

二维 $N-S$ 方程的 Fourier 非线性 Galerkin 方法——全离散情形^{*1)}

侯延仁

(西安交通大学应用数学研究中心)

FOURIER NONLINEAR GALERKIN METHOD FOR 2-D $N-S$ EQUATIONS — FULL DISCRETE CASE

Hou Yanren

(Research Center for Applied Math, Xi'an Jiaotong University)

Abstract

A kind of full discrete nonlinear Galerkin method for 2-D Navier-Stokes equations is presented in this paper, which consists combining the nonlinear Galerkin method with the Fourier method and is called Fourier nonlinear Galerkin method here. We derive its stability condition and do some convergency analysis which indicates that this method is more stable than that of Galerkin method and suitable to simulate the long time behavior of the solution. Finally, we provide some numerical tests to verify our results.

引言

数值求解 $N-S$ 方程, 特别是在大 Reynolds 数, 流动趋于湍流时, 其计算量和解题规模之大, 即使是目前最先进的计算机, 也显得力不从心. 如果在与传统方法相当的解题规模和计算时间内, 能模拟更长的时间, 则对解的长时间行为, 特别是对湍流的直接数值计算, 都有重大的现实意义. 非线性 Galerkin 方法恰巧就具有这一特点, 它是近似惯性流形^[1,2] 基于 Galerkin 方法的一种数值实现. 它与传统方法最明显的区别是其空间离散位于一个非线性流形上.

1. Navier-Stokes 方程

考虑二维区域 $\Omega = (-\pi, \pi)^2$ 上粘性不可压 $N-S$ 方程

* 1995年1月23日收到.

1) 本文得到国家攀登计划项目基金和 LSEC 的资助.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - v\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, & \forall (x, t) \in \Omega \times \mathcal{R}^+, \\ \nabla \cdot u = 0, & \forall (x, t) \in \Omega \times \mathcal{R}^+, \\ \text{周期边界条件,} \\ u(x, 0) = u_0, & \forall x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 u 和 p 分别代表速度和压力, $v > 0$ 是动力粘性系数, f 为体积力, u_0 是初速度场且 $\nabla \cdot u_0 = 0$. 不失一般性, 设 $\int_{\Omega} u(x, t) dx = 0$ (参见 [3]).

$\forall m \in \mathcal{N}$, 引入 Ω 上周期函数空间 H^m , 即

$$H^m = \left\{ \varphi: \varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k e^{ik \cdot x}, c_k = \overline{c_{-k}}, c_0 = 0, \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |k|^{2m} |c_k|^2 < +\infty \right\}.$$

对任意的 $\alpha \in \mathcal{R}$, 可按通常的方法定义 H^α , 并以 $|\cdot|_\alpha$ 表示其范数. 同时, 引入

$$H = \{ \varphi \in H^0, \operatorname{div} \varphi = 0, \text{在弱意义下} \}, \quad V = \{ \varphi \in H^1, \operatorname{div} \varphi = 0 \},$$

其内积和范数分别定义为

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx, \quad |u| = (u, u)^{\frac{1}{2}}, \\ ((u, v)) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad \|u\| = ((u, u))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

定义 H 上无界线性算子 $A: Au = -\Delta u$, 其定义域为 $D(A) = V \cap H^2$. 众所周知, 我们可定义 A 的幂 $A^r, r \in \mathcal{R}, D(A^r) = V \cap H^{2r}$, 且 $|A^r \cdot|$ 是 H^{2r} 的一种等价范数. 另外, 引入投影算子 $P_c: H^0 \rightarrow H$ (具体构造见 [4]), 并注意它可与导算子交换. 现在, 将 (1.1) 投影到 H 上, 我们得到如下泛函微分方程:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + vAu + B(u, u) = Pf \triangleq f, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 $B(u, u) = P_c(u \cdot \nabla)u$. 若以 $b(\cdot; \cdot, \cdot)$ 表示三线性形式 $(B(\cdot, \cdot), \cdot)_H$, 参见 [3] 我们知道,

$$\begin{cases} b(u; v, w) = -b(u; w, v), \quad \forall u, v, w \in V, \\ b(u; u, Au) = 0, \quad \forall u \in D(A), \\ |b(u; v, w)| \leq c \|u\|_{m_1}^{1-\alpha_1} \|u\|_{m_1}^{\alpha_1} \|v\|_{m_2+1}^{1-\alpha_2} \|v\|_{m_2+1}^{\alpha_2} \|w\|_{m_3}^{1-\alpha_3} \|w\|_{m_3+1}^{\alpha_3}, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $m_i = [s_i], \alpha_i = s_i - m_i$. 这里 $s_i \geq 0, i = 1, 2, 3$, 且 $\sum_{i=1}^3 s_i > 1$, 或 $\sum_{i=1}^3 s_i = 1$ 但 $s_i \neq 1, c > 0$ 是一常数. 今后, 总以 $c > 0$ 表示一个通用常数. 另外, 由 (1.3) 第二式易得

$$b(u; u, A\varphi) + b(\varphi; u, Au) + b(u; \varphi, Au) = 0, \quad \forall u, \varphi \in D(A). \quad (1.4)$$

在本节最后, 我们给出关于 B 的一个估计 (具体证明参见 [5]).

引理 1.1. 对 $0 < r \leq \frac{1}{2}$, 存在只依赖于 Ω 和 r 的常数 $c > 0$, 使得

$$\begin{cases} |A^r B(u, v)| \leq c |A^{\frac{1}{2}} u| |Av|, & \forall r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), u \in D(A^{\frac{1}{2}}), v \in D(A), \\ |A^{\frac{1}{2}} B(u, v)| \leq c |A^{\frac{3}{4}} u| |Av|, & \forall u \in D(A^{\frac{3}{4}}), v \in D(A). \end{cases} \quad (1.5)$$

2. 全离散形式及其稳定性

设 $m, M \in \mathcal{N}$, $m < M$, 考虑有限维空间

$$S_M = \left\{ \varphi \in H: \varphi = \sum_{-M \leq k_1, k_2 \leq M} c_k e^{i k \cdot x} \right\}.$$

以 P_M 表示 $L^2(\Omega)^2$ 到 S_M 的投影, 并记 $Q_M = I - P_M$. 则^[6]

$$|v|_r \leq c M^{r-s} |v|_s, \quad |Q_M \varphi|_s \leq c M^{s-r} |\varphi|_r, \quad \forall v \in S_M, \varphi \in H^r, 0 \leq s \leq r. \quad (2.1)$$

同样可定义 S_m , 且记 $Q_{Mm} = P_M - P_m$. 现在, 引入工作空间

$$V_M = S_M \cap V, \quad V_m = S_m \cap V, \quad V_M^m = Q_{Mm} S_M \cap V.$$

显然, $V_M = V_m \oplus V_M^m$.

下面, 我们给出 (1.2) 的一种基于非线性 Galerkin 方法的全离散逼近形式

$$\begin{cases} \forall n \geq 0, \text{ 若 } (v_n, w_n) \in V_m \times V_M^m \text{ 已知, 求 } (v_{n+1}, w_{n+1}) \text{ 使} \\ v_{n+1} - v_n + vkAv_{n+1} + kP_m B(v_n + w_n, v_n + w_n) = kP_m f(nk), \\ w_{n+1} - w_n + vkAw_{n+1} + kQ_{Mm} B(v_n, v_n) = kQ_{Mm} f(nk), \\ v_0 = P_m u_0, \quad w_0 = Q_{Mm} u_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

这里, $k > 0$ 是时间步长. 为了避免累赘, 有时我们以 u_n 表示 $v_n + w_n$. 在叙述本节的定理之前, 我们还需介绍一种离散 Gronwall 不等式.

Gronwall 引理 1. 令 $\{d_n\}_{n \geq 0}$ 是正数序列, 满足

$$\forall n \geq 0, \quad \alpha d_{n+1} - \beta d_n \leq h,$$

其中 α, β 和 h 是三个正常数, $\alpha \neq \beta$, 则

$$\forall n \geq 0, \quad d_n \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \left(d_0 - \frac{h}{\alpha - \beta}\right) + \frac{h}{\alpha - \beta}.$$

定理 2.1. 假定 $u_0 \in V$, $f \in C(\mathcal{R}^+, H)$. 令 $R = \|u_0\| + \frac{c \sup_{t \geq 0} |f|}{\nu}$, 若 k 和 m 满足如下稳定性条件

$$1 - ck m^{\frac{3}{2}} R + \frac{ckmR^2}{\nu} \geq 0, \quad (2.3)$$

则 (2.2) 在 V 中是一致稳定的, 即

$$\forall n \geq 0, \|v_n + w_n\| \leq R. \quad (2.4)$$

注 1. (2.3) 显示, 无论 M 取何值, 非线性 Galerkin 方法的稳定性条件只与 m 有关, 因此, 它比一般 Galerkin 方法具有更好的稳定性. 这一点在后面的数值检验中也得到了证实.

证. 首先, 记 $\xi_n = u_{n+1} - u_n$, $\eta_n = v_{n+1} - v_n$, $\zeta_n = w_{n+1} - w_n$, 显然 $\xi_n = \eta_n + \zeta_n$. 将 (2.2) 的两个方程式相加, 并与 Au_{n+1} 作内积, 注意 (1.3) — (1.4), 有

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}\|^2 - \|u_n\|^2 + \|\xi_n\|^2 + 2vk|Au_{n+1}|^2 &= k(f, Au_{n+1}) + kb(u_n; u_{n+1}, A\eta_n) \\ &\quad - kb(u_n; \xi_n, A\eta_n) - kb(v_n; \eta_n, A\zeta_n) + kb(v_n; v_{n+1}, A\zeta_n) + kb(w_{n+1}; A\eta_n, w_n) \\ &\quad - kb(\zeta_n; A\eta_n, w_n) + kb(\zeta_n; Av_{n+1}, w_n) - kb(w_{n+1}; Av_{n+1}, w_n). \end{aligned} \quad (2.5)$$

利用性质 (1.3), (1.5) 和 (2.1), 右端九项可逐项进行估计如下:

$$k|(f, Au_{n+1})| \leq \frac{vk}{6} |Au_{n+1}|^2 + \frac{ck}{v} \sup_{t \geq 0} |f|^2,$$

$$k|b(u_n; \xi_n, A\eta_n)| \leq ck \|u_n\| \|\xi_n\| |A^{\frac{5}{4}} \eta_n| \leq ckm^{\frac{3}{2}} \|u_n\| \|\xi_n\|^2,$$

$$\begin{aligned} k|b(u_n; u_{n+1}, A\eta_n)| &= k|A^{\frac{1}{4}} B(u_n, u_{n+1}), A^{\frac{3}{4}} \eta_n| \\ &\leq ck \|u_n\| |Au_{n+1}| |A^{\frac{3}{4}} \eta_n| \leq \frac{vk}{6} |Au_{n+1}|^2 + \frac{ckm}{v} \|u_n\|^2 \|\xi_n\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k|b(v_n; \eta_n, A\zeta_n)| &= k|A^{\frac{1}{2}} B(v_n, \eta_n), A^{\frac{1}{2}} \zeta_n| \\ &\leq ck |A^{\frac{3}{4}} v_n| |A\eta_n| \|\zeta_n\| \leq ckm^{\frac{3}{2}} \|u_n\| \|\xi_n\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k|b(v_n; v_{n+1}, A\zeta_n)| &= k|A^{\frac{1}{2}} B(v_n, v_{n+1}), A^{\frac{1}{2}} \zeta_n| \\ &\leq ckm^{\frac{1}{2}} \|v_n\| |Av_{n+1}| \|\zeta_n\| \leq \frac{vk}{6} |Au_{n+1}|^2 + \frac{ckm}{v} \|u_n\|^2 \|\xi_n\|^2, \end{aligned}$$

$$k|b(w_{n+1}; A\eta_n, w_n)| \leq ck |Aw_{n+1}| \|\eta_n\| \|w_n\| \leq \frac{vk}{6} |Au_{n+1}|^2 + \frac{ck}{v} \|u_n\|^2 \|\xi_n\|^2,$$

$$k|b(\zeta_n; A\eta_n, w_n)| \leq ckm^{-1} \|\zeta_n\| \|w_n\| |A^{\frac{3}{2}} \eta_n| \leq ckm \|u_n\| \|\xi_n\|^2,$$

$$k|b(\zeta_n; Av_{n+1}, w_n)| \leq ck \|\zeta_n\| \|w_n\| |Av_{n+1}| \leq \frac{vk}{6} |Au_{n+1}|^2 + \frac{ck}{v} \|u_n\|^2 \|\xi_n\|^2,$$

$$k|b(w_{n+1}; Av_{n+1}, w_n)| \leq ckm^{-2} |Aw_{n+1}| |A^{\frac{3}{2}} v_{n+1}| \|w_n\| \leq ckm^{-1} \|u_n\| |Au_{n+1}|^2.$$

综合上述九个估计式, 可得

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}\|^2 - \|u_n\|^2 + \left(1 - 2ckm^{\frac{3}{2}} \|u_n\|^2 - \frac{2ckm}{v} \|u_n\|^2 - \frac{2ck}{v} \|u_n\|^2 - ckm \|u_n\|\right) \|\xi_n\|^2 \\ + vk |Au_{n+1}|^2 + vk \left(\frac{1}{6} - ckm^{-1} \|u_n\|\right) |Au_{n+1}|^2 \leq \frac{ck}{v} \sup_{t \geq 0} |f|^2. \end{aligned}$$

若对 $i=0, 1, 2, \dots, n$ 成立 $\|u_i\|^2 \leq R^2$, 则我们总可以取 k 和 m 适当大小使满足 (2.3),

则有

$$(1 + \nu k) \|u_{n+1}\|^2 \leq \|u_n\|^2 + \frac{ck}{\nu} \sup_{t \geq 0} |f|^2.$$

由离散 Gronwall 引理 1, 知

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq (1 + \nu k)^{-(n+1)} \left(\|u_0\|^2 - \frac{c \sup_{t \geq 0} |f|^2}{\nu^2} \right) + \frac{c \sup_{t \geq 0} |f|^2}{\nu^2} \leq \|u_0\|^2 + \frac{c \sup_{t \geq 0} |f|^2}{\nu^2},$$

从而, $\forall n \in \mathcal{N}$, 有 $\|u_n\| \leq R$. 证毕.

3. 误差分析

在进行误差分析之前, 我们首先给出 (1.2) 解的一些估计.

引理 3.1 $\forall \alpha \geq 3$, 若 $u_0 \in D(A^{\frac{\alpha}{2}})$, $f \in L^\infty(\mathcal{R}^+, H^{\alpha-1})$, $\dot{f} \in L^\infty(\mathcal{R}^+, H^{\alpha-2})$, 则 (1.2) 的解 $u(t)$ 满足

$$\sup_{t \geq 0} |u|_\alpha, \quad \sup_{t \geq 0} |\dot{u}|_{\alpha-2} < +\infty.$$

另外, 我们还需要如下一种形式的离散 Gronwall 不等式.

Gronwall 引理 2 $\forall \mu \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $a_\mu, b_\mu, c_\mu, \gamma_\mu$ 及 k, B 是非负数, 且满足

$$a_n + k \sum_{\mu=0}^n b_\mu \leq k \sum_{\mu=0}^n \gamma_\mu a_\mu + k \sum_{\mu=0}^n c_\mu + B, \quad \forall n \geq 0,$$

若, $\forall \mu \geq 0$, $k\gamma_\mu < 1$, 且记 $\sigma_\mu = (1 - k\gamma_\mu)^{-1}$, 则

$$a_n + k \sum_{\mu=0}^n b_\mu \leq \exp \left\{ k \sum_{\mu=0}^n \sigma_\mu \gamma_\mu \right\} \left\{ k \sum_{\mu=0}^n c_\mu + B \right\}.$$

为简单起见, 设 $2m \leq M$. 易知, $Q_{Mm} B(v_n, v_n) = Q_m B(v_n, v_n)$. 并记 $v = Pu$, $w = Q_{Mm} u$, $\tau = Q_m u$, $\tilde{u} = v + w$, $\tilde{w} = w + \tau$. 另外, 记 $t_n = nk$, $V_n = v(t_n) - v_n$, $W_n = w(t_n) - w_n$, $U_n = V_n + W_n$. 在不引起混淆的前提下, 我们以 H^r -范数记号来代表 $L^\infty(\mathcal{R}^+, H^r)$ -范数.

定理 3.1. 假设定理 2.1 的条件成立; $\forall \alpha \geq 3$, 若 $u_0 \in D(A^{\frac{\alpha}{2}})$, $f \in L^\infty(\mathcal{R}^+, H^{\alpha-1})$, $\dot{f} \in L^\infty(\mathcal{R}^+, H^{\alpha-2})$; 另外, 如果 k 和 m 满足下面条件

$$\begin{cases} ckm^{-1}|Au| + ckm^{-\frac{1}{2}}R \leq \frac{\nu}{3}, \\ \frac{ckmR^2}{\nu} + ck(|A^{\frac{3}{2}}u|^2 + |Au|^2) \leq \frac{5}{6}, \end{cases} \quad (3.1)$$

则有

$$|U_n| \leq \frac{1}{\sqrt{\nu}} \exp \left\{ \frac{C_1}{\nu} \right\} \left(C_2 k + \frac{C_3}{\sqrt{\nu}} (m^{-\alpha} + M^{-\alpha}) \right), \quad \forall n \geq 0, \quad (3.2)$$

这里, $C_1 = c(1 + |Au|^2 + |A^{\frac{3}{2}}u|)$, $C_2 = c(\|\dot{u}\| + |f|)$, $C_3 = c|Au||u|_\alpha$.

证. 将 (1.2) 在 (t_n, t_{n+1}) 上积分, 并作适当的整理, 可得

$$\begin{aligned}
u(t_{n+1}) - u(t_n) + v \int_{t_n}^{t_{n+1}} A u ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{P_m B(u, u) + Q_m B(v, v)\} ds \\
+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} Q_m \{B(\tilde{w}, v) + B(u, \tilde{w})\} ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f ds. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

用 (3.3) 减去 (2.2) 中两个方程的和, 所得差投影到 V_M 上, 并将结果与 U_{n+1} 作内积

$$\begin{aligned}
|U_{n+1}|^2 - |U_n|^2 + |U_{n+1} - U_n|^2 + 2vk \|U_{n+1}\|^2 \leq v \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (A(u - u(t_{n+1})), U_{n+1}) ds \right| \\
+ k|b(u_n; U_n, V_{n+1}) + b(U_n; \tilde{u}, V_{n+1}) + b(u; \tau, V_{n+1}) + b(\tau; \tilde{u}, V_{n+1}) \\
+ b(v_n; V_n, W_{n+1}) + b(V_n; v, W_{n+1})| + \int_{t_n}^{t_{n+1}} |b(\tilde{w}; v, W_{n+1}) + b(u; \tilde{w}, W_{n+1})| ds \\
+ \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f - f(t_n), U_{n+1}) ds \right| + \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (B(u - u(t_n), u(t_n)) + B(u, u - u(t_n)), V_{n+1}) ds \right| \\
+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} (B(v - v(t_n), v) + B(v(t_n), v - v(t_n)), W_{n+1}) ds. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

下面应用性质 (1.3), 定理 2.1, 引理 3.1 及中值定理, 对 (3.4) 右端各项进行估计

$$v \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (A(u - u(t_{n+1})), U_{n+1}) ds \right| \leq \frac{vk}{9} \|U_{n+1}\|^2 + cvk^3 \|u\|^2, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
k|b(u_n; U_n, V_{n+1})| &= k|b(u_n; V_{n+1}, U_{n+1} - U_n) - b(u_n; V_{n+1}, W_{n+1})| \\
&\leq ckm^{\frac{1}{2}} \|u_n\| \|U_{n+1} - U_n\| \|V_{n+1}\| + ckm^{-\frac{1}{2}} \|u_n\| \|U_{n+1}\|^2 \\
&\leq \frac{vk}{9} \|V_{n+1}\|^2 + ckm^{-\frac{1}{2}} R \|U_{n+1}\|^2 + \frac{ckmR^2}{v} |U_{n+1} - U_n|^2, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

$$k|b(U_n; \tilde{u}, V_{n+1})| \leq ck|A^{\frac{3}{2}} u|^2 |V_{n+1} - V_n|^2 + ck(1 + |A^{\frac{3}{2}} u|) |U_n|^2, \quad (3.7)$$

$$k|b(u; \tau, V_{n+1}) + b(\tau; \tilde{u}, V_{n+1})| \leq \frac{vk}{9} \|V_{n+1}\|^2 + \frac{ck}{v} |Au|^2 |u|_\alpha^2 M^{-2\alpha}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
k|b(v_n; V_n, W_{n+1})| &= k|b(v_n; V_{n+1} - V_n, W_{n+1}) - b(v_n; V_{n+1}, W_{n+1})| \\
&\leq ckm^{\frac{1}{2}} \|v_n\| \|V_{n+1} - V_n\| \|W_{n+1}\| + ckm^{-\frac{1}{2}} \|v_n\| \|U_{n+1}\|^2 \\
&\leq \frac{vk}{9} \|W_{n+1}\|^2 + \frac{ckmR^2}{v} |V_{n+1} - V_n|^2 + ckm^{-\frac{1}{2}} R \|U_{n+1}\|^2, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$k|b(V_n; v, W_{n+1})| \leq \frac{vk}{9} \|W_{n+1}\|^2 + \frac{ck\|v\|^2}{v} |V_{n+1} - V_n|^2 + ckm^{-1} |Av| \|U_{n+1}\|^2, \quad (3.10)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} |b(\tilde{w}; v, W_{n+1}) + b(u; \tilde{w}, W_{n+1})| ds \leq \frac{kv}{9} \|W_{n+1}\|^2 + \frac{ckm^{-2\alpha}}{v} |Au|^2 |u|_\alpha^2, \quad (3.11)$$

$$\left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f - f(t_n), U_{n+1}) ds \right| \leq \frac{1}{6} |U_{n+1} - U_n|^2 + ck|U_n|^2 + ck^3|f|^2, \quad (3.12)$$

$$\left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (B(u - u(t_n), u(t_n)) + B(u, u - u(t_n)), V_{n+1}) ds \right| \leq ck|Au|^2|V_{n+1} - V_n|^2 + ck|Au|^2|V_n|^2 + ck^3\|u\|^2, \quad (3.13)$$

$$\left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (B(v - v(t_n), v) + B(v(t_n), v - v(t_n)), W_{n+1}) ds \right| \leq ck|Au|^2|W_{n+1} - W_n|^2 + ck|Au|^2|W_n|^2 + ck^3\|u\|^2. \quad (3.14)$$

选则 k 使满足条件 (3.1). 综合 (3.4) — (3.14), 并利用 (2.1), 可得

$$(1 + vk)|U_{n+1}|^2 - |U_n|^2 \leq kC_1|U_n|^2 + k^3C_2^2 + \frac{kC_3^2}{v}(m^{-2n} + M^{-2n}). \quad (3.15)$$

若记 $q = (1 + vk)^{-1} < 1$, 注意到 $U_0 = 0$, 则由 (3.15) 递推可得

$$|U_{n+1}|^2 \leq kC_1 \sum_{i=0}^n |U_i|^2 q^{n-i+1} + \left(k^3C_2^2 + \frac{kC_3^2(m^{-2n} + M^{-2n})}{v} \right) \sum_{i=0}^n q^{n-i+1} \quad (3.16)$$

如果令 $kC_1 \leq \frac{1}{2}$. 由 Gronwall 引理 2, 立即可得 (3.2). 证毕.

4. 数值算例

在本节中, 我们给出一个基于非线性 Galerkin 算法 (2.2) 的数值实验结果, 并与通常的 Galerkin 方法作以比较, 验证了该方法是一种相对稳定和高效的算法, 适合于用来模拟 Navier-Stokes 方程解的长时间行为. 更进一步, 它为湍流的直接数值模拟提供了一种可能.

我们是采取如下的策略来检验算法 (2.2) 的. 设已知 (1.2) 的解为

$$u(t) = \sum_{l \neq 0, k \in \mathbb{Z}^2} \alpha_l \cos(\omega_0 + \Phi_l t) e^{il \cdot x}, \quad (4.1)$$

其中 α_l 满足

$$|\alpha_l| \sim |l|^{-5}. \quad (4.2)$$

而 Φ_l 是 l 的函数, 它表示了解 $u(t)$ 在时间轴方向的震荡程度. 将 (4.1) 代入 (1.2), 可求出 $f(t)$. 然后, 在此基础上反过来计算 $\{u_n\}_{n>0}$, 并与 $u(t)$ 进行比较. 这里我们取 $v=0.0001$, $\Phi_l = |l_1| + |l_2|$, $m=3$, $M=6$ 且 $k=0.005$. 由简单的计算知, 低频分量的个数为 48, 高频分量的个数为 120.

在下面的三幅图中, 虚线代表真解的情况; 粗实线和细实线分别代表 Galerkin 逼近解和非线性 Galerkin 逼近解的情况.

由图 1 可以看出, 非线性 Galerkin 方法似乎精度更高一些. 另外需要说明的是, 在我们的实验中, 都是模拟 9.895 个时间单位的真实流动, 传统 Galerkin 方法用了 306.27 秒, 而非线性 Galerkin 方法只用了 155.37 秒. 图 2 显然验证了该方法具有的优于传统

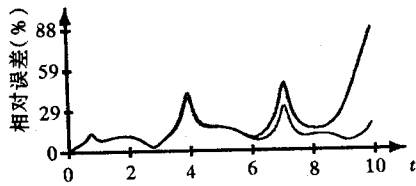


图 1

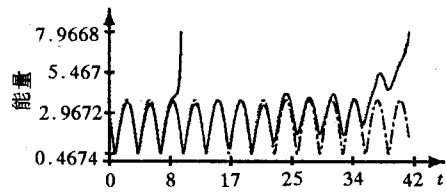


图 2

Galerkin方法的稳定性(其中的能量是指 $|u(t)|$)。以上这两点所揭示的,正是我们在引言部分所说的,非线性 Galerkin 方法比传统方法更适合用来模拟解的长时间行为。由于它在节省计算时间方面的优点,所以说它为湍流的直接数值计算提供了可能。

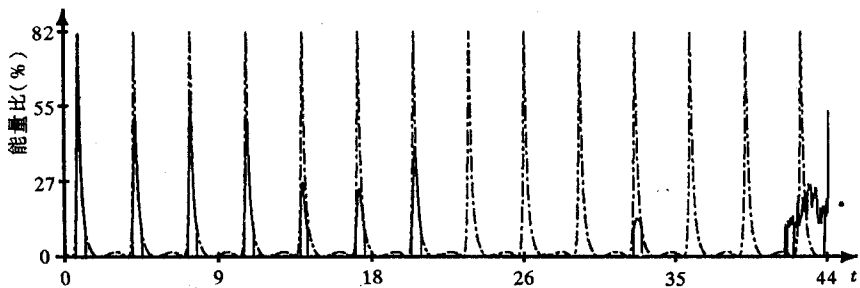


图 3

上图纵轴所示“能量比”为“高频部分所携带能量/总能量”,即 $|w(t)|/|u(t)|$ 。这幅图显示了随着时间的推移,高频部分所携带能量占总能量的百分比,也即,真实解和计算解的能量是如何在高频和低频部分之间运动的。显然,随着能量分布的不断失真,换句话说,随着高频部分所携带的能量比重越来越大,数值解的能量很快上溢,最终导致无法继续计算。因此,改善对高频部分的近似,无疑会改善整个算法的稳定性及有效性。

感谢我的导师李开泰教授多年来的教诲及在本文写作中所给予的指导。

参 考 文 献

- [1] C. Foias, O. Manley, R. Temam, On the Interaction of Small Eddies in Two-Dimensional Turbulence Flows, *Math. Modeling and Numerical Analysis, M²AN*, 22(1988)93—114.
- [2] 李开泰, 黄艾香, Navier-Stokes 方程的近似惯性流形方法, *西安交通大学学报*, 25: 5(1991), p7—16.
- [3] R. Temam, *Navier-Stokes Equation and Nonlinear Functional Analysis*, CBNS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1983.
- [4] E. Weinan, Convergence of Fourier Methods for the Navier-Stokes Equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(1993), 650—674.
- [5] Li kaitai, Hou Yanren, Fourier Nonlinear Galerkin Method for Navier-Stokes Equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, to appear.
- [6] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1987.