玻尔氢原子理论、对应原理和矩阵力学

黄永义，张淳民
（西安交通大学 理学院，陕西 西安 710049）

摘要：重现了玻尔最初提出的氢原子理论，从玻尔的理论归纳出了对应原理.给出了对应原理的两个具体的应用，即通过经典理论给出原子光谱的强度和矩阵力学的建立过程.

关键词：玻尔氢原子理论；对应原理；矩阵力学
中图分类号：O 413.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-0712(2018)09-0004-05
【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.180045

1905 年爱因斯坦为了解释光电效应的实验结果提出了光量子理论[1]，该理论认为光不仅在发出时是量子化的，而且在空间中传播时也是量子化的，光是由一个一个光子组成，每个光子的能量为 $E=h\nu$，在光与物质相互作用时，光子只能整个的被吸收或者发射.

1911 年卢瑟福由 α 粒子被金箔散射实验[2]，提出了有核原子模型，该模型肯定了原子中有一个带有所有正电荷几乎集中了原子所有质量的原子核的存在，电子在核外运动.卢瑟福的核式原子结构有着不可克服的困难.核与电子之间的 $1/r^2$ 库仑作用，如果把电子绕核运动类比成像行星绕太阳运动的话（$1/r^2$ 的万有引力），加速运动的电子会发出电磁波而损失能量，在 10^{-9} s 的时间内就坍塌到核里面，原子不复存在.但现实中谁也没有见到坍塌的原子，此即原子的稳定性问题.与原子稳定性问题相联系是原子光谱的形状.在电子坍塌到原子核的过程中原子的能量是连续变化的，因此原子光谱应该是连续的，实验观测到的原子光谱都是分立的，这个理论预测直接和实验事实相矛盾.卢瑟福原子模型还有一问题难以解释，那就是原子的同一性，对于一种特定的样品，所有的原子不管它是哪里的，都具有相同的结构.卢瑟福的原子类似一个小的太阳系，每个原子最后的结构依赖于系统的初始条件.但很难保证每一种原子都具有相同的初始条件，每一种原子应该具有不同的结构.然而我们轻而易举就能找到相同的原子，美国的铁原子和中国的铁原子，甚至月球上的铁原子在结构上没有丝毫差异.

为了解决卢瑟福原子遇到的稳定性、同一性、光谱的分立特征和复杂的氢原子光谱与一个凭经验凑出来的里德伯（J.Rydberg）公式完全符合之谜，1913 年玻尔（N.Bohr）综合了爱因斯坦的量子论和卢瑟福的有核原子模型提出的玻尔氢原子理论[3].

原子物理学的教材大多数都是这样讲述玻尔氢原子理论的，首先列出玻尔的三个假设，定态假设、频率条件和角动量量子化，然后从角动量量子化和牛顿运动定律解出了氢原子能级，再依据频率条件就给出了氢原子线系之谜.从教学的简洁性和逻辑性来说，这样的讲述很完整，但学生问为什么角动量是量子化的呢？教师也有点无所适从.本文第二部分重现了玻尔最初提出的氢原子理论，从玻尔的理论归纳出了对应原理，第三部分给出了对应原理的两个具体的应用，即通过经典理论给出原子光谱的强度和矩阵力学的建立过程，最后评述一下玻尔氢原子理论的重要性和对应原理的历史意义.

1 玻尔氢原子理论

电子在库仑场中运动

$$V=-k/r$$

式中的系数 $k=\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$，电子绕核运动，角动量守恒

$$p_\varphi=mr^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

收稿日期：2018-01-18；**修回日期**：2018-03-29
基金项目：西安交通大学"名师、名课、名教材"建设工程项目；西安交通大学基本科研业务费综合交叉项目；国家自然科学基金重点项目（41530422）；国家高技术研究发展计划（2012121101）资助
作者简介：黄永义（1978—），男，安徽阜阳人，西安交通大学理学院讲师，主要从事原子物理的教学和研究工作.
通信作者：张淳民，E-mail：zcm@xjtu.edu.cn

式中 m 为电子质量,由上式得

$$\mathrm{d}t=\frac{mr^2}{p_\varphi}\mathrm{d}\varphi \Rightarrow T=\int\mathrm{d}t=\frac{2m}{p_\varphi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\mathrm{d}\varphi=\frac{2m}{p_\varphi}\pi ab \quad (2)$$

上式积分 $\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\mathrm{d}\varphi=\pi ab$ 为椭圆面积,a 和 b 分别为椭圆半长轴和半短轴,设椭圆偏心率为 e,则半短轴 b 和半长轴 a 及偏心率 e 的关系为 $b=a\sqrt{1-e^2}$,联合该式和 $p_\varphi^2=mka(1-e^2)$,得到

$$b^2=\frac{p_\varphi^2 a}{mk} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{p_\varphi}=\sqrt{\frac{a}{mk}}$$

将上式代入椭圆周期式(2),得

$$T=2m\pi a\sqrt{\frac{a}{mk}}=2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{k}}$$

考虑到椭圆轨道系统的能量 $E=-\frac{k}{2a}$,得电子椭圆轨道的频率和体系的能量 $|E|$ 之间的关系:

$$T=\pi k\sqrt{\frac{m}{2}\frac{1}{|E|^3}} \Rightarrow \nu=1/T=\frac{1}{\pi k}\sqrt{\frac{2}{m}}|E|^{3/2} \quad (3)$$

这一结论常称为开普勒第三定律.

玻尔认为,经典轨道中只有某些离散的能量所对应的状态(定态假设)才是稳定的,这些离散的能量用正整数 n 标记,玻尔进一步假定

$$E(n)=h\nu(E)f(n) \quad (4)$$

由对应原理的精神,玻尔提出当量子数 n 很大,Δn 很小时,量子论得到的结果和经典力学的结果相同,上式两边对 n 求导得

$$E'=h\nu f'+hf\nu'$$

进一步整理,上式可化为

$$f'=\frac{E'}{h\nu}-\frac{f}{\nu}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}n}=\frac{E'}{h\nu}-\frac{E}{h\nu^2}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}E}E'=$$

$$\frac{E'}{h\nu}\left(1-\frac{E}{\nu}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}E}\right)=\frac{E'}{h\nu}\left(1-E\frac{\mathrm{d}\ln\nu}{\mathrm{d}E}\right) \quad (5)$$

当电子从轨道 $n(n\gg1)$ 跃迁到相邻轨道 $n-1$ 时,$\Delta n=1$,两条轨道能量差很小,放出辐射前和放出辐射后电子轨道运动频率比接近于1,放出的辐射频率和电子轨道运动频率之比也接近于1,从经典频率表达式(5)得

$$\Delta E=E'\Delta n=E'=h\nu f'/\left(1-E\frac{\mathrm{d}\ln\nu}{\mathrm{d}E}\right) \quad (6)$$

从玻尔跃迁假设的频率条件假设 $h\nu=E_{n'}-E_n$ 得

$$\Delta E=h\nu(E) \quad (7)$$

比较式(6)和式(7)可得

$$\lim_{n\to\infty}f'=1-E\frac{\mathrm{d}\ln\nu}{\mathrm{d}E} \quad (8)$$

由开普勒第三定律式(3)得

$$E\frac{\mathrm{d}\ln\nu}{\mathrm{d}E}=3/2$$

将上式代入式(8)得

$$f'=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f=-\frac{1}{2}n$$

于是由式(4)可得原子体系的总能量

$$E(n)=-\frac{n}{2}h\nu(E)$$

上式联合开普勒第三定律式(3)得到

$$E(n)=-\frac{2\pi^2k^2m}{n^2h^2}=-\frac{Z^2me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2n^2} \quad (9)$$

上式正是量子数 $n\gg1$ 时的氢原子能级公式,式中 $\hbar=h/(2\pi)$.根据对应原理的精神,玻尔合理地设想,对于量子数 n 小的轨道该公式也适用,式(9)就是氢原子(类氢离子)的玻尔能级公式,式中 $n=1,2,3,\cdots$ 为主量子数.再由跃迁假设的频率条件,玻尔氢原子理论完美的解释了氢原子光谱的各个线系.

设电子绕原子核作圆周运动,牛顿定律为

$$\frac{mv^2}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

原子体系的总能量为

$$E=T+V=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}=-\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \quad (10)$$

由式(9)和式(10)得到

$$r_n=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}n^2 \quad (11)$$

电子运动的速度为

$$v=\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}} \quad (12)$$

电子绕核做圆轨道运动的角动量等于

$$L=mvr=mr\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}}=\sqrt{\frac{me^2r}{4\pi\varepsilon_0}}=n\hbar, \quad n=1,2,3\ldots \quad (13)$$

式(13)就是我们所说的角动量量子化.一般教科书都把角动量量子化作为玻尔理论的第三个假设,其实角动量量子化是在玻尔理论两个假设的基础上应用对应原理导出的一个推论.

2 对应原理及应用

在量子力学出现以前,由玻尔在1913年文章萌芽到1918年系统阐述的对应原理,在1913年到1925年以前对原子物理学和量子理论的发展有极其深刻的影响,该原理在经典概念和量子概念之间

建立了特殊的联系.事实上,当人们在量子理论范围内解释原子结构的许多问题遇到严重困难时,对应原理便成了获取新成果时带有指导性的思维方法.

玻尔关于对应原理比较精确而晦涩的表述为[4]:没有关于定态间跃迁机制的详细理论,我们当然不能普遍地得到两个这种定态之间自发跃迁几率的严格确定法,除非各个 n 是一些大数,…,对于并不是很大的那些 n 值,在一个给定跃迁的几率和两个定态中粒子位移表示式的傅里叶系数值之间也必定存在一种密切的联系.

我们举两个具体的例子,即通过经典理论给出原子光谱的强度和矩阵力学的建立过程,来看看对应原理如何工作的.当然对应原理还有很多的应用[5,6].

2.1 原子光谱强度的计算

对应原理一个很大用途就是通过经典理论给出原子光谱的强度[7].一个例子,设原子从 $E(n)$ 能级自发辐射到较低的 $E(n-\tau)$ 能级,由爱因斯坦的理论,单位时间辐射的能量为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=h\nu_\tau A_n^{n-\tau} \tag{14}$$

自发辐射的谱线强度与 $A_n^{n-\tau}$ 有关.当 $n\gg1$, $n\gg\tau$ 时,自发辐射的频率为 $\nu_\tau=\tau\nu_c$,经典电动力学中,把电偶极矩 P 做傅里叶展开

$$P=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}P_\tau\exp(2\pi\mathrm{i}\tau\nu_c t) \tag{15}$$

容易得到

$$\ddot{P}^2=(2\pi\nu_c)^4\sum_{\tau,\tau'}P_\tau P_{\tau'}\tau^2\tau'^2\exp[2\pi\mathrm{i}(\tau+\tau')\nu_c t]$$

上式对时间求平均后,只有 $\tau'=-\tau$ 的项不为零,即

$$\overline{\ddot{P}^2}=(2\pi\nu_c)^4\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}|P_\tau|^2\tau^4 \tag{16}$$

由经典电动力学,偶极振荡单位时间辐射的能量为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{2\overline{\ddot{P}^2}}{3c^3} \tag{17}$$

比较式(14)和式(17),局限于讨论 $\nu_\tau=\tau\nu_c$ 的辐射,得自发辐射系数为

$$A_n^{n-\tau}=\frac{2(2\pi)^4}{3hc^3}\nu_\tau^3|P_\tau|^2$$

2.2 矩阵力学的建立

1925年海森伯从玻尔频率条件和克喇末斯(H. Kramers)色散理论看到了矩阵力学的端倪,他试图借助可观察量,运用对应原理将物理量写成无限维方矩阵,得到了量子化条件和谐振子能级公式.玻尔的氢原子理论中一系列定态对应于一个能量 $E(n)$, $E(l)$ 等等,两个能级直接的跃迁原子会放出一个光子,光子的频率满足玻尔频率条件:

$$\omega(n,l)=[E(n)-E(l)]/\hbar \tag{18}$$

显然就频率而论,满足里兹(W.Ritz)组合定则,即

$$\omega(n,k)+\omega(k,l)=\omega(n,l) \tag{19}$$

经典方法用振幅和频率描述运动,必须把坐标写成傅里叶级数

$$x(t)=\sum_\tau x_\tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\omega(n)t} \tag{20}$$

$x(t)$ 是实数,使得式子 $x_{-\tau}=x_\tau^*$ 成立.量子论中代替式(20)表述原子的信息,海森伯用频率和振幅的新形式[8]

$$x(n,l)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(n,l)t} \tag{21}$$

来代替式(20),式(21)中 $n-l=\tau$, $\omega(n,l)=\omega(n,n-\tau)$ 与式(20)中的 $\tau\omega(n)$ 对应,并且假定 $x(l,n)=x(n,l)^*$ 和 $\omega(l,n)=-\omega(n,l)$ 成立,这样一种替换是思维的质的飞跃,它将矩阵引入了量子力学,下面的分析会看到 $x(n,l)$ 就是一个无限维方矩阵.

看一看 $x(t)^2$ 的表达式的经典方法和量子论方法的不同,借助于傅里叶变换中卷积定理易得

$$x^2(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\beta B_\beta(n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(n)\beta t}$$

其中

$$B_\beta(n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(n)\beta t}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\tau x_\tau(n)\,x_{\beta-\tau}(n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(n)[\tau+(\beta-\tau)]t} \tag{22}$$

由式(21),式(22)合理的转译至量子论形式为

$$B(n,n-\beta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(n,n-\beta)t}=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\tau x(n,n-\tau)\,x(n-\tau,n-\beta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(n,n-\beta)t} \tag{23}$$

海森伯将式(22)转译至式(23)的形式不是没有理由的,主要的原因是使其理论满足里兹(W.Ritz)组合定则式(19)的要求.事实上,量子论中的光是原子中电子在初末状态跃迁的结果,经典情况下频率关系为 $\tau\omega(n)+(\beta-\tau)\omega(n)=\beta\omega(n)$,按照里兹组合定则要求,与经典频率关系对应的量子论中频率关系为 $\omega(n,n-\tau)+\omega(n-\tau,n-\beta)=\omega(n,n-\beta)$,按此角标的对应关系,式(22)必然转录成式(23)的形式.如果是不同的两个物理量 $x(t)=\sum x_\tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\omega t}$, $y(t)=\sum y_\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho\omega t}$ 的乘积,经典的形式为

$$z(t)=\sum z_\tau \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\omega t}=\sum_\tau\sum_\sigma x_\sigma y_{\tau-\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\sigma+(\tau-\sigma)]\omega t}$$

即

$$z_\tau=\sum_\sigma x_\sigma y_{\tau-\sigma} \tag{24}$$

上式转译至量子论为

$$z(n,l)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{k}x(n,k)\,y(k,l) \qquad (25)$$

量子论中两个物理量乘积的表达式(25)实质上就是数学上两个矩阵的乘积.

有了量子论中物理量是矩阵的崭新的思想，现在就可以考查一下玻尔-索末菲(Bohr-Sommerfeld)量子化条件

$$\oint p\mathrm{d}q=J(=nh) \qquad (26)$$

具有的新形式了.为此我们还是从经典表达式(20)出发，借助对应原理将量子化条件转译至量子论的表述.由式(20)得

$$m\dot{x}=m\sum_{\tau}x_{\tau}\mathrm{i}\tau\omega(n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\omega(n)t}$$

量子论条件表述为

$$\oint m\dot{x}\mathrm{d}x=\oint m\dot{x}^{2}\mathrm{d}t=2\pi m\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\tau}x_{\tau}x_{-\tau}\tau^{2}\omega(n)=$$

$$2\pi m\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\tau}|x_{\tau}|^{2}\tau^{2}\omega(n) \qquad (27)$$

得出上式时使用了 $\delta(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$. 对应原理的要求，量子化条件式(26)不能和量子动力学一致，用下面的表达式更自然一些，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(nh)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\oint p\mathrm{d}q=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\oint m\dot{x}^{2}\mathrm{d}t$$

考虑到式(27)，上式为

$$h=2\pi m\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\tau}\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(\tau\omega(n)\,|x_{\tau}|^{2}) \qquad (28)$$

现在需要将式(28)通过对应原理转译至量子论中.经典频率向量子频率过渡按下式

$$\tau\omega=\tau\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}n}\ \rightarrow\ \omega(n,n-\tau)$$

即当主量子数 n 很大时光谱的量子频率过渡到经典的频率.参照玻尔的频率条件式(18)，

$$\tau\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}n}\ \rightarrow\ E(n)-E(n-\tau)\Rightarrow$$

$$\tau\frac{\mathrm{d}f(n)}{\mathrm{d}n}\ \rightarrow\ f(n)-f(n-\tau)$$

上式中 $f(n)$ 为任意函数，即玻尔对应原理要求将经典情况函数 f 对量子数 n 微商替换为量子论情况下差分的形式.海森伯从玻恩(M. Born)那学到了将式(28)转译为满足克喇末斯的色散公式或库恩-托马斯(Kuhn-Thomas)求和公式的差分形式，

$$h=2\pi m\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\tau}[|x(n+\tau,n)|^{2}\omega(n+\tau,n)-$$

$$|x(n,n-\tau)|^{2}\omega(n,n-\tau)] \qquad (29)$$

上式也可写为

$$\hbar=m\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\tau}[|x(n+\tau,n)|^{2}\omega(n+\tau,n)-$$

$$|x(n,n-\tau)|^{2}\omega(n,n-\tau)]=$$

$$-2m\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\tau}|x(n,n-\tau)|^{2}\omega(n,n-\tau) \qquad (30)$$

式(30)为海森伯量子化条件，海森伯由此量子化条件导出了量子简谐振子的能级

$$E_{n}=h\nu(n+1/2),\quad n=0,1,2,\cdots.$$

海森伯发表了他的新力学后，玻恩和约当(P. Jordan)进一步发展了海森伯的思想，他们做出的最重要的工作是将海森伯量子化条件式(30)改写为一个更简洁的形式[9].

玻尔-索末菲量子化条件式(26)可写为

$$J(=nh)=\oint p\mathrm{d}q=\int_{0}^{2\pi/\omega}p\dot{q}\mathrm{d}t \qquad (31)$$

经典动量，位置的表达式为

$$p=\sum{}_{\tau}p_{\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\omega t},\quad q=\sum{}_{\tau}q_{\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\omega t}$$

显然

$$\dot{q}=\sum{}_{\tau}\mathrm{i}\omega\tau q_{\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau\omega t}$$

将这些表达式代入量子化条件的式(31)并在方程的两边对 J 偏微分得

$$1=2\pi\mathrm{i}\sum_{-\infty}^{\infty}\tau\frac{\partial}{\partial J}(q_{\tau}p_{-\tau})=2\pi\mathrm{i}\sum_{-\infty}^{\infty}\tau\frac{\partial}{\partial J}(q_{\tau}p_{\tau}^{*}) \qquad (32)$$

得到上式时用到了关系式 $\delta(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$，注意到 $J=nh$，由对应原理可知，式(32)转译至量子论后具有如下的形式，

$$1=\frac{2\pi\mathrm{i}}{h}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}[p^{*}(n+\tau,n)\,q(n+\tau,n)-$$

$$q(n,n-\tau)\,p^{*}(n,n-\tau)]$$

$$\frac{2\pi\mathrm{i}}{h}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}[p(n,n+\tau)\,q(n+\tau,n)-$$

$$q(n,n-\tau)\,p(n-\tau,n)] \qquad (33)$$

物理量 q、p 在量子论中显然是矩阵形式，上式可以写成简洁的形式如下

$$pq-qp=-\mathrm{i}\hbar\ \text{或者}\ qp-pq=\mathrm{i}\hbar \qquad (34)$$

由于位置和动量都是矩阵，令 $p=m\dot{q}$，则有

$$q=q(n,k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(n,k)t}$$

$$p=m\dot{q}=\mathrm{i}\omega(nk)\,q(n,k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(n,k)t}$$

将上面两式代入式(33)得

$$\mathrm{i}m\sum_{k}[\omega(n,k)q(n,k)q(k,n)-\omega(k,n)q(n,k)q(k,n)]=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}$$

上式进一步化简得

$$-2m\sum_{k}\omega(n,k)\mid q(n,k)\mid^{2}=\hbar$$

这个结果正是海森伯量子化条件式(30).位置和坐标之间的对易关系式(34)是量子论中最基本的对易关系,狄拉克(P. Dirac)从量子泊松括号出发也得到了式(34),不过比玻恩和约当稍晚一点.

海森伯、玻恩和约当三人完成了矩阵力学的完整表述,主要内容包括海森伯的对易关系多自由度推广,玻恩的正则变换和约当的角动量研究[10].文中设f为q、p的所有有理函数,由基本对易关系式(34)得到

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial p}=fq-qf,\quad \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial q}=pf-fp \tag{35}$$

令f等于系统哈密顿量H,哈密顿正则方程

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q},\ \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$$

则式(35)变为

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\dot{q}=Hq-qH,\quad \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\dot{p}=Hp-pH \tag{36}$$

这样所有是q、p的有理函数$O(p,q)$的运动方程为

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\dot{O}=HO-OH$$

或者

$$\mathrm{i}\hbar\dot{O}=OH-HO\equiv[O,H] \tag{37}$$

运动方程式(37)即海森伯运动方程,该方程以物理量为时间的函数,量子态不随时间变化.从标准量子力学看,实际上就是海森伯绘景(Picture)下表示物理量的算符的运动方程.

泡利(W. Pauli)利用三人文章的新力学,借助于荣格-楞次(Runge-Lenz)矢量将能量H,角动量$\vec{p}^{2}$平方,角动量P_z方向分量对角化,得到了氢原子能量本征值的玻尔公式,不仅如此泡利运用微扰论轻而易举的解决了斯塔克(J. Stark)效应和交叉的电、磁场作用下氢原子光谱的分裂,这一问题对于旧量子论一直存在着不可克服的困难[11].泡利关于氢原子的工作证实了三人文章的量子力学至少同旧量子论同样有效,另外也给玻尔的氢原子理论提供了严格的理论依据.

3 玻尔氢原子理论的地位和对应原理的历史意义

在原子的卢瑟福核式模型的基础上发展起来的玻尔氢原子理论第一次把光谱纳入一个理论体系中.玻尔理论指出经典物理的规律不能完全适用于原子内部,微观体系应该有特有的量子规律.玻尔理论中普遍的规律有:1、原子具有能量不连续的定态,原子只能较长时间停留在这些定态,定态上的原子不发射也不吸收能量;2、原子从一个定态跃迁到另一个定态发射或吸收电磁波的频率是一定的,满足频率条件$h\nu_{kn}=E_k-E_n$.玻尔理论指出了当时原子物理发展的方向,极大地推动了实验工作(如弗兰克-赫兹实验,施特恩-盖拉赫实验,尤里(H. Urey)发现氢的同位素氘)和理论工作(如爱因斯坦受激辐射理论,索末菲椭圆轨道和相对论效应修正,克喇末斯-海森伯色散理论,海森伯矩阵力学)的发展,承前启后,是原子物理一个非常重要的进展.

1925年海森伯关于矩阵力学的第一篇文章就是多次运用对应原理发现矩阵乘法运算规则,矩阵力学可以说是对应原理的逻辑结果.1925年到1927年海森伯、薛定谔、狄拉克、玻恩、约当创立发展了量子力学后,对应原理今天已无重要性.既然玻尔并未提出小量子数情形下跃迁概率与经典振幅之间普遍而定量的关联,对应原理在旧量子论中为何还如此有用,以至于玻尔和玻恩对它作出了这么高的评价?这是因为[12],对应原理虽未能给出计算跃迁概率的普遍方法,但玻尔所说的跃迁概率与经典振幅之间的“密切的联系”包含了一些重要的定性对应,比如可以通过对经典振幅的分析确定量子跃迁为零的情形,这样就可以导出量子跃迁的选择定则,光谱强度以及跃迁辐射的偏振性质,而这些在旧量子论(The Old Quantum Theory)时期具有极大的重要性.

参考文献:

[1] Einstein A. Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtes betreffenden heuristischen gesichtspunkt[J]. Annalen der Physik, 1905, 17: 132-148.

[2] Rutherford E. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom[J]. Philsophical Magazine, 1911, 21: 669-688.

[3] Bohr N. On the constitution of atoms and molecules, Part I[J]. Philosophical Magazine, 1913, 26: 1-24.

[4] Bohr N. On the quantum theory of line-spectra[J]. D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturvidensk. Og Mathem. Afd. 8. Række, 1918, IV.1: 1-3.

[5] 曾谨言,喀兴林.对应原理在量子论发展中所起的作用[J].大学物理,1985, 1(9): 10-14.

(下转40页)

cade lasers[J]. Optics Letters, 2017, 42(2): 243-246.

[5] Abbott B P, et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral [J]. Physical Review Letters, 2017, 119 (16): 161101-1-18.

[6] Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence[J]. Physical Review Letters, 2016, 116 (24): 241103-1-14.

[7] Robert P, Gerhard L. Simulation Of The Resulting Intensity Distribution By Multi - beam Interference Of An Ultra-short Pulse Laser[J]. Acta Technica Corvininesis-Bulletin of Engineering, 2012, 5: 85-90.

[8] Diels J, Rudolph W. Ultrashort Laser Pulse Phenomena [M]. USA: Academic Press, 2006: 457-486.

[9] https: //ocw. mit. edu/courses/electrical - engineering - and-computer-science/6-977-ultrafast-optics-spring-2005/lecture-notes/.

[10] Trebino R. Frequency - Resolved Optical Gating: The Measurement of Ultrashort Laser Pulses[M]. New York: Springer, 2012: 1-101.

Application of Fabry-Perot interference to ultrashort laser pulse measurement

LIU Wen-jun, SUN Zheng-he, REN Shou-tian, GAO Ren-xi, PAN Yu-zhai, MIAO Jie-guang

(Department of Optoelectronics and Science, School of Science, Harbin Institute of Technology at Weihai, Weihai, Shandong 264209, China)

Abstract: Fabry-Perot interferometer is applied to measure ultrashort laser pulse. The principle of ultrashort laser pulse measurement based on Fabry-Perot interferometer is analyzed. Experiments on ultrashort pulse measurement are conducted. The experimental results are in agreement with those obtained by using Michelson interference autocorrelation.

Key words: Fabry-Perot interferometer; autocorrelation; ultrashort laser pulse

(上接8页)

[6] 甄长荫. 玻尔对应原理及其推广[J]. 大学物理, 1992, 11(8):22-26.

[7] 曾谨言. 量子力学(卷2) [M].5版. 北京:科学出版社,2014: 7-8.

[8] Heisenberg W. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen [J]. Zeitschrift für Physik, 1925, 33: 879-893.

[9] Born M, Jordan P. Zur quantenmechanik[J]. Zeitschrift für Physik, 1925, 34: 858-888.

[10] Born M, Heisenberg W, Jordan P. Zur quantenmechanik II[J]. Zeitschrift für Physik, 1926, 35: 557-615.

[11] Pauli W. Über das wasserstoffspecktrum vom standpunkt derneuen quantenmechanik [J]. Zeitschrift für Physik 1926, 36: 336-363.

[12] 卢昌海.纪念戈革——兼论对应原理、互补原理及EPR 等 [EB/OL]. http: //changhai. org/articles/science/misc/gege2.php,2013.10.

Bohr model of hydrogen atom, correspondence principle and matrix mechanics

HUANG Yong-yi, ZHANG Chun-min

(School of Science, Xi'anJiaotong University, Xi'an, Shanxi 710049, China)

Abstract: This paper reproduces the original Bohr model of hydrogen atom, from which we extract Bohr's correspondence principle. We apply the correspondence principle to the two examples: the calculations of atomic spectra intensities from classical physics and the creations of matrix mechanics.

Key words: Bohr model of hydrogen atom; correspondence principle; matrix mechanics