用洛伦兹坐标变换导出托马斯进动角速度

黄永义†

(西安交通大学光信息科学与技术系，陕西　西安　710049)

摘　要：使用洛伦兹坐标变换关系导出了托马斯进动角速度，考虑到托马斯进动后给出了原子实坐标系中电子自旋和轨道相互作用能精确表达式。

关键词：电子自旋，洛伦兹坐标变换，托马斯进动角速度

中图分类号：　　**文献标识码**：　　**文章编号**：1003-7551(2013)02-0036-03

1　引言

玻尔(N. Bohr)旧量子论时代的三个实验事实，即1921年银原子束的施特恩-盖拉赫（O. Stern-W. Gerlach）实验，碱金属原子光谱的精细结构和1897发现的反常塞曼（P. Zeeman）效应对当时的理论提出了严峻的挑战，基于旧量子论的知识也解释不了这三个典型的实验事实。1925年泡利（W. Pauli）发现了泡利不相容原理[1]，指出了原子中电子的运动状态需要用四个量子数描述，而第四个量子数是电子的固有性质，它只能取两个值。差不多在泡利不相容原理发现时，克龙尼克（R. Kronig）提出了电子自旋的概念，很类似于地球自转的机械转动。克龙尼克的想法遭到了泡利的反对，其理由有二，1、电子绕自己中心轴自旋时电子边缘的切线速度远大于光速，与狭义相对论中物体的速度极限-光速矛盾；2、依克龙尼克电子自旋的概念，电子的自旋和轨道相互作用得到碱金属原子光谱的精细结构比实验值大了一倍。克龙尼克没有了勇气发表他的看法，稍晚一点乌伦贝克（G. Uhlenbeck）和哥德斯密特（S. Goudsmit）大胆了地提出了电子自旋的假设，并以此概念定性的解释了碱金属原子光谱的精细结构[2]，他们也没有给出和实验值完全一致的定量结果，他们的电子自旋假说也遭到了包括泡利在内的多人的反对，但他们的导师艾伦菲斯特（P. Ehrenfest）鼓励他们发表他们‘荒唐’的学说，结果文章发表了。电子自旋的概念被物理学界完全接受得益于1926年托马斯（L. Thomas）的研究，托马斯证实了碱金属原子系统中原子实绕价电子转动的价电子参考系中的自旋轨道相互作用转换到价电子绕原子实运动的原子实参考系时要考虑由于相对论效应引起的坐标系的进动[3,4]，借助于这个被称为托马斯进动的现象托马斯定量的解释了碱金属原子光谱的精细结构，结果恰好是克龙尼克和乌伦贝克、哥德斯密特的结果1/2，完全和实验吻合。

托马斯进动的原始文章很长也很复杂，在上课时教师不可能重复托马斯的演算，史斌星的量子物理书给出了由洛仑兹（H. Lorentz）速度导出了托马斯进动[5]。本文从洛仑兹坐标变换也导出了托马斯进动，需要说明的是，从坐标变换导出托马斯进动也不是显而易见的。文章的第2部分给出了由洛仑兹坐标变换导出托马斯进动角速度，第3部分考虑到托马斯进动后定量地给出了和实验结果完全符合的碱金属价电子自旋和轨道的相互作用能，简单的小结在第4部分给出。

2　洛伦兹坐标变换导出托马斯进动角速度

我们下面看看托马斯进动，为此先建立原子实和电子间的坐标系图1。t时刻原子实在O系原点，t'时刻电子处于O'系原点以速度$\boldsymbol{v}$和加速度$\boldsymbol{a}$相对原子实运动，速度方向$\boldsymbol{v}$沿圆切线，加速度$\boldsymbol{a}$方向垂直于速度指向圆心。dt时间后t''时刻电子运动到随动坐标系O''处的原点，电子的速度增量为d$\boldsymbol{v}$=$\boldsymbol{a}$dt方向指向圆心。在$t''=t'+\mathrm{d}t$时刻保持O，O'，O''坐标系平行，但此时O''系相对于O系已经有了一个转动角速度了。由于电子做圆周加速运动，O'系相对O系牵连速度υ，沿x正方向，O''系相对O'系牵连速度为$\boldsymbol{v}'$，沿y'正方向。O系O'系和O''三个坐标系之间的相对位置等价地用图2表示，定义$\gamma=1/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$，$\gamma'=1/\sqrt{1-\upsilon'^2/c^2}$，由图2可知O系和$O'$系，$O'$和$O''$系之间的洛伦兹变换关系有

收稿日期：2013-05-07

† 通讯作者：yyhuang@mail.xjtu.edu.cn

$$x' = \gamma(x - \upsilon t), \qquad t' = \gamma(t - \upsilon x / c^2), \qquad y' = y,$$

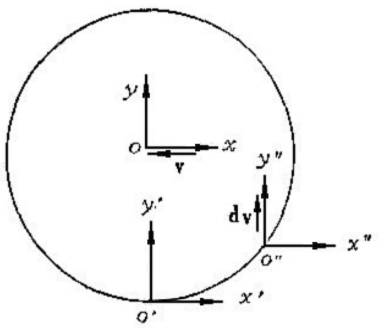

图 1 原子实和电子的相对运动

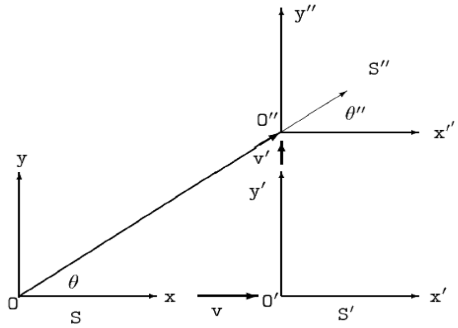

图 2 托马斯进动角速度导出

$$y'' = \gamma'(y' - \upsilon' t'), \qquad t'' = \gamma'(t' - \upsilon' y' / c^2), \qquad x'' = x'$$

原子实 O 和电子 O'' 连线在 O 坐标系中与 x 轴的夹角 θ 如图 2 所示，

$$\tan\theta = y / x = y' / \upsilon t = \gamma'(y'' + \upsilon' t'') / \upsilon t \,|_{y''=0} = \gamma' \upsilon' t'' / \upsilon t$$

令 $y''=0$ 意义很明显，因为电子位于在 t'' 时刻的 O'' 系中的坐标原点。而 t 等于

$$t = \gamma(t' + \upsilon x' / c^2) \,|_{x'=0} = \gamma t' = \gamma\gamma'(t'' + \upsilon' y'' / c^2) \,|_{y''=0} = \gamma\gamma' t''$$

上式中 $x'=0$ 和 $y''=0$ 的意义同上，电子在 t' 时刻的 O' 系和 t'' 时刻的 O'' 中的坐标原点，自然有 $x'=0$ 和 $y''=0$。

$$\tan\theta = \gamma' \upsilon' t'' / \upsilon \gamma\gamma' t'' = \upsilon' / \gamma \upsilon \tag{1}$$

原子实 O 和电子 O'' 连线在 O'' 坐标系中与 x'' 轴的夹角 θ''，

$$\tan\theta'' = y'' / x'' = \gamma'(y' - \upsilon' t') / x' \,|_{y'=0} = -\gamma' \upsilon' t' / x' = -\gamma' \upsilon' t' / \gamma(x - \upsilon t) \,|_{x=0} = \gamma' \upsilon' t' / \gamma \upsilon t$$

式中 $t' = \gamma(t - \upsilon x / c^2) \,|_{x=0} = \gamma t$，得

$$\tan\theta'' = \gamma' \upsilon' / \upsilon \tag{2}$$

原子实 O 和电子 O'' 的连线在 O 系和 O'' 系分别与 x 轴和 x'' 轴的夹角之差为

$$\delta\theta = \theta'' - \theta = \tan^{-1}(\gamma' \upsilon' / \upsilon) - \tan^{-1}(\upsilon' / \gamma \upsilon) \tag{3}$$

在 $\mathrm{d}t$ 极短时间内，则 $\upsilon' = \mathrm{d}\upsilon$ 是个小量，有 $1/\gamma = \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2} = 1 - \upsilon^2 / 2c^2$，$\gamma' = 1/\sqrt{1 - d\upsilon^2 / c^2} \approx 1$，而（3）式可化为

$$\mathrm{d}\theta = \theta'' - \theta \simeq \gamma' \upsilon' / \upsilon - \upsilon' / \gamma \upsilon = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon}(\gamma' - 1/\gamma) = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon}[1 - (1 - \frac{\upsilon^2}{2c^2})] = \frac{\upsilon}{2c^2} a \mathrm{d}t$$

同一个直线在两个坐标系中与 x，x'' 轴的夹角不同，意味着在原子实 O 坐标系（实验室系）观察到了电子随动 O'' 坐标系有一个进动。定义托马斯进动角速度

$$\omega_T \equiv \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\upsilon a}{2c^2} \tag{4}$$

a 为电子做圆周运动的向心加速度，Thomas 进动角速度写成矢量形式

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\upsilon}}{2c^2} \tag{5}$$

式中加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = -\frac{Z^* e^2}{4\pi\varepsilon_0 m} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

代入（5）得

$$\boldsymbol{\omega}_T = -\frac{Z^* e^2}{8\pi\varepsilon_0 m c^2} \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\upsilon}}{r^3} = -\frac{Z^* e^2}{8\pi\varepsilon_0 m^2 c^2} \frac{\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{\upsilon}}{r^3} = -\frac{Z^* e^2}{8\pi\varepsilon_0 m^2 c^2} \frac{\boldsymbol{L}}{r^3} \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{L}$ 为原子实坐标系 O 中电子绕原子实的角动量。

3　考虑到托马斯进动后电子自旋和轨道的相互作用能

电子自旋磁矩在 O'' 系中受到原子实轨道运动的磁场作用，会发生类似拉莫尔（J. Larmor）进动的现象，即电子自旋磁矩绕磁场做进动，进动的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}' = \frac{e}{m}\boldsymbol{B}'$$

由电磁学毕奥萨伐尔（Biot-Savart）定律得 $\boldsymbol{B}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z^* e}{mc^2}\frac{\boldsymbol{L}}{r^3}$，将 $\boldsymbol{B}'$ 代入上式得

$$\boldsymbol{\omega}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z^* e^2}{m^2 c^2}\frac{\boldsymbol{L}}{r^3} \tag{7}$$

这样在原子实 O 坐标系中观察到的电子的自旋总进动为（6）和（7）之和，即

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}_T = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Z^* e^2}{m^2 c^2}\frac{\boldsymbol{L}}{r^3} \tag{8}$$

在原子实 O 坐标系中观察到电子感受到原子实相对运动产生的磁场 $\boldsymbol{B}_{lab}$ 为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{e}{m}\boldsymbol{B}_{lab}$$

上式和（8）比较得

$$\boldsymbol{B}_{lab} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Z^* e}{mc^2}\frac{\boldsymbol{L}}{r^3} \tag{9}$$

将自旋磁矩 $\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m}\boldsymbol{S}$ 和（9）的 $\boldsymbol{B}_{lab}$ 代入 $\Delta E_{ls} = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \boldsymbol{B}_{lab}$ 即得考虑托马斯进动后能定量描述碱金属原子光谱精细结构的电子自旋和轨道相互作用能 $\Delta E_{ls} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Z^* e^2}{m^2 c^2}\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}}{r^3}$。

4　小结

托马斯进动角速度在近代物理中具有重要的作用，它使电子自旋的概念得以完全的确立，自旋作为一个假设进入了非相对论量子力学中。事实上只有托马斯借助于托马斯进动角速度给出定量的电子自旋和轨道相互作用能以后，泡利才表示支持电子自旋的概念。此后人们将微观粒子都赋予自旋的概念，如质子，中子，光子，中微子，引力子等等，甚至将原子核也赋予了自旋的概念，托马斯进动角速度的导出一定意义上也说明了狭义相对论的普适性。在一般的原子物理课中托马斯进动通常都一句带过，‘从电子坐标系自旋轨道相互作用能到原子实坐标系自旋轨道相互作用能转变，需要考虑托马斯进动，要在原来的结果上乘以 1/2’，但是学生们很疑惑这个 1/2 是怎么来的，我们的结果一定程度上给了学生一个回答。电子自旋建立的史实也给科学工作者一定的启示，那就是不要盲目的迷信权威。克龙尼克最早提出了电子自旋的概念但迫于泡利的权威失去了发现电子自旋的发明权（credit），实际上乌伦贝克和哥德斯密特的自旋也没有超出克龙尼克的范围，也没有定量的给出和实验符合的自旋轨道相互作用能，却坚持自己的观点勇敢的发表自己的结果，最后取得了成功。

参　考　文　献

[1] W. Pauli. Uber den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronen-gruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren[J]. Zeit. Physik, 1925, 31: 765-783.
[2] G. Uhlenbeck, S. Goudsmit. Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durcheine Forderung bezuglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons[J]. Naturwissenschaften,1925, 13: 953-954.
[3] L. Thomas. The Motion of the Spinning Electron[J]. Nature, 1926, 117: 514.
[4] L. Thomas. The Kinematics of an Electron with an Axis[J]. Phil. Mag., 1927, 3: 1-22.
[5] 史斌星. 量子物理[M]. 北京：清华大学出版社，1982.