复合斯特恩-盖拉赫实验中的量子力学基本原理

黄永义 [1,2†]

（1. 西安交通大学光信息科学与技术系；
2. 非平衡物质结构与量子调控教育部重点实验室，陕西 西安 710049）

摘　要：从一个复合斯特恩-盖拉赫实验装置的结果分析，逐步引入量子力学的基本知识，包括二维希尔伯特空间中波函数、自旋算符具体形式、态叠加原理，测量理论、不确定关系和波函数随时间演化的薛定谔方程等。

关键词：复合斯特恩-盖拉赫实验，量子力学基本知识
中图分类号：O413.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1003-7551(2011)04-0032-07

1　引言

量子力学和相对论是现代物理理论的两大基石，特别地量子力学是几乎所有物理的分支如凝聚态物理、原子分子物理、激光、原子核物理及核能利用、粒子物理、表面物理、低温物理、介关物理、量子通信和计算、量子化学和天体物理等等的理论基础。量子力学也是全国高校所有物理类、材料、电子类专业的基础课，然量子力学内容艰深，其公式表述又比较抽象，使得学生理解起来有一定的困难。电子自旋，核自旋，光子的极化态，量子点等系统都是最简单的量子系统，本文以电子自旋为例，通过复合斯特恩-盖拉赫（O. Stern-W. Gerlach）实验装置结果的分析，逐步引入量子力学的基本知识。教师按这样的思路讲解，学生不会在感到那么抽象容易理解接受量子力学的精髓。

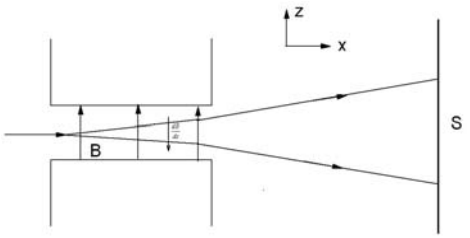

图 1　斯特恩-盖拉赫实验装置图

典型的斯特恩-盖拉赫实验装置如图 1 所示[1]，一束银原子束穿过有磁场 B 的区域，磁场是沿 z 轴非均匀场，其梯度 ∇B 也是沿着 z 轴。这样原子束在 z 方向将受到力的作用，梯度 ∇B 也是沿着 z 轴。这样原子束在 z 方向将受到力的作用，$F_z = \mu_z \nabla B = \mu_z \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}$。1921 年斯特恩和盖拉赫的实验结果表明，银原子束分裂为两束，而基态时银原子的轨道角动量为零，实验结果和当时的期待不符合。奇怪的斯特恩-盖拉赫实验结果，反常塞曼效应和碱金属原子光谱的精细结构的事实促使乌伦贝克（G. Uhlenbeck）和戈德斯米特（S. Goudsmit）提出了电子自旋的概念[2]。按乌伦贝克和戈德斯米特的假说，电子的自旋在任意的方向投影只有两个分量 $S_z = \pm\dfrac{\hbar}{2}$，沿 x 轴和 y 轴投影也是如此，对应地电子的自旋磁矩在特定的方向也只有两个分量，分别为 $\mu_z = \mp\dfrac{e\hbar}{2m} = \mp\mu_B$，如果 $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}$ 方向沿-z 方向，则自旋朝上的银原子会受到向上的力，而自旋朝下的银原子会受到朝下的力，银原子束在非均匀磁场中的分裂是电子自旋存在的直接证据。

复合斯特恩-盖拉赫实验装置是将若干个斯特恩-盖拉赫实验组合起来，实验结果往往出乎意料，有点违反人们的常理的直觉判断，图 2 是很典型的复合斯特恩-盖拉赫实验装置的示意图[3]。当一束银原子束通过磁场方向为 z 的斯特恩-盖拉赫装置，分裂后两银原子束银价电子的自旋取向为沿 z 方向朝上 $|+>_z$ 和朝下 $|->_z$。当用挡板 I 挡住自旋朝下 $|->_z$ 的银原子束，让自旋朝上 $|+>_z$ 的银原子束通过磁场方向沿 x 方向的斯特恩-盖拉赫装置后，自旋沿 z 朝上 $|+>_z$ 的银原子束又分裂为自旋沿 x 轴朝上 $|+>_x$ 和朝下 $|->_x$ 的两束。

收稿日期：2011-10-05
† 通讯作者：yyhuang@mail.xjtu.edu.cn

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

再次用挡板 II 挡住自旋沿 x 轴朝下$|->_x$的银原子束，让自旋沿 x 朝上$|+>_x$的银原子束通过一个沿 z 轴的斯特恩-盖拉赫装置后，自旋沿 x 朝上$|+>_x$的银原子束又分裂为自旋沿 z 轴朝上$|+>_z$和朝下$|->_z$的两束。

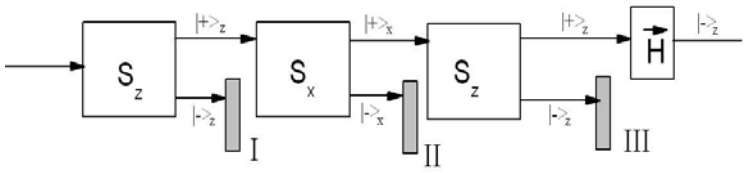

图 2　复合斯特恩-盖拉赫实验装置示意图

有意思的是如果不放置第二个挡板 II，即让自旋沿 x 朝上$|+>_x$和朝下$|->_x$的银原子束同时通过磁场沿 z 方向的斯特恩-盖拉赫装置后，只能观察到自旋沿 z 朝上$|+>_z$的银原子束。还有一个经验直觉无法理解的问题，既然前两个斯特恩-盖拉赫装置已经把沿 z 方向的银原子束滤掉了，为什么通过第三个沿 z 方向的斯特恩-盖拉赫装置还会出现沿 z 方向的银原子呢？如果我们让沿 z 方向朝上$|+>_z$的银原子束通过磁场 $\boldsymbol{H}=(H_x,H_y,H_z)$，那么银原子束的自旋取向会沿 z 方向朝下$|->_z$，从自旋沿 z 方向朝上$|+>_z$演化到自旋沿 z 方向朝下$|->_z$需要多长时间呢？这些有趣的问题都可以通过量子力学知识的学习来理解。

2　波函数，自旋算符矩阵表示，态叠加原理

令自旋算符$\boldsymbol{s}=\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$，其中$\boldsymbol{\sigma}$为无量纲的算符，习惯上称$\boldsymbol{\sigma}$为 Pauli 算符。由于$\boldsymbol{s}$沿任意方向投影的分量均为$\pm\frac{\hbar}{2}$，因此$\boldsymbol{\sigma}$沿任意方向的投影只能为$\pm1$，因此我们有[4]

$$\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=1 \tag{1}$$

由自旋直角坐标分量满足一般角动量的对易关系$\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}=\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{L}$，得到$\boldsymbol{\sigma}$对易关系，

$$\begin{cases}\sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_x=2\mathrm{i}\sigma_z\\ \sigma_y\sigma_z-\sigma_z\sigma_y=2\mathrm{i}\sigma_x\\ \sigma_z\sigma_x-\sigma_x\sigma_z=2\mathrm{i}\sigma_y\end{cases} \tag{2}$$

用σ_y左乘和右乘（2）中的第二式得

$$\sigma_z-\sigma_y\sigma_z\sigma_y=2\mathrm{i}\sigma_y\sigma_x$$

$$\sigma_y\sigma_z\sigma_y-\sigma_z=2\mathrm{i}\sigma_x\sigma_y$$

两式相加得$\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x=0$，类似的还能得到如下关系式

$$\begin{cases}\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x=0\\ \sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_y=0\\ \sigma_z\sigma_x+\sigma_x\sigma_z=0\end{cases} \tag{3}$$

将（2）和（3）联立，我们得到

$$\begin{cases}\sigma_x\sigma_y=-\sigma_y\sigma_x=\mathrm{i}\sigma_z\\ \sigma_y\sigma_z=-\sigma_z\sigma_y=\mathrm{i}\sigma_x\\ \sigma_z\sigma_x=-\sigma_x\sigma_z=\mathrm{i}\sigma_y\end{cases} \tag{4}$$

(1)式、(4）式和厄米性$\boldsymbol{\sigma}^+=\boldsymbol{\sigma}$包含了自旋算符$\boldsymbol{\sigma}$所有代数关系，自旋算符的厄米性根源于自旋的可观察性，其本征值必然为实数。

银原子束从磁场沿 z 方向的斯特恩-盖拉赫装置出来后分裂为自旋沿 z 轴朝上$|+>_z$和朝下$|->_z$的两束，两个态分别对应$\sigma_z=\pm1$两个本征值，即$\sigma_z|\pm>_z=\pm|\pm>_z$。在$|+>_z$和$|->_z$所张的二维希尔伯特（D. Hilbert）空间中，σ_z可以表示为

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{5}$$

σ_z 的本征态$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$可以这样确定

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0 \tag{6}$$

上式有解则要求行列式为零，即$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$，得$\lambda=\pm1$，将$\lambda=1$代入（6）式中，得 b=0，因此$\lambda=1$的本征态为$\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}$，由归一化条件$(a\ \ 0)\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}=1$得 a=1，$\lambda=1$的本征态为$\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，类似的$\lambda=-1$的本征态为$\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，由此我们得到

$$|+>_z=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\equiv|0>,\ \ |->_z=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\equiv|1> \tag{7}$$

上式的本征态称为$\lambda=\pm1$的本征波函数，而力学量σ_z在具体的表象中变为一个简单的矩阵。

设$\sigma_x=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，由$\sigma_z\sigma_x+\sigma_x\sigma_z=0$得$\begin{pmatrix}a & b\\ -c & -d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a & b\\ -c & d\end{pmatrix}$，因此有$a=d=0$，这样$\sigma_x$简化为$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & b\\ c & 0\end{pmatrix}$。再根据厄米性$\sigma_x^{+}=\sigma_x$的要求，可得$c=b^*$，于是$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & b\\ b^* & 0\end{pmatrix}$。由（1）的要求得

$$\sigma_x^{\,2}=\begin{pmatrix}0 & b\\ b^* & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b\\ b^* & 0\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}|b|^2 & 0\\ 0 & |b|^2\end{pmatrix}=1$$

我们得到$|b|^2=1$，略去相位可以取$b=1$，这样我们得到$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$。利用（4）式，我们得到

$$\sigma_y=-\mathrm{i}\sigma_z\sigma_x=-\mathrm{i}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}.$$

这样我们就得到了在$|0>,|1>$表象下，三个自旋算符的矩阵表示 Pauli 矩阵，

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{8}$$

仿照求$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$本征值和本征函数的方法，容易求出$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}$的本征值和本征波函数，两者的本征值均为$\lambda_{1,2}=\pm1$，对应的本征函数分别为 $|\pm>_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm1\end{pmatrix},|\pm>_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm\mathrm{i}\end{pmatrix}$. 沿任意方向$\boldsymbol{u}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$的自旋算符的本征值和本征函数又怎样呢？显然有

$$\sigma_{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{u}=\sigma_x\sin\theta\cos\varphi+\sigma_y\sin\theta\sin\varphi+\sigma_z\cos\theta)$$

在$|0>,|1>$表象下将（8）式代入上式得

$$\sigma_{\boldsymbol{u}}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-\mathrm{i}\varphi}\\ \sin\theta e^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix} \tag{9}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\sigma_{\boldsymbol{u}}$的本征值$\lambda_{\boldsymbol{u}}=\pm1$，对应的本征函数为$|+>_{\boldsymbol{u}}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-\mathrm{i}\varphi/2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{\mathrm{i}\varphi/2}\end{pmatrix}$，$|->_{\boldsymbol{u}}=\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}e^{-\mathrm{i}\varphi/2}\\ \cos\frac{\theta}{2}e^{\mathrm{i}\varphi/2}\end{pmatrix}$。

定义$|0>,|1>,|\pm>_x,|\pm>_y,|\pm>_{\boldsymbol{u}}$的共轭态矢为$<0|,<1|,<\pm|_x,<\pm|_y,<\pm|_{\boldsymbol{u}}$，这些波函数之间都存在所谓的正交归一性，如$<0|0>=(1\quad 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1$，$<0|1>=(1\quad 0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0$。值得注意的是$|\pm>_x,|\pm>_y,|\pm>_{\boldsymbol{u}}$均可用$|0>,|1>$展开，即

$$|\pm>_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\pm1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0>\pm|1>)，\quad |\pm>_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\pm\mathrm{i}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0>\pm\mathrm{i}|1>),$$

$$|+>_{\boldsymbol{u}}=\cos\frac{\theta}{2}e^{-\mathrm{i}\varphi/2}|0>+\sin\frac{\theta}{2}e^{\mathrm{i}\varphi/2}|1>，\quad |->_{\boldsymbol{u}}=-\sin\frac{\theta}{2}e^{-\mathrm{i}\varphi/2}|0>+\cos\frac{\theta}{2}e^{\mathrm{i}\varphi/2}|1>.$$

这是一个普遍的规律，称为态叠加原理，相应地，$|0>,|1>$也可以用$|\pm>_x,|\pm>_y,|\pm>_{\boldsymbol{u}}$进行展开成

$$|0>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+>_x+|->_x),|1>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+>_x-|->_x)，$$

或者

$$|0>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+>_y+|->_y),|1>=\frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{i}}(|+>_y-|->_y)，$$

$$|0>=e^{\mathrm{i}\varphi/2}(\cos\frac{\theta}{2}|+>_{\boldsymbol{u}}-\sin\frac{\theta}{2}|->_{\boldsymbol{u}})$$

$$|1>=e^{-\mathrm{i}\varphi/2}(\sin\frac{\theta}{2}|+>_{\boldsymbol{u}}+\cos\frac{\theta}{2}|->_{\boldsymbol{u}})。$$

推而广之任何波函数均可以用$|0>,|1>$，$|\pm>_x,|\pm>_y,|\pm>_{\boldsymbol{u}}$进行展开，即

$$|\psi>=\alpha|0>+\beta|1>=\alpha'|+>_x+\beta'|->_x=\alpha''|+>_y+\beta''|->_y=\alpha'''|+>_{\vec{u}}+\beta'''|->_{\boldsymbol{u}}。$$

更进一步，我们来探讨展开系数的表达式

$$|\psi>=\alpha|0>+\beta|1>\Rightarrow\begin{cases}<0|\psi>=\alpha<0|0>+\beta<0|1>=\alpha\\<1|\psi>=\alpha<1|0>+\beta<1|1>=\beta\end{cases}，$$

于是得

$$|\psi>=<0|\psi>|0>+<1|\psi>|1>=|0><0|\psi>+|1><1|\psi>=(|0><0|+|1><1|)|\psi>$$

由于$|\psi>$是任意波函数，因此我们得

$$|0><0|+|1><1|=I \tag{10}$$

上式正是基矢$|0>,|1>$完备性表现。类似地我们还可以得到

$$|+>_x<+|+|->_x<-|=|+>_y<+|+|->_y<-|=|+>_{\vec{u}}<+|+|->_{\vec{u}}<-|=I。$$

由基矢完备性关系（10），我们可以得到算符谱分解形式，如

$$\sigma_z=\sigma_z|0><0|+\sigma_z|1><1|=|0><0|-|1><1|=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|i><i| \tag{11}$$

类似地

$$\sigma_x=|+>_x<+|-|->_x<-|=|0><1|+|1><0|，\quad \sigma_y=|+>_y<+|-|->_y<-|=i|1><0|-i|0><1|。$$

3 测量公设和不确定关系

在$|0>,|1>$表象下，任何波函数都可以展开为$|\psi>=\alpha|0>+\beta|1>$，它是态$|0>,|1>$的叠加，对应地测量$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$值结果只有两个$\pm1$，但两个本征值出现的概率不同。按玻恩（M. Born）的观点[5]，$+1$出现的概率为$|\alpha|^2$，而-1出现的概率为$|\beta|^2$，而如果测量的结果为$+1$，测量后的态不再是叠加态$|\psi>$，而

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

是坍塌到$|0>$态，如果测量的结果为-1，测量后的态将坍塌到$|1>$态。上述结论是量子力学的一个基本假设，引入投影算符$P_i=|i><i|$，可以将测量公设表述为，测量得到λ_i的概率为$<\psi|P_i|\psi>$，测量后系统处于状态为$\frac{P_i|\psi>}{\sqrt{<\psi|P_i|\psi>}}$。假设对$|\psi>=\alpha|0>+\beta|1>$测量$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$得到$+1$，那么得到$+1$的概率为$<\psi|P_0|\psi>=(\alpha^*<0|+\beta^*<1|)|0><0|(\alpha|0>+\beta|1>)=|\alpha|^2$，测量后系统的波函数坍塌至$\frac{P_i|\psi>}{\sqrt{<\psi|P_i|\psi>}}=\frac{|0><0|(\alpha|0>+\beta|1>)}{|\alpha|}=\frac{\alpha|0>}{|\alpha|}$，对于测量得到$-1$的情景如法炮制。最终得到$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$的平均值为

$$<\sigma_z>=\sum_i\lambda_i p_i=\sum_i\lambda_i<\psi|P_i|\psi>=<\psi|\sum_i\lambda_i P_i|\psi>=<\psi|\sigma_z|\psi> \qquad (12)$$

最后一步用到了算符的谱分解结果（11）式，代入得具体结果为$<\sigma_z>=\sum_i\lambda_i p_i=|\alpha|^2-|\beta|^2$.其他物理量的平均值也都具有（12）式的形式。

量子力学中的物理量通常除了平均值外，物理量的涨落也具有十分重要的意义，用测量结果的标准偏差ΔA表示$\Delta A=\sqrt{<(A-<A>)^2>}=\sqrt{<A^2>-<A>^2}$。如果两个力学量$A$和$B$不对易，即$[A,B]=AB-BA\neq 0$，对于任意量子态$|\psi>=\alpha|0>+\beta|1>$，均有下列不等式成立

$$\Delta A\Delta B\geq\frac{|<\psi|[A,B]|\psi>|}{2} \qquad (13)$$

上式称为海森堡（W. Heisenberg）不确定关系，它是量子力学的名片如同$E=mc^2$是狭义相对论的名片一样，是量子力学最瞩目的一个结论。下面我们对不确定关系作一简要的证明。

设$P=\Delta A=A-<A>,Q=\Delta B=B-<B>$，总可以把$<\psi|PQ|\psi>$写为复数$a+\mathrm{i}b$，而$a$和$b$都是实数，又$<\psi|[P,Q]|\psi>=<\psi|PQ|\psi>-<\psi|QP|\psi>=<\psi|PQ|\psi>-<\psi|PQ|\psi>^*=2\mathrm{i}b$，

$<\psi|\{P,Q\}|\psi>=<\psi|PQ|\psi>+<\psi|QP|\psi>=2a$，

于是我们得到

$$|<\psi|[P,Q]|\psi>|^2\leq|<\psi|[P,Q]|\psi>|^2+|<\psi|\{P,Q\}|\psi>|^2=4(a^2+b^2)$$

$$=4|<\psi|PQ|\psi>|^2\leq 4<\psi|P^2|\psi><\psi|Q^2|\psi>$$

两边开方即得（13）式。上式最后一步用到了柯西（A.L Cauchy）不等式$|<\gamma|\delta>|^2\leq<\gamma|\gamma><\delta|\delta>$。

具体来说对于$|0>$态，由于$[\sigma_x,\sigma_y]=\sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_x=2\mathrm{i}\sigma_z$，（13）式的不确定关系变为$\Delta\sigma_x\Delta\sigma_y\geq\frac{2|<0|\sigma_z|0>|}{2}=1$。基于以上量子力学的知识，我们可以讨论图 2 所示的复合斯特恩-盖拉赫实验结果了。银原子束通过沿 z 方向的斯特恩-盖拉赫实验装置，劈裂为电子自旋沿 z 方向朝上$|+>_z=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv|0>$和朝下$|->_z=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\equiv|1>$的两束。如果我们将自旋朝下的银原子束挡住，那么只有自旋朝上的银原子束，当我们用沿 x 方向的斯特恩-盖拉赫实验装置去测量自旋σ_x时，应该会得到什么结果呢？我们知道自旋σ_x算符可以写为$\sigma_x=|+>_x<+|-|->_x<-|=|0><1|+|1><0|$，作用于$|+>_z=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv|0>$得

$$\sigma_x|0>=|\sigma_x 0>=|+>_x<+|0>-|->_x<-|0>=|0><1|0>+|1><0|0>=|1>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+>_x-|->_x)$$

测量σ_x会得到两个结果：$\sigma_x=1$，概率为$<\sigma_x 0|+>_x<+|\sigma_x 0>=1/2$，测量后的态坍塌到$\frac{|+>_x<+|\sigma_x 0>}{\sqrt{<\sigma_x 0|+>_x<+|\sigma_x 0>}}=|+>_x$；$\sigma_x=-1$，概率为$<\sigma_x 0|->_x<-|\sigma_x 0>=1/2$，测量后的态坍塌到

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\frac{|->_x<-|\sigma_x 0>}{\sqrt{<\sigma_x 0|->_x<-|\sigma_x 0>}}=|->_x$。这意味着自旋沿 z 朝上的银原子束通过沿 x 方向的斯特恩-盖拉赫实验装置依然会裂为两条，自旋沿 x 方向朝上$|+>_x$和朝下$|->_x$的两束。更深层的原因是通过沿 z 方向的斯特恩-盖拉赫实验装置后的自旋沿 z 方向朝上的$|+>_z=|0>$态确定，$\Delta\sigma_z=0$，然后由不确定关系$\Delta\sigma_z\Delta\sigma_x\geq\frac{|<\psi|[\sigma_z,\sigma_x]|\psi>|}{2}>0$，$\Delta\sigma_x\to\infty$，这意味着$\sigma_x$完全不确定，此时测量$\sigma_x$时就会得到两种结果。方向沿 x 的斯特恩-盖拉赫实验装置起到类似于光学起偏器的作用，它把量子态$|+>_z=|0>$制备成$|+>_x$。

当我们用第二个挡板挡住$|->_x$原子束只让$|+>_x$通过第三个沿 z 方向的斯特恩-盖拉赫实验装置，会出现什么样的情景呢？我们知道$\sigma_z=|0><0|-|1><1|$，让σ_z作用于$|+>_x$得到

$$\sigma_z|+>_x=|0><0|+>_x-|1><1|+>_x=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0>-|1>)$$

测量σ_z会得到两个结果：$\sigma_z=1$，概率为$<\sigma_z+|0><0|\sigma_z+>_x=1/2$，测量后的态坍塌到$\frac{|0><0|\sigma_z+>}{\sqrt{<\sigma_z+|0><0|\sigma_z+>_x}}=|0>$；$\sigma_z=-1$，概率为$<\sigma_z+|1><1|\sigma_z+>_x=1/2$，测量后的态坍塌到$\frac{|1><1|\sigma_z+>}{\sqrt{<\sigma_z+|1><1|\sigma_z+>_x}}=|1>$。这说明$|+>_x$的银原子束通过沿 z 方向的斯特恩-盖拉赫实验装置后依然能够观察到两束原子束，它们的状态分别为$|0>,|1>$，概率各为 1/2。方向沿 z 的斯特恩-盖拉赫实验装置起到类似于光学检偏器的作用，它考察量子态$|+>_x$和量子态$|+>_z,|->_z$之间的偏振情况。这个结果表明了量子力学的一个基本特性，测量将会对系统的状态产生巨大的影响，而系统最后的状态只依赖最近一次进入斯特恩-盖拉赫实验装置原子中电子的自旋状态和斯特恩-盖拉赫实验装置的功能，系统对于过去没有记忆功能。然如果人们不进行测量σ_z，便无从得知原子束σ_z方面的知识，用惠勒（J. Wheeler）的话说‘现象没有被观测到时就决不是现象’，当人们对系统进行测量时，仪器对系统的状态有某些不可避免的干扰或影响，测量结果也会坍塌到系统的某个本征态上，这正是量子力学哥本哈根解释的精髓。

如果沿 x 方向的斯特恩-盖拉赫实验装置后不放置第二个挡板，让$|+>_x|->_x$两束原子束通过沿 z 方向的斯特恩-盖拉赫实验装置，会发生什么现象呢？由下面的两个关系

$$\sigma_z|+>_x=|0><0|+>_x-|1><1|+>_x=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0>-|1>),\quad \sigma_z|->_x=|0><0|->_x-|1><1|->_x=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0>+|1>)$$

两式相加，我们得

$$\sigma_z(|+>_x+|->_x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0>-|1>)+\frac{1}{\sqrt{2}}(|0>+|1>)=\sqrt{2}|0>$$

此时只能观察到自旋沿 z 轴朝上$|0>$银原子束，也即是不会发生原子束的分裂，理论的预测和实验结果非常符合。

4 薛定谔方程

在$|0>,|1>$所张的二维希尔伯特空间中，我们已经讨论量子态，自旋算符，态叠加原理，测量公设和不确定关系，这些都是基于静态量子态的普遍的结论。一个必然的问题是量子态会随时间演化吗，如果随时间演化，它又遵循什么规律呢，具体点来说，在图 2 中让$|+>_z$态的银原子束通过磁场$\boldsymbol{H}=(H_x,H_y,H_z)$，银原子束的自旋变到$|->_z$态吗，如果会，需要多长时间呢？

答案是$|+>_z=|0>$态通过磁场$\boldsymbol{H}=(H_x,H_y,H_z)$会变到$|->_z=|1>$，量子态的演化满足薛定谔（E. Schrödinger）方程，这也是量子力学的一个基本假设

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}|\psi(t)>}{\mathrm{d}t}=H|\psi(t)>. \qquad (14)$$

式中$|\psi>$是系统的量子态，H是系统的哈密顿量即系统的总能量。在$|0>,|1>$所张的二维希尔伯特空间中，

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

系统的量子态为 $|\psi(t)>=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$,系统的哈密顿量为

$$H=-\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\sigma}=-\mu(H_x\sigma_x+H_y\sigma_y+H_z\sigma_z)=-\mu\begin{pmatrix}H_z & H_x-\mathrm{i}H_y\\ H_x+\mathrm{i}H_y & -H_z\end{pmatrix}$$

薛定谔方程（14）化为

$$\ddot{b}+\omega^2 b=0 \qquad (15)$$

其中 $\omega^2=\dfrac{\mu^2(H_x^2+H_y^2+H_z^2)}{\hbar^2}$，$a=\dfrac{H_z b-\frac{\mathrm{i}\hbar}{\mu}\dot{b}}{H_x+\mathrm{i}H_y}$。式（15）的解为 $b=C_1e^{\mathrm{i}\omega t}+C_2e^{-\mathrm{i}\omega t}$，由此得到

$$a=\frac{1}{H_x+\mathrm{i}H_y}[(H_z+\frac{\hbar\omega}{\mu})C_1e^{\mathrm{i}\omega t}+(H_z-\frac{\hbar\omega}{\mu})C_2e^{-\mathrm{i}\omega t}].$$

波函数随时间的变化为 $|\psi(t)>=\begin{pmatrix}\frac{1}{H_x+iH_y}[(H_z+\frac{\hbar\omega}{\mu})C_1e^{\mathrm{i}\omega t}+(H_z-\frac{\hbar\omega}{\mu})C_2e^{-\mathrm{i}\omega t}]\\ C_1e^{\mathrm{i}\omega t}+C_2e^{-\mathrm{i}\omega t}\end{pmatrix}$。由初始条件 $|\psi(0)>=|0>=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，我们得到 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\ \frac{1}{H_x+\mathrm{i}H_y}[(H_z+\frac{\hbar\omega}{\mu})C_1+(H_z-\frac{\hbar\omega}{\mu})C_2]=1\end{cases}$.解得 $C_1=-C_2=\dfrac{(H_x+\mathrm{i}H_y)\mu}{2\hbar\omega}$，满足初始条件得波函数为

$$|\psi(t)>=\begin{pmatrix}\cos\omega t+\dfrac{\mathrm{i}\mu H_z}{\hbar\omega}\sin\omega t\\ \dfrac{\mu(-H_y+\mathrm{i}H_x)}{\hbar\omega}\sin\omega t\end{pmatrix}.$$

若 $H_x\neq0,H_y\neq0,H_z\neq0$ 时，无法满足演化到 $|->_z=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，而当 $H_x=H_z=0,H_y<0$ 或者 $H_x\neq0,H_y=H_z=0$（多出一个无物理意义的整体相位因子）时由上式容易得到 $\omega t=\dfrac{\pi}{2},\omega=-\dfrac{\mu}{\hbar}H_y$或$\dfrac{\mu}{\hbar}H_x$，系统就演化到$|->_z=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$了。

5 结论

通过复合斯特恩-盖拉赫实验装置结果的分析，在电子自旋沿 z 方向朝上和朝下$|0>,|1>$所张的希尔伯特空间中引入量子力学的基本知识包括系统波函数、自旋算符矩阵形式、态叠加原理，测量理论、不确定关系和波函数随时间演化的薛定谔方程等，使得学生对于量子力学知识的掌握更为牢固。基于斯特恩-盖拉赫实验结果分析也使得学生对于现代物理研究常用的量子力学的符号有一个初步的认识，对学生在学习量子力学的过程中参与导师前沿研究起到了启蒙作用。通过对测量仪器对系统状态无法预知的干扰的认识，也能使学生对量子力学哥本哈根解释的核心概念有个初步的认识。应该的注意的本文并没有也无法涵盖所有量子力学的知识，仅是探讨从个例引入基本量子力学知识的可行性，不可能代替学生后续量子力学知识的过程。

参 考 文 献

[1] W. Gerlach，O. Stein. Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld [J]. Zeitschrift für Physik, 1922, 9: 349-352.
[2] G. Uhlenbeck，S. Goudsmit.Spin electrons and the structure of spectra[J]. Nature, 1926, 117: 264-265.
[3] G. Benenti, G. Casati, G. Strini. 量子计算和量子信息原理[M]. 北京：科学出版社，2011.
[4] 曾谨言. 量子力学导论[M]. 北京：北京大学出版社，1998.
[5] M. Born. Quantenmechanik der Stoßvorgänge[J]. Zeit. Phys.，1926，38：803-827.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net