + t_j^-(-K_j Y_j^L + \exp(Y_j^L)) - t_j\gamma_{ij}\exp(Y_j)\\ &= t_j K_j Y_j + t_j^+ K_j(1 - \ln K_j) + t_j^-(-K_j Y_j^L + \exp(Y_j^L)) - t_j\exp(Y_j)\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$= t_j^+(K_j(Y_j + 1 - \ln K_j) - \exp(Y_j)) + t_j^- K_j(Y_j - Y_j^L) + t_j^-(\exp(Y_j^L) - t_j^-\exp(Y_j))$$

其中由 $\omega_i \to 0$ 可易知 $Y_j^U - Y_j^L \to 0$，从而

$$Y_j - Y_j^L \to 0，\ \exp(Y_j^L) - t_j^-\exp(Y_j) \to 0。$$

由定理 1.1 的定义和幂函数性质可知 $Y_j^U - Y_j^L \to 0$ 时，

$$K_j(Y_j + 1 - \ln K_j) - \exp(Y_j) \to 0 \tag{5.3}$$

从而由(5.2) (5.3) (5.4)知当 $Y_j^U - Y_j^L \to 0$ 时，

$$\Delta_j^2 \to 0\text{。} \tag{5.4}$$

其次讨论 Δ_j^1

$$\begin{aligned}\Delta_j^2 &= F_{1j}^L(x) - F_j(x) \\ &= t_j K_j \sum_{i=1}^M \gamma_{ij}(\ln(x^{\mathrm{T}}P_i x + c_i^{\mathrm{T}}x + \alpha_i) - \ln(x^{\mathrm{T}}Q_i x + d_i^{\mathrm{T}}x + \beta)) + t_j^+ K_j(1 - \ln K_j) \\ &\quad + t_j^-(-K_j Y_j^L + \exp(Y_j^L)) - t_j^+ K_j(1 - \ln K_j) - t_j^-(-K_j Y_j^L + t_j^- \exp(Y_j^L)) \\ &\quad - t_j K_j(\sum_{i=1}^M \gamma_{ij}(K_{1i}(x^{\mathrm{T}}P_i x + c_i^{\mathrm{T}}x + \alpha_i - f_i^L) - K_{2i}(x^{\mathrm{T}}Q_i x + d_i^{\mathrm{T}}x + \beta)) \\ &\quad + t_j^+ K_j(\sum_{i=1}^M \gamma_{ij}(\ln f_i^L - 1 + \ln K_{2i}) + t_j^- K_j(\sum_{i=1}^M \gamma_{ij}(-1 + \ln K_{1i} + \ln g_i^L))\end{aligned}$$

分别令

$$\begin{aligned}\Delta_j^{2,1} &= t_j(\ln(x^{\mathrm{T}}P_i x + c_i^{\mathrm{T}}x + \alpha_i) - \ln(x^{\mathrm{T}}Q_i x + d_i^{\mathrm{T}}x + \beta) - K_{1i}(x^{\mathrm{T}}P_i x + c_i^{\mathrm{T}}x + \alpha_i - f_i^L) \\ &\quad - K_{2i}(x^{\mathrm{T}}Q_i x + d_i^{\mathrm{T}}x + \beta)) + t_j^+(\ln f_i^L - 1 + \ln K_{2i}) + t_j^-(-1 + \ln K_{1i} + \ln g_i^L)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_j^{2,2} &= t_j^+ K_j(1 - \ln K_j) + t_j^-(-K_j Y_j^L + \exp(Y_j^L)) - t_j^+ K_j(1 - \ln K_j) - t_j^-(-K_j Y_j^L + t_j^- \exp(Y_j^L)) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_j^{2,2+} &= \ln(x^{\mathrm{T}}P_i x + c_i^{\mathrm{T}}x + \alpha_i) - K_{1i}(x^{\mathrm{T}}P_i x + c_i^{\mathrm{T}}x + \alpha_i - f_i^L) - \ln f_i^L \\ \Delta_j^{2,1+} &= -\ln(x^{\mathrm{T}}Q_i x + d_i^{\mathrm{T}}x + \beta) + K_{2i}(x^{\mathrm{T}}Q_i x + d_i^{\mathrm{T}}x + \beta) - 1 - \ln K_{1i} \\ \Delta_j^{2,1-} &= \ln(x^{\mathrm{T}}P_i x + c_i^{\mathrm{T}}x + \alpha_i) - K_{1i}(x^{\mathrm{T}}P_i x + c_i^{\mathrm{T}}x + \alpha_i - f_i^L) - 1 - \ln K_{2i} \\ \Delta_j^{2,2-} &= -\ln(x^{\mathrm{T}}Q_i x + d_i^{\mathrm{T}}x + \beta) - K_{2i}(x^{\mathrm{T}}Q_i x + d_i^{\mathrm{T}}x + \beta) - \ln g_i^L\end{aligned} \tag{5.5}$$

则 $\Delta_j^2 = K_j \sum_{i=1}^M \gamma_{ij}\Delta_j^{2,1} = K_j \sum_{i=1}^M \gamma_{ij}(\Delta_j^{2,2+} + \Delta_j^{2,1+} + \Delta_j^{2,1-} + \Delta_j^{2,2-})$

令 $u_i = \dfrac{f_i^U}{f_i^L}$，$v_i = \dfrac{g_i^U}{g_i^L}$，由(5.5)可推出，首先 $\Delta_j^{2,1+}$ 是一个凸函数，从而有函数性质可知对将 $x^{\mathrm{T}}Q_i x + d_i^{\mathrm{T}}x + \beta$ 看作变量，其在 f_i^L，f_i^U 达到最大值。故有：

$$\Delta_j^{2,1+,\max} = \ln\frac{u_i}{u_i - 1} - 1 - \frac{\ln u_i}{u_i - 1}$$

而对 $\Delta_j^{2,2+}$ 非凸，且由函数性质知，在 $1/K_{1i}$ 处达到极值。从而有：

$$\Delta_j^{2,2+,\max} = \frac{\ln v_i}{v_i - 1} - 1 - \ln\frac{v_i}{v_i - 1}$$

由u_i，v_i定义可知当$Y_j^U - Y_j^L \to 0$时，$u_i \to 1$，$v_i \to 1$。从而显然

$$\Delta_j^{2,1+,\max} \to 0\text{，}\Delta_j^{2,2+,\max} \to 0$$

同理可知$\Delta_j^{2,1-,\max} \to 0$，$\Delta_j^{2,2-,\max} \to 0$

又知$\Delta_j^{2,1+},\Delta_j^{2,2+},\Delta_j^{2,1-},\Delta_j^{2,2-} \ge 0$，从而有：

$$\Delta_j^{2,1+} \to 0\text{，}\Delta_j^{2,2+} \to 0\text{，，}\Delta_j^{2,1-} \to 0\ \Delta_j^{2,2-} \to 0$$

即$\Delta_j^2 \to 0$，当$\omega_i \to 0,\quad i = 1,\ldots,M$时

因此，由(5.1) (5.4)所定义可得当$\omega_i \to 0,\quad i = 1,\ldots,M$时，$\Delta_j \to 0$。 □

第 6 章 数值算例

为检验算法稳定性和效率，故使用数值算例进行检验。

算法在 matlab 下被实现，单层非线性子算法采用规划法，线性规划使用 matlab 线性规划程序包 linprog。

实验环境：Windows XP sp2+Matlab 7.0。

分别令精度 $\delta = 0.0001$，$\delta = 0.001$ 进行试验。

编号	最优解			最小值	精度
	x_1	x_2	x_3	min	δ
1	0.8411	0.2333	0.1111	2.9633	0．0001
2	0.010	0.867	0.912	2.812	0．001
3	0.626	0.114	0.417	2.942	0．001
4	1.111	0.111	1.069	2.320	0．001

算例 1（参考文献[3]）

$$\min \quad \frac{3x_1+5x_2+3x_3+50}{3x_1+4x_2+5x_3+50}+\frac{3x_1+5x_2+50}{4x_1+3x_2+2x_3+50}+\frac{4x_1+2x_2+4x_3+50}{5x_1+4x_2+3x_3+50}$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & 6x_1+3x_2+3x_3 \le 10 \\ & 10x_1+3x_2+8x_3 \le 10 \\ & x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

算例 2

$$\min \quad \frac{x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}3&5&2\\5&4&1\\2&1&3\end{pmatrix}x+(3,5,3)x+50}{x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&1\\2&1&3\end{pmatrix}x+(3,4,5)x+50}+\frac{x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}3&5&2\\5&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}x+(3,5,0)x+50}{x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}3&5&2\\5&4&1\\2&1&3\end{pmatrix}x+(3,4,5)x+50}+\frac{x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}3&5&2\\5&4&1\\2&1&3\end{pmatrix}x+(4,2,4)x+50}{x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}3&5&2\\5&4&1\\2&1&3\end{pmatrix}x+(5,4,3)x+50}$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & 6x_1+3x_2+3x_3 \le 10 \\ & 10x_1+3x_2+8x_3 \le 10 \\ & x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

算例 3

$$\min \quad \left(\frac{x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} x + (3,5,3)x + 50}{x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} x + (3,4,5)x + 50} \right)^2 + \left(\frac{3x_1 + 5x_2 + 50}{4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 50} \right)^{1.5}$$

$$s.t \quad x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} x + (5,4,3)x \le 50$$

$$10x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

算例 3

$$\min \quad \left(\frac{x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} x + (3,5,3)x + 50}{x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} x + (3,4,5)x + 50} \right)^2 \cdot \left(\frac{(3,5,0)x + 5}{(3,4,5)x + 5} \right)^{1.5} + \left(\frac{x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x + (3,5,3)x + 50}{x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x + (3,4,5)x + 50} \right)^{2.3}$$

$$s.t \quad x^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} x + (5,4,3)x \le 50$$

$$10x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

总结

本文将下层函数在定义域内下界大于零的二次分式几何规划模型转化为单层规划问题，并通过进一步线性化放缩转化为单层线性规划。由此提出了一种基于分枝定界算法的改进算法用于解决此规划问题，并通过理论证明和数值算例验证算法的收敛性。

总言之，对分式进行的两步放缩使之线性化的变形方法是一种行之有效子分式规划问题解决方案。每次求解局部最优解时，分式变形方法可高效地得到分式的线性上下界以用于分支定界算法。

然而由数值计算过程中可以看出，算法的效率未能达到理想的效果。究其原由，一方面由于为更精确的估计分式的上下界而采用的子规划算法占用了大量的计算量；另一方面由于约束条件再进行线性化时会导致可行域被放大，以至于采用分支定界的全局化算法每步删除的 F 域过小，导致收敛速度过慢。

估计分式的上下界是需要大量调用的子算法，文章中研究了参数法，规划法，线性化放缩等方法。一个常遇到的问题是在苛刻的实验条件下，即 $\min g_i(x) \to 0$ 的情况下，使用参数法，或进行线性放缩的过程中会得到小于零的下界，这是最经常导致程序异常的错误。而一个计算出 $g_i(x)$ 精确的大于零的下界子规划的运算量又是难以接受的。

所以一种更快更精确的二次规划算法对整体算法的效率有很大的影响，本文中放弃了效率极高但精度很差的参数法估计，而提出一种基于几何规划的放缩方法来估计 $g_i(x)$ 上下界。但对于苛刻的环境，只有运用规划方法精确的解出 $g_i(x)$ 的 QP 全局最优解才可以满足基本算法的要求，而这种在循环中嵌套全局规划的方法虽然精确而有效，但效率是几乎难以忍受的。故而选择一种能满足基本要求而最具效率的二次规划算法是解决存在问题的关键。

故而说如何进一步提高算法效率和健壮性，还有待进一步研究。

致谢

首先诚挚的感谢指导老师张可村教授，老师悉心的教导使我得以一窥分式规划领域的深奥，不时的讨论并指点我正确的方向，使我在研究中获益匪浅。老师对学问的严谨更是我辈学习的典范。

本论文的完成另外亦得感谢的王莉研究生的大力协助。因为有你的启发式的教导及无微不至的帮忙，使得本论文能够顺利完成。

参考文献

[1] S. J. Qu, K. C. Zhang, Y. Ji, A global optimization algorithm using parametric linearization relaxation, Applied Mathematics and Computation, 186: 763-771 (2007).

[2] Y. J. Wang, Z. A. Liang, A deterministic global optimization algorithm for generalized geometric programming, Applied Mathematics and Computation, 168:722-737(2005).

[3] P. P. Shen, C. F. Wang, Global optimization for sum of generalized fractional functions, Journal of Computational and Applied Mathematics 214: 1-12 (2008).

[4] Dantzig, G.B., A. Orden, and P. Wolfe, Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear from Under Linear Inequality Constraints, Pacific Journal Math., 5: 183-195.

[5] Mehrotra, S., On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method, SIAM Journal on Optimization, Vol. 2, pp. 575-601, (1992).

[6] Zhang, Y., Solving Large-Scale Linear Programs by Interior-Point Methods Under the MATLAB Environment," Technical Report TR96-01, Department of Mathematics and Statistics, University of Maryland, Baltimore County, Baltimore, MD, July (1995).

[7] H. Konno, K. Abe, Minimization of the sum of three linear fractional functions , Journal of Global Optimization. 15:419-432 (1996).

[8] H. Konno, Y. Yajima, T. Matsui, Parametric simplex algorithm for solving a special class of nonconvex minimization problems, Journal of Global Optimization. 1:65-81(1999).

[9] F. S. Wang, K. C. Zhang, X. L. Tan, A fractional programming algorithm based on conic quasi-Newton trust region method for unconstrained minimization, Journal of Applied Mathematics and Computation. 181(2):1061-1067 (2006).

[10] S. J. Qu, K. C. Zhang, Y. Ji, A global optimization algorithm using parametric linearization relaxation, Journal of Applied Mathematics and Computation. 186:763-771 (2007).

[14] 郑玉谬，赵玉超，刘国宏，李瑞波，一类非线性两层规划问题的递阶优化解法，控制与决策，10:1195-1200 (2004).