质点在匀速水平转动的光滑圆盘上的运动*

黄永义†

（西安交通大学理学院，陕西 西安 710049）

摘 要：研究了质点在匀速水平旋转的半径很大的光滑圆盘上的运动，给出了转动的圆盘参考系中质点的运动轨迹，该结果定性地解释了地球气旋的形成。

关键词：转动的光滑圆盘；科里奥利力； 离心力

中图分类号：TP79 **文献标识码：**A **文章编号：**1003-7551(2018)01-0031-03

1 引言

质点在转动的参考系中运动，在转动的参考系质点就会受到惯性力:离心力和科里奥利力(Coriolis Force)。离心力和科里奥利力的数学公式表述式分别为 $\mathbf{F}_C = m\omega^2\mathbf{r}$ ， $\mathbf{F}_K = 2m\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}$ ，式中 m 为质点质量， $\mathbf{v}$ 为质点对转动参考系相对速度， $\boldsymbol{\omega}$ 为转动参考系角速度。地球上的科里奥利力会使得河床的一侧被河水冲刷比另一侧更厉害，火箭落地的位置稍微偏东，大气向低气压流动时产生气旋等，典型的气旋如图 1 所示。

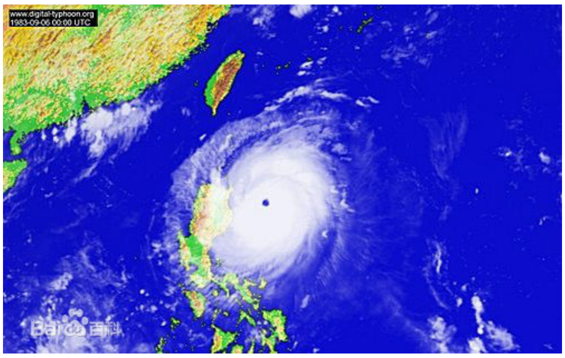


图 1 地球上的气旋

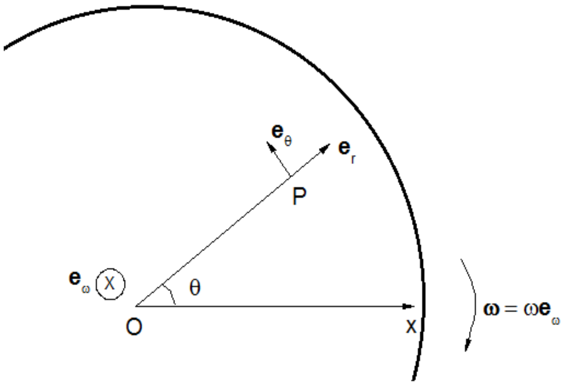


图 2 质点在匀速水平转动的光滑圆盘上运动

2 运动方程和数值解

如图2所示光滑圆盘相对地面顺时针以角速度 $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_\omega$ 匀速转动，其方向垂直于纸面向里。在圆盘参考系建立极坐标系，极坐标两个方向矢量分别为 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ 。转动的光滑圆盘相对地面为非惯性系，质点运动方程为

$$m\boldsymbol{a} = m\omega^2\boldsymbol{r} + 2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

式中 $\omega^2\boldsymbol{r} = \omega^2 r\mathbf{e}_r, \boldsymbol{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ ， $\mathbf{e}_r\times\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\theta\times\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{e}_r$ ， $\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta$ ，因此（1）式可写为

$$\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta = \left(\omega^2 r - 2r\omega\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\omega\mathbf{e}_\theta \tag{2}$$

其中 r, θ 上面的点代表对时间的微分。（2）式可写为两个方程

收稿日期：2018-01-11

＊ 基金项目：西安交通大学基本科研业务费综合交叉类项目

† 通讯作者：yyhuang@xjtu.edu.cn

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \omega^2 r - 2r\omega\dot{\theta} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2\dot{r}\omega \end{cases} \tag{3}$$

为了进行数值计算，我们采用自然单位，初始条件和角速度设定为 $\omega = 1, r_0 = 1, \theta_0 = 1, \dot{r}_0 = -1, \dot{\theta}_0 = 1$，matlab 数值计算给出的轨迹曲线如图 3 所示。

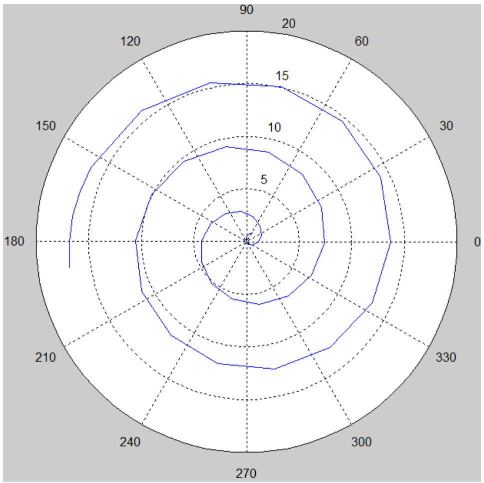


图 3 质点在匀速转动光滑圆盘上的轨迹

质点在离心力和科里奥利力作用下，其在光滑圆盘上的轨迹有点像阿基米德螺线。很多质点在旋转的光滑圆盘上运动，质点系的轨迹就变成了圆盘上的气旋，我们的结果就定性的解释了地球上气旋的形成。

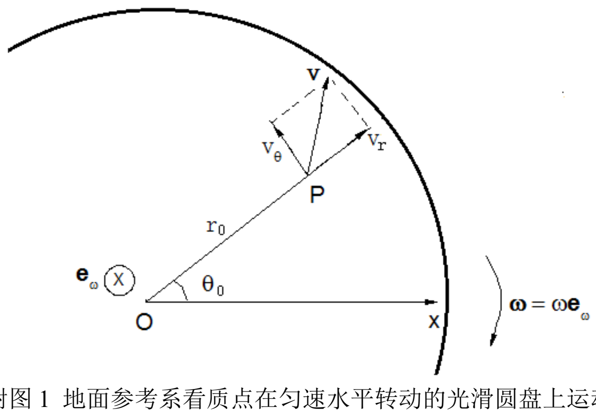
3 结论

本文给出了质点在匀速水平旋转的半径很大的光滑圆盘上的运动方程，并通过 matlab 数值解给出了转动的圆盘参考系中质点的运动轨迹，该轨迹类似于阿基米德螺线。很多质点构成的质点系在旋转的光滑圆盘上运动，它们的轨迹就变成了圆盘上的气旋，我们的结果定性地解释了地球上气旋的形成。需要说明的是，质点的轨迹不可能是阿基米德螺线，因为质点有切线速度时，质点的离心力和科里奥利力的径向分量之和不可能总是为零，即质点在径向的速度不是恒速度。同样质点的科里奥利力使得其切线速度也不为恒量，故轨迹不可能是阿基米德旋线。

参 考 文 献

[1] 黄永义，科里奥利力简单而清晰的导出[J].广西物理，2015, 36(4): 43－44.

附录：在地面参考系求得质点在水平转动的光滑圆盘上的轨迹



附图 1 地面参考系看质点在匀速水平转动的光滑圆盘上运动

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

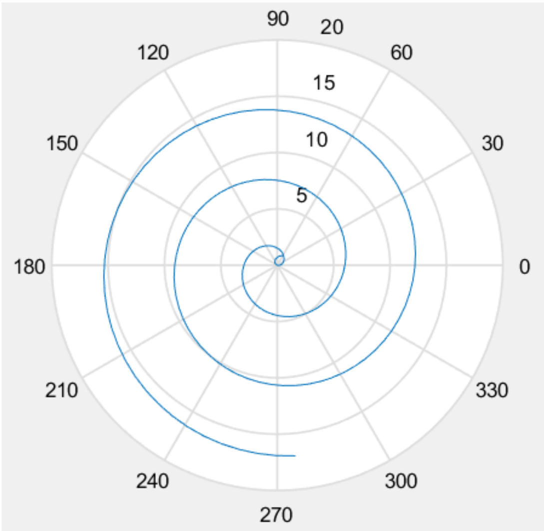
如附图 1 所示，地面参考系看有一个质点以一恒定速度 **v** 在旋转的圆盘上运动，其径向速度为υ_r，横向速度为υ_θ，对应的初始角速度为$\omega_0 = \upsilon_\theta / r_0$。由于质点和圆盘无摩擦，质点在圆盘上的径向速度和横向速度均为恒量，因此经过时间 t 后，质点在圆盘上运动的径向距离为

$$r = r_0 + \upsilon_r t\,, \tag{f1}$$

转动的角度为

$$\theta = \theta_0 + \tan^{-1}\left(\omega_0 t\right) + \omega t\,. \tag{f2}$$

初始条件和角速度设定为$\omega = 1, r_0 = 1, \theta_0 = 1, \upsilon_r = \dot{r}_0 = -1, \omega_0 = \dot{\theta}_0 = 1$，由(f1)和(f2)式画极坐标下的轨迹即在圆盘参考系中质点运动的轨迹如附图 2 所示。附图 2 和图 3 的形状完全相同，可能由于 matlab 数值计算的误差积累，附图 2 和图 3 有少许偏离。



附图 2　地面参考系求的质点在匀速水平转动的光滑圆盘上的轨迹

由(f2)式得到质点的在圆盘参考系中的角速度为$\dot{\theta} = \omega + \omega_0 / \left(1 + \omega_0^2 t^2\right)$，显然角速度不是恒量，而圆盘参考系中的径向速度为$\upsilon_r$是恒量(地面参考系看质点会沿着径向做匀速直线运动，圆盘参考系的观测者测得质点的径向速度也是恒量)，故质点在圆盘中的轨迹不可能是阿基米德螺线。有趣的是当时间 t 趋于无穷大时角速度$\dot{\theta}$的极限为ω，此时质点轨迹为阿基米德螺线。

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net