

# 普朗克量子论的教学探讨

黄永义

(西安交通大学 理学院 陕西 西安 710049)

摘要: 给出了符合科学发展、符合教学逻辑的普朗克量子论的讲解方案,先讲热辐射的基尔霍夫定律,然后讲黑体辐射谱的维恩公式、瑞利-金斯公式和普朗克公式,最后讲普朗克的量子论。

关键词: 基尔霍夫定律; 维恩公式; 瑞利-金斯公式; 普朗克公式; 普朗克量子论

中图分类号: O 4—1 文献标识码: A 文章编号: 1000-0712(2020)07-0025-04

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.190376

普朗克量子论是近代物理的一个重大发现,是原子物理学、近代物理学和量子力学必须讲解的难点内容。现有多数老师的讲解方案往往是这样的:黑体辐射的实验结果(黑体辐射谱)、黑体辐射谱的维恩公式、瑞利-金斯公式,最后由普朗克量子论导出能够描述黑体辐射谱的普朗克公式。现有的讲解突出了量子论,即能量量子化,然而有些问题并没讲清楚,如为什么基本能量单元是  $\varepsilon_0 = h\nu$ ,普朗克常量的本质是什么,为什么普朗克常量是自然界的基本常量等。本文的任务就是清晰地讲解普朗克量子论,先讲热辐射的基尔霍夫定律,然后讲黑体辐射谱的维恩公式、瑞利-金斯公式和普朗克公式,最后讲普朗克的量子论,这个讲解方案既符合科学发展,也符合教学逻辑。

## 1 热辐射的基尔霍夫定律

具有一定温度的所有物体,都向周围空间发射电磁波,这种由温度决定的辐射称为热辐射。热辐射是热量传递的一种方式,由于物体总与其他物体有热交换,因此物体与物体之间总存在一定的热辐射。热平衡时物体辐射的电磁波和吸收电磁波的量相等,物体的温度也不再变化。首先介绍几个物理量:

1) 辐射场能量密度  $\rho(T)$ ,温度为  $T$  的辐射场单位体积的辐射能量,单位  $J/m^3$ ; 谱能量密度  $\rho(\nu, T)$ ,单位  $J/(m^3 \cdot Hz)$ ,  $\rho(T) = \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu$ 。

2) 辐射本领  $R(T)$  (辐射出射度),表示处于温度为  $T$  的辐射体,从单位时间单位表面积向外发出

的辐射能量。辐射本领  $R(T)$  和单色辐出度  $R(\nu, T)$  [单位  $W/(m^2 \cdot Hz)$ ] 之间的关系为  $R(T) = \int_0^\infty R(\nu, T) d\nu = \int_0^\infty R(\lambda, T) d\lambda$ 。由  $c = \lambda\nu \Rightarrow d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$ ,代入上式得到单色辐出度的波长表示和频

率表示的关系  $R(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2} R(\nu, T)$ 。

3) 吸收本领  $\alpha(\nu, T)$  指在频率  $\nu$  附近,单位频率间隔内单位时间被物体吸收的辐射能量与照射在该物体上的辐射能量之比,是频率和热平衡温度的函数。吸收本领是量纲为一的量,显然  $0 \leq \alpha(\nu, T) \leq 1$ 。基尔霍夫在 1859 年总结出了一个普遍的规律(基尔霍夫定律):任何物体在同一温度  $T$  下单色辐射度  $R(\nu, T)$  和吸收本领  $\alpha(\nu, T)$  成正比  $\frac{R(\nu, T)}{\alpha(\nu, T)} = F(\nu, T)$ 。这个比值  $F(\nu, T)$  是个普适函数,只和频率  $\nu$ 、温度  $T$  有关,与物质本身性质无关,其证明见文献 [1]。

## 2 黑体辐射谱

什么是黑体,什么是黑体辐射呢?所谓黑体,就是对什么光都吸收而无反射也无透射的物体。物理上可以用图 1 所示的装置来模拟黑体,耐火材料做成的物体内部挖空一部分区域,并且在物体一个面开一个非常小的小孔,一旦光线射进小孔后,在空腔内壁经过多次吸收和反射,几乎完全被吸收掉,再跑出小孔的几率特别小,因此可以把空腔的小孔视为

收稿日期: 2019-08-19; 修回日期: 2019-11-20

基金项目: 西安交通大学基本科研业务费综合交叉项目; 西安交通大学“名师、名课、名教材”建设工程项目; 西安交通大学第二批“课程思政”示范课程项目资助

作者简介: 黄永义(1978—),男,安徽阜阳人,西安交通大学理学院副教授,主要从事原子物理的教学和研究工作。

大学物理

黑体的表面.

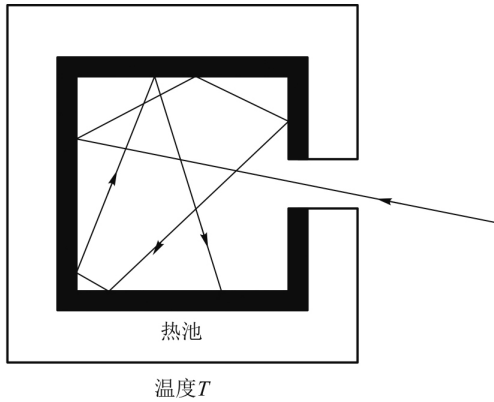


图1 绝对黑体的模型

由基尔霍夫定律知,黑体吸收电磁波的同时也会辐射电磁波,空腔的小孔辐射的电磁波就称黑体辐射.黑体作为理想模型,其吸收本领与频率、温度均无关,恒为1,即 $\alpha(\nu, T) = 1$ .基尔霍夫定律的普适函数就是黑体的单色辐射本领为<sup>[2]</sup>

$$F(\nu, T) = R_0(\nu, T) = \frac{c}{4} \rho_0(\nu, T) \quad (1)$$

式中 $R_0(\nu, T)$ 为黑体单色辐射本领, $\rho_0(\nu, T)$ 为空腔内电磁波的谱能量密度.可以证明黑体的单色辐射度和空腔内电磁波的谱能量密度之间存在一个常数 $c/4$ ,即光速的四分之一<sup>[1]</sup>.由于19世纪工业发展特别是冶金行业的需要,人们也越来越重视对热辐射和黑体辐射研究.19世纪末物理学家已对黑体辐射作出了相当精确的测定,图2是黑体辐射的实验结果<sup>[3]</sup>.图中的虚线是维恩位移定律,黑体辐射谱峰值波长 $\lambda_m$ 和温度 $T$ 两者的乘积位移常量 $\lambda_m T = 2.90 \times 10^{-3} \text{ mK}$ .借助于维恩位移定律可以方便的估算出高温物体的温度,如太阳光谱的峰值波长 $0.47 \mu\text{m}$ ,得知太阳表面温度 $6166 \text{ K}$ .黑体辐射谱还有一个不太直观的斯特藩-玻尔兹曼定律,即黑体辐射本领和温度的4次方成正比.

### 3 维恩公式

黑体辐射谱是非常重要的结果,人们非常想知道谱线的解析表达式.1893年维恩利用热力学和电磁学理论证明了黑体辐射谱具有如下形式<sup>[4]</sup>:

$$R_0(\nu, T) = c\nu^3 \varphi\left(\frac{\nu}{T}\right) \text{ 或 } R_0(\lambda, T) = \frac{c^5}{\lambda^5} \varphi\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \quad (2)$$

式中 $c$ 为光速,式(2)即维恩定律,维恩定律的意义在于把两个独立变量 $\nu$ 和 $T$ 的二元函数 $R_0(\nu, T)$ 归

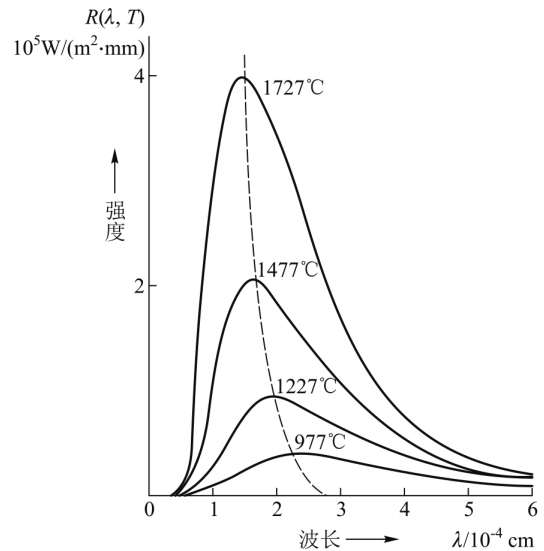


图2 黑体辐射谱

纳为一个已知的函数 $\nu^3$ 和一个宗量为 $\nu/T$ 的函数.在函数 $R_0(\nu, T)$ 中将独立变量改选为 $(\nu, \nu/T)$ 后,与 $\nu$ 的关系为 $\nu^3$ ,这样就找一个寻找两个独立变量的函数 $R_0(\nu, T)$ 的问题归结为找寻函数 $\varphi(\nu/T)$ 了.为拟合黑体辐射的实验数据,1896年维恩假设辐射场的“振子”可以看成某种“粒子”,其动能正比于频率 $\nu$ (想法有点类似于爱因斯坦光子),且遵循麦克斯韦-玻尔兹曼分布<sup>[5]</sup>.因此满足式(2)的 $\varphi(\nu/T)$ 的显式就是一个指数函数,维恩得到一个经验公式(维恩公式)

$$R_0(\nu, T) = C_1 \nu^3 e^{-\frac{c_2 \nu}{T}} \text{ 或 } R_0(\lambda, T) = C_1' \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \quad (3)$$

这个结果只在高频部分和实验相符,并且能够给出维恩位移定律,而低频部分和实验不符合,见图3所示.

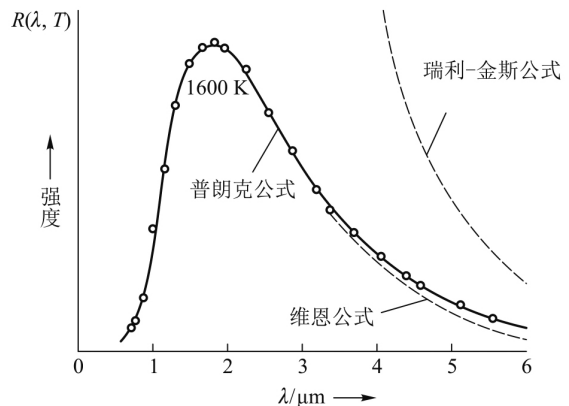


图3 3种不同的黑体辐射公式与实验的比较



维恩借助于假想的辐射场振子给出了维恩定律中的隐函数  $\varphi(\nu/T)$  的解析表达式,由此得到了黑体单色辐射本领的维恩公式.虽然该公式只在高频部分和实验相符,但其仍是黑体辐射研究的重要进展,因为维恩公式能给出正确的维恩位移定律.维恩的做法在科学研究中也具有一定的借鉴意义,那就是所求结果通过现有的方法无法得到时,直觉的猜测也有可能接近或得到最后的正确结果.

#### 4 瑞利-金斯公式

另一个较为成功公式是基于经典电动力学和统计力学导出的瑞利-金斯公式,如图3所示.该公式适用于低频部分的黑体辐射实验结果.瑞利-金斯公式具有明确的物理图像,空腔内电磁波和腔壁做简谐振动的原子进行能量交换,热交换达到平衡时有平衡条件:

$$\rho_0(\nu, T) = g(\nu) \bar{\varepsilon}(\nu, T) \quad (4)$$

式中  $\rho_0(\nu, T)$  腔内电磁波的谱能量密度,  $\bar{\varepsilon}(\nu, T)$  为腔壁原子谐振子的平均能量,  $g(\nu)$  为空腔中单位体积内频率在  $\nu$  到  $\nu+d\nu$  间隔内电磁波的振动模式数目,容易求得<sup>[1]</sup>

$$g(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad (5)$$

谐振子的平均能量  $\bar{\varepsilon}(\nu, T)$  可通过玻尔兹曼分布得到

$$\bar{\varepsilon}(\nu, T) = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon e^{-\varepsilon/k_B T} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon/k_B T} d\varepsilon} = k_B T \quad (6)$$

式(6)的结果和能量均分定理一致,该定理指出热平衡时能量被等量地分到原子的各个自由度上.事实上腔壁上原子振动的平均动能和平均势能各分的  $k_B T/2$  的能量,原子谐振子的平均能量就是  $k_B T$ .能量均分定理强调热平衡状态下系统的能量可以被分布在其所组成粒子的所有可能运动的方式中,由于热力学系统包含了巨大数量( $10^{23}$ 量级)的粒子,当然也包含着巨大数量的可能的运动方式,因此能量均分定理实际上隐含了能量可以连续取值的假设.瑞利-金斯给出谐振子平均能量的式(6),实质上还是在经典物理的观念内,即能量连续的,无限可分的.将式(6)代入到式(4)并考虑式(5)我们可以得到空腔内的电磁波谱密度  $\rho_0(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$ .

黑体辐射谱的瑞利-金斯公式为

$$R_0(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} k_B T \text{ 或 } R_0(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} k_B T \quad (7)$$

如图3所示,瑞利-金斯公式仅在低频部分和实验结果符合,高频部分当  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $R(\lambda, T) \rightarrow \infty$ ,但实验结果  $R_0(\lambda, T) \rightarrow 0$ ,这个荒谬的推论在历史上称为紫外灾难.瑞利-金斯公式和实验的矛盾表明,谐振子平均能量的计算出了问题.事实上,求解谐振子平均能量时使用的积分就表明瑞利-金斯默认了能量是连续的无限可分的观念.

#### 5 普朗克公式和普朗克量子论

维恩公式和瑞利-金斯公式分别在黑体辐射的高频部分和低频部分成立,显然还需要一个更好的公式在整个频率范围内都成立.普朗克<sup>[4]</sup>通过内插方法得到谐振子的平均能量为  $\bar{\varepsilon} = \frac{\beta}{e^{\beta/(h\nu)} - 1}$ ,式中  $\alpha$  是参数  $\beta$  正比于频率  $\nu$ .考虑到腔内电磁波的振动模数  $8\pi\nu^2/c^3$ ,普朗克得到了一个完整描述黑体辐射谱的公式:

$$R_0(\nu, T) = \frac{C_2 \nu^3}{e^{C_1 \nu/T} - 1} \text{ 或 } R_0(\lambda, T) = \frac{C_2 \lambda^{-5}}{e^{C_1/\lambda T} - 1} \quad (8)$$

普朗克黑体辐射公式(8)包含了两个拟合参数  $C_1$ 、 $C_2$ ,普朗克黑体辐射公式能和当时最精确的黑体辐射实验结果符合.

由于普朗克内插得到的黑体辐射公式(8)很准确的描述了黑体辐射的规律,以至于普朗克决心不惜一切代价找到一个物理解释.经过两个月的奋斗他终于给出了一个同经典概念严重背离的物理解释<sup>[6,7]</sup>:黑体空腔器壁上的原子谐振子的能量是量子化的,而且谐振子与腔内电磁波的能量交换也是量子化的.普朗克由谐振子能量量子化导出谐振子平均能量时使用了玻尔兹曼熵的概念,而且引入了单个谐振子的熵,这点不严谨.我们假设谐振子能量量子化,利用能量的玻尔兹曼分布也可以导出谐振子的平均能量.事实上,谐振子能量值只能取某个基本单元的整数倍,即  $\varepsilon = \varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots$ ,任意某个能量为  $n\varepsilon_0$ ,  $n$  为整数.谐振子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon}(\nu, T) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-n\varepsilon_0/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\varepsilon_0/k_B T}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/k_B T} - 1} \quad (9)$$

将平均能量式(9)代入式(4),注意到式(1)和式(5)得黑体辐射本领:

大学物理

$$R_0(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/k_B T} - 1} \quad (10)$$

考虑到维恩定律式(2)的要求,谐振子的能量单元必然正比于辐射场的频率,即  $\varepsilon_0 = h\nu$  ( $h$  为常数). 我们便得到了普朗克黑体辐射公式:

$$R_0(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

或

$$R_0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k_B \lambda T} - 1} \quad (11)$$

普朗克黑体辐射公式中包含了玻尔兹曼常量  $k_B$  和一个新的常量  $h$ , 被称为普朗克常量, 与式(8)比较得  $C_1' = hc/k_B$ ,  $C_2' = 2\pi hc^2$ . 普朗克用黑体辐射公式(11)去拟合当时最精确的黑体辐射谱的实验结果得到  $h$  的值为  $h = 6.55 \times 10^{-34}$  Js(比现代值低1%), 同时还给出了玻尔兹曼常量  $k_B = 1.346 \times 10^{-23}$  J/K(比现代值低2.5%), 如图3所示. 而由普朗克公式(11)可知, 普朗克常量本质上为黑体辐射谱的拟合参数. 基尔霍夫定律告诉我们黑体辐射谱  $R_0(\nu, T)$  是热辐射的普适函数  $F(\nu, T)$ , 因此黑体辐射谱  $R_0(\nu, T)$  中的参数  $k_B$ 、 $h$  也都是自然界的基本常量.

## 6 小结

本文给出了符合科学发展、符合教学逻辑的普朗克量子论的讲解方案. 相对于现有的讲解, 我们的讲解方案对普朗克量子论的剖析更加清楚. 维恩定律决定了基本能量单元只能正比于辐射频率即  $\varepsilon_0 =$

$h\nu$ , 普朗克常数本质上是黑体辐射实验数据的拟合参数. 由于热辐射的基尔霍夫定律, 普朗克常量才升格为自然界的基本常量. 需要说明的是, 普朗克的量子论是指腔壁原子的电偶极子作简谐振动时其能量的量子化, 普朗克依然把电磁波视为经典波动, 腔内电磁波在封闭的边界内以驻波形式存在. 普朗克量子论具有划时代的意义, 基本能量单元的存在打破了能量连续变化的经典观念. 把电磁场量子化、提出光子概念则是爱因斯坦的工作.

## 参考文献:

- [1] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程-量子物理[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [2] 王正行. 近代物理学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1995.
- [3] Lummer O, Pringsheim E. Die Vertheilung der Energie im Spectrum des schwarzen Körpers[J]. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (Leipzig), 1899, 1: 23-41.
- [4] 黄永义. 量子力学基本概念的发展[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2018.
- [5] 林宗涵. 热力学与统计物理学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2007.
- [6] M Planck. On the law of distribution of energy in the normal spectrum[J], Ann. Physik, 1901, 4: 553-558.
- [7] 杨建邺, 李香莲. 普朗克量子理论和瑞利-金斯公式[J]. 大学物理, 1995, 14(4): 34-37.

## Teaching Planck's quantum theory

HUANG Yong-yi

(School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shanxi 710049, China)

**Abstract:** The paper teaches Planck's quantum theory in accord with the theory's development and the teaching logic: the Kirchhoff's law for thermal radiation, blackbody radiation, Wien's formula, Rayleigh-Jeans' formula, Planck's formula and Planck's quantum theory.

**Key words:** Kirchhoff's law for thermal radiation; Wien's formula; Rayleigh-Jeans' formula; Planck's formula; Planck's quantum theory