

普朗克黑体辐射定律的建立过程

黄永义[†]

(西安交通大学非平衡物质结构及量子调控教育部重点实验室,
光信息科学与技术系, 陕西 西安 710049)

摘要: 叙述了黑体辐射公式中几个重要结果维恩定律, 瑞利-金斯公式和普朗克公式的建立过程, 遵循普朗克的思路给出了普朗克公式的量子论解释。

关键词: 黑体辐射; 维恩定律; 瑞利-金斯公式; 普朗克公式; 普朗克量子论

中图分类号: O413

文献标识码: A

文章编号: 1003-7551(2011)03-0032-05

1 引言

所谓黑体, 就是对什么光都吸收而无反射也无透射的物体。黑体是不存在的, 就像质点, 刚体, 电偶极子等物理概念一样是一个理想化的物理模型。物理上可以用如图 1 所示的装置来模拟黑体。耐火材料做成的物体内部挖空一部分区域, 并且在物体一个面开一个非常小的小孔, 一旦光线射进小孔后, 在空腔内壁经过多次吸收和反射, 几乎完全被吸收掉, 再跑出小孔的几率特别小, 因此可以把空腔的小孔视为黑体的表面。定义吸收本领 $\alpha(\nu, T)$ 为在频率 ν 附近, 单位频率间隔内被物体吸收的辐射通量与照射在该物体上的辐射通量之比, 则黑体的吸收本领 $\alpha(\nu, T) = 1$ 。由于任何一个物体, 当它的温度恒定时, 它辐射的电磁波和吸收的电磁波达到平衡。定义物体的辐射本领 $R(\nu, T)$ 为一定温度下 T 下物体单位表面积在单位时间内发射、频率在 $\nu \rightarrow \nu + d\nu$ 内单位频率间隔的辐射能, 谱能量密度 $\rho(\nu, T)$ 为温度为 T 的辐射场单位体积频率在 $\nu \rightarrow \nu + d\nu$ 内单位频率间隔的辐射能。波长表示辐射本领 $R(\lambda, T)$ 和频率表示的辐射本领 $R(\nu, T)$ 之间的关系为 $R(\lambda, T) = cR(\nu, T)/\lambda^2$, 物体的辐射本领 $R(\nu, T)$ 和吸收本领 $\alpha(\nu, T)$ 及辐射场的谱能量密度之比为一普适常数, 即 1859 年提出的基尔霍夫定律^[1]

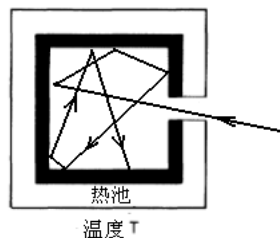


图 1 黑体的模拟

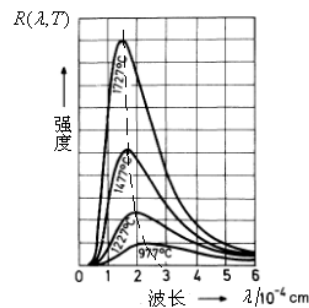


图 2 黑体辐射谱

$$\frac{R(\nu, T)}{\alpha(\nu, T)} = F = \frac{c}{4} \rho(\nu, T) \quad (1)$$

上式中 c 为真空中的光速, 该常数 F 被证明等于 $c\rho(\nu, T)/4$ ^[2]。对黑体而言有 $\alpha(\nu, T) = 1$, 黑体的辐射本领 $R_0(\nu, T)$ 为

$$R_0(\nu, T) = F = c\rho(\nu, T)/4 \quad (2)$$

(2) 式意味着黑体的辐射本领 $R_0(\nu, T)$ 就等于基尔霍夫定律里面的普适常量, 因此黑体辐射的研究对于任何物体的热辐射规律具有重大的意义, 其物理价值是不言而喻的。

由于 19 世纪工业发展特别是冶金行业的需要, 人们也越来越重视对热辐射和黑体辐射研究。1881 年兰利 (S P Langley) 发明热辐射计, 1886 年他能很灵敏地测量热辐射能量的分布, 19 世纪末物理学家如鲁本斯

收稿日期: 2011-06-12

[†] 通讯作者: yyhuang@mail.xjtu.edu.cn

(H Rubens), 普林舍姆 (E Pringsheim), 卢末尔 (O Lummer) 和库尔玻姆 (F Kurlbaurn) 等已对黑体辐射作出了相当精确的测定。图 2 是黑体辐射的实验结果, 虚线维恩位移定律。维恩和瑞利、金斯对黑体辐射规律的研究是两个重大的突破, 最终形式的普朗克黑体辐射公式就是在他们工作基础上建立起来的, 普朗克公式的量子论解释是物理学中一个重大的发现, 普朗克也是公认的量子论的先驱。本文着重叙述维恩、瑞利、金斯及普朗克工作的主要内容。

2 维恩定律

1893 年 Wien 利用热力学和电磁学理论证明了黑体辐射中电磁波谱密度具有如下公式,

$$R_0(\lambda, T) = \frac{c^5}{\lambda^5} \varphi\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \text{ 或者 } R_0(\nu, T) = c\nu^3 \varphi\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (3)$$

方程(3)称为维恩定律。上式的意义在于把两个独立变量 ν 和 T 的元函数 $R_0(\nu, T)$ 归纳为一个已知的函数 ν^3 和一个宗量为 ν/T 的函数。这样就把一个寻找两个独立变量函数 $R_0(\nu, T)$ 的问题归结为找寻函数 $\varphi(\nu/T)$ 了。

下面我们看看维恩定律导出过程^[3]。由于黑体辐射与空腔的材质和形状无关, 不失一般性, 不妨考查一个管型容器辐射空腔, 如图 3 所示。腔内有黑体辐射能量密度为 $\rho_0(\nu)$, 管子的右端有一反射镜以速度 v 向外移动, 设频率为 ν 的辐射以入射角为 θ 射向镜面, 由纵向多普勒效应得反射后频率为

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{c - v \cos \theta}{c + v \cos \theta}} \approx \nu \left(1 - \frac{2v}{c} \cos \theta\right) \text{。 如果原频率为}$$

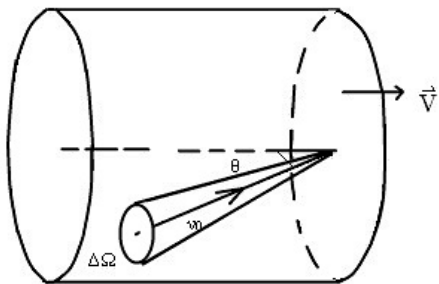


图 3 管状辐射空腔

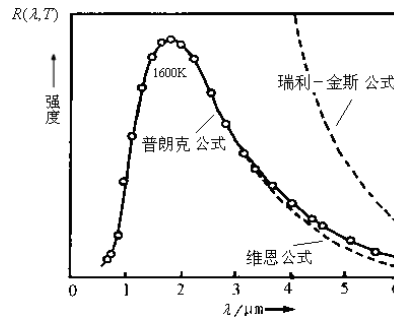


图 4 三种不同的黑体辐射公式与实验的比较

$$\nu'' = \nu \left(1 + \frac{2v}{c} \cos \theta\right) \quad (4)$$

则反射后频率变为 ν'' 。 Δt 秒内立体角 $\Delta \Omega$ 的光线打到镜面的辐射能为

$$\Delta E = \frac{\Delta \Omega}{4\pi} \rho_0(\nu'') d\nu'' c \Delta t A \cos \theta \quad (5)$$

式中 $d\nu'' = d\nu(1 + 2v \cos \theta / c)$ 。设入射辐射强度为 I'' , 辐射压 $P = 2I'' \cos \theta / c$ 做功使得镜子外移, 每秒做功为 $PAv = I'' A 2v \cos \theta / c$ 。 $I'' A = \rho_0(\nu) d\nu$ 表示未做功前辐射到镜子的能量, 于是由于光压做功镜子获得能量将损失 $\rho_0(\nu) d\nu 2v \cos \theta / c$ 。

由 (4) 式得多普勒效应造成镜子的反射能量密度较入射前减小量为

$$\rho_0(\nu'') - \rho_0(\nu) = \frac{\partial \rho_0}{\partial \nu} \left(\nu \frac{2v}{c} \cos \theta\right) \quad (6)$$

这样考虑镜面对光的反射、光压做功的能量损失后, 镜面获得辐射能的增量为

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \Omega}{4\pi} \left\{ \left[\rho_0(\nu) + \frac{\partial \rho_0}{\partial \nu} \left(\nu \frac{2v}{c} \cos \theta\right) \right] [d\nu + d\nu \frac{2v}{c} \cos \theta] - \rho_0(\nu) d\nu - \rho_0(\nu) d\nu \frac{2v}{c} \cos \theta \right\} c \Delta t A \cos \theta \\ & = \frac{1}{2\pi} \nu \frac{\partial \rho_0}{\partial \nu} d\nu Av \Delta t \cos^2 \theta \Delta \Omega \end{aligned}$$

式中忽略了 ν/c 的二次项。令 $\Delta V = Av \Delta t$, $\Delta \Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, 如图 3, 注意积分限的选取, 上式对立体角 $\Delta \Omega$ 积分后, 镜子获得辐射能量的增量为,

$$d(\rho_0 V)dv = \frac{1}{2\pi} v \frac{\partial \rho_0}{\partial v} dv dV \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3} v \frac{\partial \rho_0}{\partial v} dv dV$$

此方程整理如下的形式 $V \frac{\partial \rho_0}{\partial V} = \frac{1}{3} v \frac{\partial \rho_0}{\partial v} - \rho_0$ 。方程隐函数形式的解为

$$\rho_0 = v^3 \varphi(v^3 V) \quad (7)$$

式中 $\varphi(v^3 V)$ 为未知函数。

辐射压 $p = \rho_0 / 3$ ，于是由热力学第一第二定律 $TdS = d(\rho_0 V) + pdV$ 化为

$$TdS = \frac{4}{3} \rho_0 dV + Vd\rho_0 \quad (8)$$

将斯特藩—玻尔兹曼定律 $\rho_0 = \sigma' T^4$ (σ' 为一常数) 代入 (8) 式得 $dS = 4\sigma' T^3 dV / 3 + 4\sigma' T^2 V dT$ 。此方程式的解为 $S = 4\sigma' T^3 V / 3 + \text{常数}$ 。管状空腔镜面移动为绝热过程，熵为一常数即 $T^3 V = \text{常数}$ ，将此关系代入 (7) 消去 V 得

$$\rho_0 = v^3 \varphi\left(\frac{V}{T}\right) \quad (9)$$

联合 $R_0(v) = c\rho_0(v)/4$ 和 (9) 式即得维恩定律 (3)。

维恩定律可以导出十分有用的维恩位移定律，事实上 (3) 式对 λ 微分并令其等于零得

$$\frac{dR_0(\lambda, T)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_m} = 0 \Rightarrow -5\varphi\left(\frac{c}{\lambda_m T}\right) + \lambda_m T \frac{d\varphi\left(\frac{c}{\lambda_m T}\right)}{d\lambda_m T} = 0$$

令 $\lambda_m T \equiv b$ ，方程变为 $-5\varphi(b) + b \frac{d\varphi(b)}{db} = 0$ ，原则上由此方程解出 b 即得维恩位移定律。但由于 $\varphi\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$ 是未知的，无法从 (3) 式推出维恩位移定律中常数 b 的值。为拟合黑体辐射的实验数据，维恩假设气体分子辐射的频率 ν 只与其速度 v 有关，猜了 $R_0(\nu, T)$ 的一个经验公式，被称为维恩公式，

$$R_0(\nu, T) = c_1 \nu^3 e^{-\frac{c_2 \nu}{T}}, \text{ 或者 } R_0(\lambda, T) = c'_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c'_2}{\lambda T}} \quad (10)$$

这个结果只在高频部分和实验相符，而低频部分和实验不符合，见图 4 所示。

3 瑞利—金斯公式

另一个较为成功公式是基于经典电动力学和统计力学导出的瑞利—金斯公式，如图 4 所示瑞利—金斯公式适用于低频部分的黑体辐射实验结果，在高频部分黑体辐射本领 $R_0(\nu, T)$ 趋向于无穷大，与实验矛盾，史称紫外灾难。空腔内电磁波和腔壁做简谐振动的原子交换能量达到平衡时满足的条件是

$$\rho(\nu, T) = g(\nu) \bar{\varepsilon}(\nu, T) \quad (11)$$

$\rho(\nu, T)$ 为辐射场的谱能量密度， $g(\nu) = 8\pi\nu^2 / c^3$ 为单位体积， ν 附近单位频率区间内电磁波振动模式数目^[1]， $\bar{\varepsilon}(\nu, T)$ 为空腔器壁原子做谐振动的平均能量。为了计算谐振子的平均能量 $\bar{\varepsilon}(\nu, T)$ ，瑞利和金斯采用统计力学中的能均分定理

$$\bar{\varepsilon}(\nu, T) = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon} = kT$$

将上式代入 (11) 式得到黑体辐射的瑞利—金斯公式

$$R_0(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2} \frac{c}{4} \rho_0(\nu, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT \quad (12)$$

很明显，瑞利—金斯也符合维恩定律 (3) 式的形式，不过没有出现位移的峰值。黑体辐射的高频部分当 $\lambda \rightarrow 0$ ， $R_0(\lambda, T) \rightarrow \infty$ ，实验结果是 $R_0(\lambda, T) \rightarrow 0$ 。瑞利—金斯公式和实验的矛盾表明，该公式在推导过程中使用的能均分定理有问题，事实上求解谐振子平均能量时的积分表明瑞利、金斯默认了能量无限可分的观念。

4 普朗克黑体辐射公式

维恩公式 (10) 和瑞利-金斯公式 (12) 分别在黑体辐射的高频部分和低频部分成立, 显然还需要一个更好的公式在整个频率范围内都成立。谐振子的平均能量的维恩表达式为 $\bar{\varepsilon}(\nu, T)_W = c_1 \nu e^{-\frac{c_2 \nu}{T}}$, 相应的温度

$\frac{1}{T} = -\frac{1}{c_2 \nu} \ln \frac{\bar{\varepsilon}_W}{c_1 \nu}$ 。1900 年普朗克从热力学的角度发现^[4], 谐振子的平均能量维恩表达式对应的熵对平均能量

的一阶导数 $\frac{\partial S}{\partial \bar{\varepsilon}_W} = \frac{1}{T} = -\frac{1}{c_2 \nu} \ln \frac{\bar{\varepsilon}_W}{c_1 \nu}$, 进一步得二阶导数 $\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{\varepsilon}_W^2} = -\frac{1}{c_2 \nu \bar{\varepsilon}_W}$ 即 $\frac{d^2 S}{d\bar{\varepsilon}^2} \sim -\frac{1}{\bar{\varepsilon}}$, 而谐振子平均能量的

瑞利-金斯表达式为 $\bar{\varepsilon}(\nu, T)_{RJ} = k_B T$, 得到 $\frac{1}{T} = \frac{k_B}{\bar{\varepsilon}_{RJ}}$, 熵对平均能量的一阶导数 $\frac{\partial S}{\partial \bar{\varepsilon}_{RJ}} = \frac{1}{T} = \frac{k_B}{\bar{\varepsilon}_{RJ}}$, 熵对平均

能量的二阶导数 $\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{\varepsilon}_{RJ}^2} = -\frac{k_B}{\bar{\varepsilon}_{RJ}^2}$ 即 $\frac{d^2 S}{d\bar{\varepsilon}^2} \sim -\frac{1}{\bar{\varepsilon}^2}$ 。既然黑体辐射的维恩公式和瑞利-金斯公式分别在高频和低频

区间成立, 普朗克想到用内插法把维恩公式和瑞利-金斯公式综合起来导出的公式可能在整个频谱范围都成立。于是普朗克把熵 S 对平均能量的二阶导数写为如下形式,

$$\frac{d^2 S}{d\bar{\varepsilon}^2} = -\frac{\alpha}{\bar{\varepsilon}(\beta + \bar{\varepsilon})}$$

式中 α, β 拟合参数, 上式积分并注意到 $\frac{dS}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{T}$, 得谐振子的平均能量 $\bar{\varepsilon} = \frac{\beta}{e^{\beta/(\alpha T)} - 1}$, 再由黑体特性 (2) 式、

平衡条件 (11) 式和维恩定律 (3) 式, 考虑到腔内电磁波的振动模数 $g(\nu) = 8\pi\nu^2/c^3$, 普朗克得到了一个完整描述黑体辐射谱的公式

$$R_0(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2} R_0(\nu, T) = \frac{C_2 \lambda^{-5}}{e^{C_1/\lambda T} - 1} \quad (13)$$

普朗克的黑体辐射公式 (13) 包含了两个常量 C_1 和 C_2 , 而不再使用参数 α, β 。由内插维恩公式 (10) 和瑞利-金斯公式 (12) 得到的黑体辐射公式 (13) 式能和当时最精确的黑体辐射实验结果相符合。

5 普朗克量子论

由于普朗克内插得到的黑体辐射公式 (13) 很准确的描述了黑体辐射的规律, 以至于普朗克决心不惜一切代价找到一个物理解释。经过两个月的奋斗他终于给出了一个同经典概念严重背离的物理解释^[5]。普朗克的物理解释是黑体空腔器壁上的原子谐振子的能量是量子化的, 而且谐振子与腔内电磁波的能量交换也是量子化的。下面就看看普朗克如何基于谐振子能量量子化假说导出他的黑体辐射公式的。

将能量 E 划分为 P 个相等的能量单元 ε , 于是有

$$E = P\varepsilon_0 \quad (14)$$

这些能量单位 ε_0 可以按不同的比例分配给 N 个谐振子, 由于这些能量单元 ε_0 都是不可区分的, 因此分配方案有所讲究。为了搞清楚这种分配方案, 我们以 $P=10$ 个能量单元 ε_0 分配到 $N=5$ 个谐振子上为例, 如图 5 所示, 探讨总共有多少分配方案。图中的小黑点代表一个能量单元 ε_0 , 两个实竖线间隔代表一个谐振子, 实线可以有不同排列, 虚线竖线代表边界固定。显然小黑点和实线共有的排列数为 $[10 + (5 - 1)]!$, 由于能量单元不可区分, 小黑点的任意排列数 $10!$ 不会带来能量分配的任何变化, 同样实竖线的任何排列 $(5 - 1)!$ 也不会带来能量分配的任何变化。因此 10 个能量单元 ε_0 分配到 5 个谐振子的分配方案数共有 $\frac{[10 + (5 - 1)]!}{10!(5 - 1)!}$ 种,

推而广之, P 个能量单元分配到 N 个谐振子的分配方案数共有

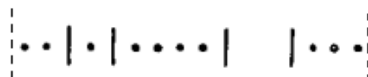


图 5 10 个不可区分能量单元分配到 5 个谐振子的分配方案

$$\Omega = \frac{(P + N - 1)!}{P!(N - 1)!} \quad (15)$$

显然由于 $P \gg 1, N \gg 1$ 可以采用斯特令近似公式 $N! = N^N$, (15) 式化为

$$\Omega = \frac{(P+N)^{P+N}}{P^P N^N} \quad (16)$$

分配方案数 Ω 和 N 个谐振子的玻尔兹曼熵 S_N 之间的关系为 $S_N = k \ln \Omega$, 式中的 k 为玻尔兹曼常数。将 (16) 式代入上式得到

$$S_N = k[(P+N) \ln(P+N) - P \ln P - N \ln N] = Nk \left[\left(1 + \frac{P}{N}\right) \ln \left(1 + \frac{P}{N}\right) - \frac{P}{N} \ln \frac{P}{N} \right] \quad (17)$$

总能量 $E = P\varepsilon_0$ 分配给 N 个谐振子, 每个谐振子的平均能量 $\bar{\varepsilon}$ 为 $\bar{\varepsilon} = \frac{E}{N} = \frac{P\varepsilon_0}{N}$ 。将谐振子平均能量代入 (17) 式得到 N 个谐振子的熵 S_N

$$S_N = Nk \left[\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\right) \ln \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\right) - \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \ln \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \right] \quad (18)$$

我们又知道 N 个谐振子的熵是单个谐振子熵的 N 倍, 即 $S_N = NS$, 于是单个谐振子的熵为

$$S = k \left[\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\right) \ln \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\right) - \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \ln \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \right] \quad (19)$$

由热力学公式 $\frac{1}{T} = \frac{dS}{d\varepsilon}$, 将 (19) 式对 $\bar{\varepsilon}$ 微分, 得 $\frac{1}{T} = \frac{k}{\varepsilon_0} \left[\ln \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\right) - \ln \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \right]$ 。由上式我们得到谐振子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1} \quad (20)$$

将平均能量 (20) 式代入 (11) 式注意到 (2) 式, 得黑体辐射本领

$$R(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1} \quad (21)$$

考虑到维恩定律 (3) 式的要求, 谐振子的能量单元必然正比于辐射场的频率, 令 $\varepsilon_0 = h\nu$, 我们便得到了普朗克的黑体辐射公式

$$R_0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1} \quad (22)$$

普朗克黑体辐射公式中包含了玻尔兹曼常数 k 和一个新的常数 h , 普朗克用黑体辐射公式 (22) 去拟合当时最精确的黑体辐射谱的实验结果得到 h 的值为 $h=6.55 \times 10^{-34} \text{J}\cdot\text{s}$, 比现代值低 1%。同时还给出了玻尔兹曼常数 $k=1.346 \times 10^{-23} \text{J/K}$, 比现代值低 2.5%, 而这个新的常数 h 也被称为普朗克常数。

6 结语

从维恩定律、瑞利-金斯公式再到普朗克公式的建立过程来看, 热力学统计物理在其中起到了工具的作用, 而普朗克的量子论的阐述过程中, 玻尔兹曼熵的概念更是用到极致。黑体辐射定律的建立和热力学统计物理的紧密关联, 似乎也是情理之中, 因为黑体辐射本身就是热辐射的一个特殊情况。普朗克的成功除了得益于深厚的热力学统计物理的根底, 敏锐的头脑, 还在于他十分注意最新实验的发展, 在 1900 年鲁本斯和库尔玻姆实验发现黑体辐射低频段与维恩公式明显偏离后, 普朗克不得不修正他当时已取得结果。普朗克量子论假说具有划时代的意义, 能量单元的存在它打破了能量连续变化的经典观念, 普朗克本人和他同时代的学者都没有充分认识和理解, 普朗克量子论提出后的 5 年他的工作几乎无人问津, 直到 1905 年爱因斯坦发展了量子论, 提出光子概念并成功解释光电效应以后, 人们才逐渐认识到普朗克量子论的巨大价值。

参 考 文 献

- [1] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程: 量子物理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [2] 王正行. 近代物理学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1995.
- [3] 吴大猷. 量子论与原子结构[M]. 台湾: 联经出版公司, 1977.
- [4] D. ter Haar. The Old Quantum Theory[M]. Pergamon Press, 1967.
- [5] M. Planck. On the law of distribution of energy in the normal spectrum[J]. Ann. der. Physik, 1901, (4): 553-558.