

N-S 方程一般近似惯性流形构造和逼近^{*1)}

李开泰 侯延仁

(西安交通大学)

CONSTRUCTION AND APPROXIMATION OF GENERAL APPROXIMATE INERTIAL MANIFOLDS FOR N-S EQUATIONS

Li Kaitai Hou Yanren
(Xi'an Jiaotong University)

Abstract

In this paper, three general principles for constructing approximate inertial manifolds are provided, under which the associate approximate inertial form of origin problem, which is a finite dimensional ordinary differential equation, is well-possessed and its solution will approximate the genuine solution at some degree. At last, for some kinds of approximate inertial manifolds and a family of approximate inertial manifolds, we indicate that the principles given here are suitable.

Keywords: N-S equations, Approximate inertial manifold

关键词: N-S 方程, 近似惯性流形

1. 引言

为了用有限维常微分方程来研究 Navier-Stokes(N-S) 方程的长时间动力学行为, Foias, Sell 和 Temam[1] 引入了耗散系统惯性流形的概念. 但惯性流形存在的一个相当苛刻的条件—谱间隔条件—是包括 N-S 方程在内的很多耗散系统无法满足的. 因此, Foias, Manley 和 Temam[2] 随后又提出了近似惯性流形的概念. 近似惯性流形也是一个光滑的 Lipschitz 流形, 所有原方程的解在时间充分大时, 将被吸引进入该流形的一个 ε 邻域中. 因其存在性不需要谱间隔条件来保证, 从而可证明包括 N-S 方程在内的一大类耗散系统存在近似惯性流形. 利用近似惯性流形, 使我们有可能用一个有限维常微分系统来近似和研究原方程的长时间动力学行为, 这一常微分方程即是本文将要研究的近似惯性形式.

本文的结构是这样的: 在第二节中, 假设给出具有一般性质的近似惯性流形 Φ (满足假设 (H1)~(H3)) 及其相应的近似惯性形式; 在这样的假定下, 第三节将讨论近似惯性形式的适

* 1997年1月17日收到.

1) 国家自然科学基金和攀登计划资助项目.

定性;在第四节中,我们给出用近似惯性形式的解来逼近 N-S 方程解的误差估计;在第五节中,我们将对一些近似惯性流形和流形族,验证假设 (H1)~(H3),说明我们的结果是普遍适用的;在最后一节,我们给出一个具体的计算结果,并将其与传统方法相比较,说明新方法在进行长期数值模拟方面的优越性.

2. N-S 方程一般近似惯性流形及近似惯性形式

考虑二维有界区域 Ω 上的 N-S 方程,其抽象形式为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \nu Au + B(u, u) = f, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

这里 $u \in H$,

$$H = \begin{cases} \{v \in L^2(\Omega)^2 : v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \operatorname{div} v = 0\} \text{ (Dirichlet 边界条件情形),} \\ \{v = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} v_k e^{ik \cdot x}, v_0 = 0, v_k = \overline{v_{-k}}, \operatorname{div} v = 0, \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |v_k|^2 < +\infty\} \\ \quad (\Omega = (0, \pi)^2, \text{周期边界条件情形),} \end{cases}$$

$\nu > 0$ 是动力粘性系数, f 为体积力(在周期边界情形,我们假定 $\int_{\Omega} f dx = 0$ [3]), u_0 是初速度场,且 $\operatorname{div} u_0 = 0$, $B(u, u) = P[(u \cdot \nabla)u]$, P 是 $L^2(\Omega)^2$ 到 H 的 Leray 投影算子. A 是 H 上无界、自伴和正定的线性算子,其特征值为

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty,$$

相应的特征向量是

$$w_1, w_2, \dots, w_n, \dots.$$

我们熟知对 $\alpha \in [0, 1]$, 可定义 A^α , $D(A^\alpha)$ 是定义域. 赋予内积 $(A^\alpha \cdot, A^\alpha \cdot)$ 及诱导范数 $|A^\alpha \cdot|$, 它们均是 Hilbert 空间. 引入如下谱投影算子, $\forall n \in \mathcal{N}$

$$P_n : H \rightarrow \operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_n\}, \quad Q_n = I - P_n.$$

现在,假定 (2.1) 存在近似惯性流形

$$\Phi : P_n D(A) \rightarrow Q_n D(A),$$

并满足如下三个假设:

(H1) 若 $u = p + q = P_n u + Q_n u$ 是 (2.1) 的解,对给定的定解数据 u_0, f, ν 及正常数 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_0 \geq 0$, 当 $t \geq t_0$ 时有

$$|A^{\frac{1}{2}} \Phi(p) - A^{\frac{1}{2}} q| \leq \varepsilon.$$

为叙述简单起见,今后我们认为 $t_0 = 0$.

(H2) 对给定的定解数据, 存在 $\beta^* > 0$, 使得在闭球

$$B = \{v \in P_n D(A^{\frac{1}{2}}) : |A^{\frac{1}{2}}v| \leq \beta^*\}$$

中有

$$|A^{\frac{1}{2}}(\Phi(p_1) - \Phi(p_2))| \leq l_{1n}|A^{\frac{1}{2}}(p_1 - p_2)|, \quad \forall p_1, p_2 \in B,$$

其中, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $l_{1n} \rightarrow 0$.

(H3) 若记 $\|f\| = \sup_{0 \leq t \leq \infty} |f(t)|$, 假定

$$|A^{\frac{1}{2}}\Phi(0)| \leq l_{2n}\|f\|,$$

这里, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $l_{2n} \rightarrow 0$.

关于假设 (H1)~(H3) 的合理性, 第五节中我们会举例说明. 以后, 我们记 $l_n = \max\{l_{1n}, l_{2n}\}$, 显然当 $n \rightarrow \infty$ 时 $l_n \rightarrow 0$. 由 (H2)~(H3) 易知,

$$|A^{\frac{1}{2}}\Phi(p_1)| \leq l_n(|A^{\frac{1}{2}}p_1| + \|f\|), \quad \forall p_1 \in B. \quad (2.2)$$

我们的目的在于考察下面由近似惯性流形 Φ 诱导的, (2.1) 逼近形式的性质.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + \nu Ay + P_n B(y + z, y + z) = P_n f, \\ z = \Phi(y), \\ y(0) = y_0 = P_n u_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

这一方程组实际上是一个关于 y 的有限维常微分方程

$$\frac{dy}{dt} + \nu Ay + P_n B(y + \Phi(y), y + \Phi(y)) = P_n f. \quad (2.4)$$

(2.4) 即是我们这里所谓的 (2.1) 的近似惯性形式.

3. 一般近似惯性形式的适定性

为了方便讨论, 我们先给出一个记号

$$b(u; v, w) = (B(u, v), w)_{L^2}.$$

它的基本性质和估计在 [3] 和 [4] 中有全面的介绍, 由于它们均是经典的, 这里就不再赘述. 对方程 (2.1) 而言, 由于有 $b(v; u, u) = 0$, 我们很容易直接利用 Galerkin 方法及极限过渡 (参见 [4]), 得到其解的适定性. 而对 (2.4), 根据常微分方程理论, 可知其存在唯一的局部解, 而对它的全局解则不得而知, 甚至无法利用上述方法得到 (2.4) 的解在 $C(\mathcal{R}^+, P_n H)$ 上的有界性. 我们这里将要采取的方法是首先利用不动点原理证明 (2.4) 存在全局解, 然后再利用 Gronwall 不等式证明其唯一性. 附带地, 我们同时可以得到 (2.4) 解的界的估计.

首先, 构造一个如下的闭球

$$K = \{v \in C(\mathcal{R}^+, P_n D(A^{\frac{1}{2}})), \|A^{\frac{1}{2}}v\| \leq \beta\}, \quad (3.1)$$

这里 $\beta \leq \beta^*$ 是一个常数. 现在考虑方程

$$\begin{cases} \forall \lambda \in K, \text{ 求 } (y(t), z(t)) \in P_n D(A^{\frac{1}{2}}) \times Q_n D(A^{\frac{1}{2}}) \text{ 使} \\ \frac{dy}{dt} + \nu Ay + P_n B(y+z, y+z) = P_n f, \\ z = \Phi(\lambda), \\ y(0) = y_0 = P_n u_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

下面我们将验证 (3.2) 定义了一个映射 $\Psi: K \rightarrow C(\mathcal{R}^+, P_n D(A^{\frac{1}{2}}))$. 进一步, 在一定条件下 Ψ 还是从 K 到 K 的. 事实上, 以 y 乘以 (3.2) 两边并在 Ω 上积分, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d|y|^2}{dt} + \nu |A^{\frac{1}{2}}y|^2 \leq |(f, y)| + |b(y; \Phi(\lambda), y)| + |b(\Phi(\lambda); \Phi(\lambda), y)|,$$

上式化简中用到了性质 $b(y+z; y, y) = 0$. 然后对右边各项做如下估计,

$$\begin{aligned} |(f, y)| &\leq |f| |y| \leq \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \|f\| |A^{\frac{1}{2}}y| \leq \frac{\nu}{6} |A^{\frac{1}{2}}y|^2 + \frac{3}{2\lambda_1\nu} \|f\|^2, \\ |b(y; \Phi(\lambda), y)| &\leq c_1 |y| |A^{\frac{1}{2}}y| |A^{\frac{1}{2}}\Phi(\lambda)| \leq c_1 \lambda_1^{-\frac{1}{2}} l_n(\beta + \|f\|) |A^{\frac{1}{2}}y|^2, \\ |b(\Phi(\lambda); \Phi(\lambda), y)| &= |b(\Phi(\lambda); y, \Phi(\lambda))| \leq c_1 |\Phi(\lambda)| |A^{\frac{1}{2}}\Phi(\lambda)| |A^{\frac{1}{2}}y| \\ &\leq c_1 \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} l_n^2(\beta + \|f\|) |A^{\frac{1}{2}}y| \\ &\leq c_1 \lambda_1^{-\frac{1}{2}} l_n(\beta + \|f\|) |A^{\frac{1}{2}}y|^2 + \frac{1}{4} c_1 \lambda_1^{\frac{1}{2}} \lambda_{n+1}^{-1} l_n^3(\beta + \|f\|)^3, \end{aligned}$$

其中 $c_1 > 0$ 是三线性形式 $b(\cdot; \cdot, \cdot)$ 的估计中出现的仅与 Ω 有关的常数. 若取 n 充分大, 使

$$c_1 \lambda_1^{-\frac{1}{2}} l_n(\beta + \|f\|) \leq \frac{\nu}{6}, \quad (3.3)$$

则可得

$$\frac{d|y|^2}{dt} + \nu |A^{\frac{1}{2}}y|^2 \leq \frac{3}{\lambda_1\nu} \|f\|^2 + \frac{\lambda_1^2\nu^3}{784c_1^2\lambda_{n+1}}. \quad (3.4)$$

又 $\lambda_1\nu|y|^2 \leq \nu|A^{\frac{1}{2}}y|^2$, 对任意的 $0 \leq t \leq +\infty$, 将 (3.4) 在 $[0, t]$ 上积分

$$|y(t)|^2 \leq |y_0|^2 + \frac{3}{\lambda_1^2\nu^2} \|f\|^2 + \frac{\lambda_1\nu^2}{784c_1^2\lambda_{n+1}},$$

于是

$$|y(t)| \leq |y_0| + \frac{\sqrt{3}}{\lambda_1\nu} \|f\| + \frac{\sqrt{\lambda_1\nu}}{12\sqrt{6}c_1\lambda_{n+1}^{\frac{1}{2}}} \triangleq \beta_0, \quad 0 \leq t \leq +\infty.$$

现在再用 Ay 乘以 (3.2) 并在 Ω 上积分

$$\frac{1}{2} \frac{d|A^{\frac{1}{2}}y|^2}{dt} + \nu|Ay|^2 \leq |(f, Ay)| + |b(y + \Phi(\lambda); y + \Phi(\lambda), Ay)|,$$

其中

$$\begin{aligned} |(f, Ay)| &\leq \|f\| \|Ay\| \leq \frac{\nu}{5} |Ay|^2 + \frac{5}{4\nu} \|f\|^2, \\ |b(y; \Phi(\lambda), Ay)| &\leq c_1 |A^{\frac{1}{2}}\Phi(\lambda)| |Ay|^2 \leq c_1 l_n (\beta + \|f\|) |Ay|^2, \\ |b(\Phi(\lambda); y, Ay)| &\leq c_1 |A^{\frac{1}{2}}\Phi(\lambda)| |Ay|^2 \leq c_1 l_n (\beta + \|f\|) |Ay|^2, \\ |b(\Phi(\lambda); \Phi(\lambda), Ay)| &\leq c_2 |A^{\frac{1}{2}}\Phi(\lambda)|^2 |Ay| \leq c_2 l_n^2 (\beta + \|f\|)^2 |Ay| \\ &\leq c_1 l_n (\beta + \|f\|) |Ay|^2 + \frac{c_2^2}{4c_1} l_n^3 (\beta + \|f\|)^3, \end{aligned}$$

$$|b(y; y, Ay)| \leq c_1 |y|^{\frac{1}{2}} |A^{\frac{1}{2}}y| |Ay|^{\frac{3}{2}} \leq \frac{\nu}{5} |Ay|^2 + \frac{c_3 \beta_0^2}{2\nu^3} |A^{\frac{1}{2}}y|^4.$$

这里, $c_2 > 0$ 是一个仅与 c_1 和 A 有关的常数, 而 $c_3 = \frac{2 \cdot 15^3 c_1^4}{4^3}$. 如果取 n 充分大, 使

$$\max\{c_1, \frac{c_2^2}{4c_1}\} l_n (\beta + \|f\|) \leq \frac{\nu}{5}, \quad (3.5)$$

并不失一般性, 假定 $\max\{c_1, \frac{c_2^2}{4c_1}\} \geq 1$, 我们就有

$$\frac{d|A^{\frac{1}{2}}y|^2}{dt} \leq \frac{5}{2\nu} \|f\|^2 + \frac{c_3 \beta_0^2}{\nu^3} |A^{\frac{1}{2}}y|^2 |A^{\frac{1}{2}}y|^2 + \left(\frac{\nu}{5}\right)^3. \quad (3.6)$$

若记 $\sigma = \frac{6}{\lambda_1 \nu} \|f\|^2 + \frac{\lambda_1^2 \nu^3}{392 c_1^2 \lambda_{n+1}}$, 则由 (3.4) 易知, $\forall t \in \mathcal{R}^+$

$$\int_t^{t+1} |A^{\frac{1}{2}}y(s)|^2 ds \leq \frac{\sigma}{\nu}. \quad (3.7)$$

当 $t \in [0, 1]$ 时, 对 (3.6) 利用 Gronwall 不等式, 可得

$$|A^{\frac{1}{2}}y(t)|^2 \leq (|A^{\frac{1}{2}}y_0|^2 + \frac{5}{2\nu} \|f\|^2 + \left(\frac{\nu}{5}\right)^3) \exp\left\{\frac{c_3 \sigma \beta_0^2}{\nu^4}\right\} \triangleq \beta_{11}^2. \quad (3.8)$$

而当 $t \geq 1$ 时, 利用一致 Gronwall 不等式,

$$|A^{\frac{1}{2}}y(t)|^2 \leq \left(\frac{5}{2\nu} \|f\|^2 + \left(\frac{\nu}{5}\right)^3 + \frac{\sigma}{\nu}\right) \exp\left\{\frac{c_3 \sigma \beta_0^2}{\nu^4}\right\} \triangleq \beta_{12}^2. \quad (3.9)$$

取

$$\beta_1 = \max\{\beta_{11}, \beta_{12}\}, \quad (3.10)$$

并利用条件 (3.3) 和 (3.5) 可知, 存在常数 $c_4 > 0$, 使

$$\|A^{\frac{1}{2}}y\| \leq \beta_1, \quad \|A^{\frac{1}{2}}\Phi(y)\| \leq c_4 \nu. \quad (3.11)$$

为了下面讨论的方便, 我们仍以 β_0 和 β_1 表示 $\beta_0 + c_4\nu$ 和 $\beta_1 + c_4\nu$.

至此, 我们已经证明了方程组 (3.2) 可定义一个映射 $\Psi: K \rightarrow C(\mathcal{R}^+, P_n D(A^{\frac{1}{2}}))$. 从 β_0 和 β_1 的定义可知, 它们均是不依赖于 β 的常数, 因此, 可以取 $\beta^* \geq \beta \geq \beta_1$. 此时, Ψ 事实上是一个从 K 到 K 内的映射. 由于 $P_n D(A^{\frac{1}{2}})$ 是有限维空间, 我们可以断定 Ψ 在 K 中存在不动点, 此即 (2.3), 也即近似惯性形式 (2.4) 在 K 中至少存在一个解.

下面我们来证明这个解也是唯一的. 假定 $y_1(t), y_2(t)$ 是 (2.4) 的两个解, 并记

$$\bar{y}(t) = y_1(t) - y_2(t), \quad \bar{z}(t) = \Phi(y_1(t)) - \Phi(y_2(t)),$$

则有

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dt} + \nu A\bar{y} + P_n B(\bar{y} + \bar{z}, y_1 + \Phi(y_1)) + P_n B(y_2 + \Phi(y_2), \bar{y} + \bar{z}) = 0, \\ \bar{y}(0) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

注意到假设 (H2), 可知

$$|A^{\frac{1}{2}}\bar{z}| \leq l_n |A^{\frac{1}{2}}\bar{y}|.$$

在 (3.12) 两边同乘 \bar{y} , 并在 Ω 上积分, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d|\bar{y}|^2}{dt} + \nu |A^{\frac{1}{2}}\bar{y}|^2 \leq |b(\bar{y} + \bar{z}; y_1 + \Phi(y_1), \bar{y})| + |b(y_2 + \Phi(y_2); \bar{z}, \bar{y})|.$$

利用上面得到的 (2.4) 解的上界 β_0 , 右端各项有如下估计

$$|b(\bar{y}; y_1 + \Phi(y_1), \bar{y})| = |b(\bar{y}; \bar{y}, y_1 + \Phi(y_1))| \leq c_1 \beta_0 |A^{\frac{1}{4}}\bar{y}| |A^{\frac{3}{4}}\bar{y}|,$$

$$|b(\bar{z}; y_1 + \Phi(y_1), \bar{y})| = |b(\bar{z}; \bar{y}, y_1 + \Phi(y_1))| \leq c_1 \beta_0 |A^{\frac{1}{4}}\bar{z}| |A^{\frac{3}{4}}\bar{y}| \leq c_1 l_n \beta_0 |A^{\frac{1}{4}}\bar{y}| |A^{\frac{3}{4}}\bar{y}|,$$

$$|b(y_2 + \Phi(y_2); \bar{z}, \bar{y})| = |b(y_2 + \Phi(y_2); \bar{y}, \bar{z})| \leq c_1 \beta_0 |A^{\frac{1}{4}}\bar{z}| |A^{\frac{3}{4}}\bar{y}| \leq c_1 l_n \beta_0 |A^{\frac{1}{4}}\bar{y}| |A^{\frac{3}{4}}\bar{y}|.$$

从而我们可得

$$|\bar{y}(t)|^2 \leq 6c_1 \beta_0 \int_0^t |A^{\frac{1}{4}}\bar{y}| |A^{\frac{3}{4}}\bar{y}| ds.$$

由 Gronwall 不等式立即可知

$$|\bar{y}(t)| = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

其中 $0 \leq T < +\infty$ 为任一常数. 于是可得 (2.3), 亦即 (2.4) 在 K 中存在唯一解.

上面的推导实际上已经证明了近似惯性形式 (2.4) 的适定性, 我们将其总结为下面定理.

定理 1. 假定近似惯性流形 Φ 满足 (H2)~(H3), 对给定的定解数据, 若取 n 充分大, 使得

$$\max\left\{c_1, \frac{c_2^2}{4c_1}\right\} l_n (\beta + \|f\|) \leq \frac{\nu}{6},$$

则近似惯性形式 (2.4) 在 $C(\mathcal{R}^+, P_n D(A^{\frac{1}{2}}))$ 中存在唯一解, 并存在正常数 β_0 和 β_1 使

$$\|y + \Phi(y)\| \leq \beta_0, \quad \|A^{\frac{1}{2}}(y + \Phi(y))\| \leq \beta_1,$$

这里,

$$\beta_0 = |y_0| + \frac{\sqrt{3}}{\lambda_1 \nu} \|f\| + \nu,$$

$$\beta_1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\nu}} \|f\| + \left(\frac{\nu}{5}\right)^{\frac{3}{2}} + \max\{|A^{\frac{1}{2}}y_0|, \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}\} \right) \exp\left\{\frac{c_3 \sigma \beta_0^2}{\nu^4}\right\}.$$

其中的常数 c_i 和 σ 在前面的讨论中已给出.

特别地, 对于周期边界条件情形, 由于 $b(y; y, Ay) = 0$, β_1 并不象定理 1 中给出的那么大. 事实上, 可以利用得到 β_0 同样的方法, 很容易知道此时

$$\beta_1 = |A^{\frac{1}{2}}y_0| + \frac{\sqrt{3}}{\lambda_1 \nu} \|f\| + \nu.$$

4. 近似惯性流形的逼近性质

这一节我们将讨论以近似惯性形式逼近原方程的误差, 即考虑 $y + \Phi(y)$ 与 $p + q$ 间的距离. 首先记

$$V(t) = p(t) - y(t), \quad W(t) = q(t) - \Phi(y(t)), \quad U(t) = V(t) + W(t).$$

利用假设 (H1)~(H2), 有

$$|A^{\frac{1}{2}}U| \leq \varepsilon + (1 + l_n)|A^{\frac{1}{2}}V|. \quad (4.1)$$

若记 $x(t) = y(t) + \Phi(y(t))$, 则 V 和 W 满足

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + \nu AV + P_n B(U, u) + P_n B(x, U) = 0, \\ V(0) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

定理 2. 在定理 1 的条件和假定 (H1)~(H3) 下, 对给定的定解数据及正常数 $T > 0$, 存在依赖与定解数据和 t 的常数 $C(t) > 0$, 使

$$|A^{\frac{1}{2}}V(t)| \leq C(t)\varepsilon, \quad \forall t \in [0, T].$$

证明. 利用半群 $\{e^{-\nu At}\}_{t \geq 0}$, 由 (4.2) 可得

$$V(t) = - \int_0^t e^{-\nu A(t-s)} P_n \{B(V + W, u) + B(x, V + W)\}(s) ds.$$

注意半群的如下性质 (更详细的情况和其他性质参见 [5])

$$|A^\alpha e^{-\nu At}|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq c_5 (\nu t)^{-\alpha} e^{-\delta t}, \quad \forall t > 0, \alpha > 0,$$

这里 $c_5 > 0$ 和 $\delta > 0$ 是仅与 Ω 和 A 有关的常数. 则我们有

$$|A^{\frac{1}{2}}V(t)| \leq \int_0^t c_5 \nu^{-\frac{3}{4}} (t-s)^{-\frac{3}{4}} e^{-\delta(t-s)} |P_n A^{-\frac{1}{4}} \{B(V + W, u) + B(x, V + W)\}| ds$$

$$\leq c_1 c_5 \nu^{-\frac{3}{4}} (\|A^{\frac{1}{2}}u\| + \|A^{\frac{1}{2}}x\|) \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} e^{-\delta(t-s)} \{\varepsilon + (1+l_n)|A^{\frac{1}{2}}V|\} ds.$$

记

$$c_6 = c_1 c_5 \nu^{-\frac{3}{4}} (\|A^{\frac{1}{2}}u\| + \|A^{\frac{1}{2}}x\|) \sup_{t \geq 0} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} e^{-\delta(t-s)} ds,$$

$$c_7 = c_1 c_5 \nu^{-\frac{3}{4}} (\|A^{\frac{1}{2}}u\| + \|A^{\frac{1}{2}}x\|) (1+l_n),$$

则

$$|A^{\frac{1}{2}}V(t)| \leq c_6 \varepsilon + c_7 \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} e^{-\delta(t-s)} |A^{\frac{1}{2}}V(s)| ds. \tag{4.3}$$

利用 [6] 中的引理 6.5, 可知由 (4.3) 有

$$|A^{\frac{1}{2}}V(t)| \leq c c_6 \varepsilon \exp\{c c_7^4 t\}, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

记 $C(t) = c c_6 \exp\{c c_7^4 t\}$, 则可得定理 2. □

5. 例 子

前面我们得到了由一般近似惯性流形 (满足 (H1)~(H3)) 诱导的近似惯性形式的一些性质. 但作为前提条件的假定 (H1)~(H3) 是否合理呢? 下面我们给出三个具体的例子, 来说明这些假定的合理性.

参见 J.G. Heywood 和 R. Rannacher 的文章 [9] 及其中的一些参考文献, 若方程 (2.1) 的初值 u_0 属于 $D(A^{\frac{1}{2}})$, 则存在 $t_0 > 0$, 当 $t \geq t_0$ 时, 有

$$|Au|, |\dot{u}|, |A^{\frac{1}{2}}\dot{u}| \leq C < +\infty. \tag{5.1}$$

不失一般性, 我们假定初值 u_0 给定在 $t = -1$, 则 (5.1) 对任意的 $t \geq 0$ 成立. 从而可以进一步假定 (H2) 中的集合 B 是 $D(A)$ 的子集, 即 $B \subset P_n D(A)$, 并仍记 β^* 为其在 $|A \cdot|$ 范数下的半径.

首先, 我们考虑由 C.Foias, O.Manley 和 R.Temam[2] 建议的一种被广泛讨论过的近似惯性流形, 即我们通常所说的 Φ_1 :

$$\tilde{q} = \Phi_1(p) = (\nu A)^{-1} Q_n \{f - B(p, p)\}, \quad \forall p \in P_n H \tag{5.2}$$

文献 [2] 在提出 Φ_1 的同时, 证明了 $\text{Graph}\Phi_1$ 的厚度为 $c L_n \lambda_{n+1}^{-1}$, 其中 $L_n = (1 + \ln \frac{\lambda_n}{\lambda_1})^{\frac{1}{2}}$. 随后, J.G. Heywood 与 R. Rannacher[9] 进一步证明了其厚度为 $c \lambda_{n+1}^{-1}$. 因此, (H1) 成立, 且 $\varepsilon = c \lambda_{n+1}^{-1}$.

对任意的 $p_1, p_2 \in B$,

$$|A^{\frac{1}{2}}(\Phi_1(p_1) - \Phi_1(p_2))| = \nu^{-1} |A^{-\frac{1}{2}} Q_n \{B(p_1, p_1) - B(p_2, p_2)\}| \tag{5.3}$$

$$\leq \nu^{-1} \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \{|B(p_1, p_1 - p_2)| + |B(p_1 - p_2, p_2)|\}$$

$$\begin{aligned} &\leq c_8 \nu^{-1} \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} (|Ap_1| + |Ap_2|) |A^{\frac{1}{2}}(p_1 - p_2)| \\ &\leq 2c_8 \nu^{-1} \beta^* \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} |A^{\frac{1}{2}}(p_1 - p_2)|. \end{aligned}$$

记 $l_{1n} = 2c_8 \nu^{-1} \beta^* \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}$, 则 (H2) 成立. 而

$$|A^{\frac{1}{2}}\Phi_1(0)| = \nu^{-1} |A^{-\frac{1}{2}}Q_n f| \leq \nu^{-1} \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \|f\|, \quad (5.4)$$

记 $l_{2n} = \nu^{-1} \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}$, 则 (H3) 也成立.

从而 (5.2) 给出的近似惯性流形 Φ_1 满足我们的假设 (H1)~(H3), 所生成的近似惯性形式满足定理 1,2 给出的性质.

下面将要给出的例子是对 (5.2) 中定义的 Φ_1 的一种改进. 我们知道 Φ_1 是通过关于 \tilde{q} 的线性方程 $\nu A\tilde{q} + Q_n B(p, p) = Q_n f$ 定义的, 现在, 我们来考查下面关于 \tilde{q} 的非线性方程

$$\nu A\tilde{q} + Q_n B(p + \tilde{q}, p + \tilde{q}) = Q_n f. \quad (5.5)$$

首先我们考虑对任意给定的 $p \in P_n D(A^{\frac{1}{2}})$, $f \in H$, (5.5) 在什么条件下可确定一个 \tilde{q} . 为此, 定义三线性形式

$$a_p(u; v, w) = \nu(A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}w) + (B(u, v), w) + (B(u, p), w) + (B(p, v), w).$$

于是 (5.5) 等价于下面弱形式

$$\begin{cases} \text{求 } \tilde{q} \in Q_n D(A^{\frac{1}{2}}), \text{ 使 } \forall p \in P_n D(A^{\frac{1}{2}}), f \in H, \text{ 有} \\ a_p(\tilde{q}; \tilde{q}, w) = (f, w) - (B(p, p), w), \quad \forall w \in Q_n D(A^{\frac{1}{2}}). \end{cases} \quad (5.6)$$

显然

$$\begin{aligned} a_p(\tilde{q}; \tilde{q}, \tilde{q}) &= \nu |A^{\frac{1}{2}}\tilde{q}|^2 + (B(\tilde{q}; p), \tilde{q}) \geq \nu |A^{\frac{1}{2}}\tilde{q}|^2 - |(B(\tilde{q}; p), \tilde{q})| \\ &\geq \nu |A^{\frac{1}{2}}\tilde{q}|^2 - c_9 |A^{\frac{1}{2}}p| |A^{\frac{1}{2}}\tilde{q}| |\tilde{q}| \geq \nu |A^{\frac{1}{2}}\tilde{q}|^2 - c_9 \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} |A^{\frac{1}{2}}p| |A^{\frac{1}{2}}\tilde{q}|^2. \end{aligned}$$

则当 n 充分大使得

$$c_9 \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} |A^{\frac{1}{2}}p| \leq \frac{1}{2} \nu, \quad (5.7)$$

时, 有 $a_p(\tilde{q}; \tilde{q}, \tilde{q}) \geq \frac{\nu}{2} |A^{\frac{1}{2}}\tilde{q}|^2$. 根据 [8] 中定理 5.4.3, 可知此时 (5.6) 在 $Q_n D(A^{\frac{1}{2}})$ 中至少存在一个解, 且 $|A^{\frac{1}{2}}\tilde{q}| \leq c_{10} \nu^{-1} \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} (|f| + L_n |A^{\frac{1}{2}}p|^2)$. 进一步, 若 $p \in B$, 则我们不难验证 $\tilde{q} \in Q_n D(A)$. 下面我们仍以 β^* 记 $|A(p + \tilde{q})|$ 的界.

现在来考虑 (5.6) 解的唯一性. 假定对给定的 p 和 f , \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 是其两组解, 记 $\hat{q} = \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2$, 则将关于 \tilde{q}_1 和 \tilde{q}_2 的两个方程相减, 并取 $w = \hat{q}$, 我们有

$$\nu |A^{\frac{1}{2}}\hat{q}|^2 \leq c_{11} \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} (|A^{\frac{1}{2}}p| + |A^{\frac{1}{2}}\tilde{q}_1|) |A^{\frac{1}{2}}\hat{q}|^2.$$

若取 n 充分大使 $c_{11} \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} (|A^{\frac{1}{2}}p| + |A^{\frac{1}{2}}\tilde{q}_1|) < \nu$, 则可知 (5.6) 有唯一解. 即 (5.6) 可确定一个映射 $\Phi'_1 : P_n D(A^{\frac{1}{2}}) \rightarrow Q_n D(A^{\frac{1}{2}})$.

对刚才得到的 Φ'_1 , 我们来验证 (H1)~(H3). 关于 (H1), 首先

$$-\nu A(q - \tilde{q}) + Q_n\{B(p + q, q - \tilde{q}) + B(q - \tilde{q}, p + \tilde{q})\} + \dot{q} = 0,$$

从而

$$|A(q - \tilde{q})| \leq \nu^{-1}|B(p + q, q - \tilde{q})| + \nu^{-1}|B(q - \tilde{q}, p + \tilde{q})| + \nu^{-1}|\dot{q}|.$$

注意到 (5.1), 我们很容易地就可以得到

$$|A(q - \tilde{q})| \leq c_{12}\nu^{-1}\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}.$$

于是, (H1) 中的 ε 在这里取 $c_{12}\nu^{-1}\lambda_{n+1}^{-1}$, 则 (H1) 成立. 虽然 $\text{Graph}\Phi_1$ 与 $\text{Graph}\Phi'_1$ 的厚度相当, 但 Φ'_1 对应的近似惯性形式将具有较弱的稳定性条件.

至于 (H2) 和 (H3), 对 $p \in B$, $|A(p + \tilde{q})| \leq \beta^*$. 若记 $\hat{p} = p_1 - p_2$, $\hat{q} = \tilde{q}_1 - \tilde{q}_2$, 则

$$\begin{aligned} \nu|A^{\frac{1}{2}}\hat{q}|^2 &\leq |(B(\hat{q}; \tilde{q}_1), \hat{q})| + |(B(\hat{q}, p_1), \hat{q})| + |(B(\tilde{q}_2, \hat{p}), \hat{q})| + |(B(\hat{p}, \tilde{q}_1), \hat{q})| \\ &\quad + |(B(\hat{p}, p_1), \hat{q})| + |(B(p_2, \hat{p}), \hat{q})| \\ &\leq c_{13}(\lambda_{n+1}^{-1}\beta^*|A^{\frac{1}{2}}\hat{q}|^2 + \lambda_{n+1}^{-1}L_n\beta^*|A^{\frac{1}{2}}\hat{q}|^2 + \lambda_{n+1}^{-1}\beta^*|A^{\frac{1}{2}}\hat{p}||A^{\frac{1}{2}}\hat{q}| \\ &\quad + \lambda_{n+1}^{-1}L_n\beta^*|A^{\frac{1}{2}}\hat{p}||A^{\frac{1}{2}}\hat{q}| + \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}\beta^*|A^{\frac{1}{2}}\hat{p}||A^{\frac{1}{2}}\hat{q}| + \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}\beta^*|A^{\frac{1}{2}}\hat{p}||A^{\frac{1}{2}}\hat{q}|) \\ &\leq c_{13}(\lambda_{n+1}^{-1}L_n\beta^*|A^{\frac{1}{2}}\hat{q}|^2 + \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}\beta^*|A^{\frac{1}{2}}\hat{p}||A^{\frac{1}{2}}\hat{q}|) \\ &\leq c_{13}\lambda_{n+1}^{-1}L_n\beta^*|A^{\frac{1}{2}}\hat{q}|^2 + \frac{\nu}{4}|A^{\frac{1}{2}}\hat{q}|^2 + c_{13}^2\beta^{*2}\nu^{-1}\lambda_{n+1}^{-1}|A^{\frac{1}{2}}\hat{p}| \end{aligned}$$

如果取 n 足够大使 $c_{13}\lambda_{n+1}^{-1}L_n\beta^* < \frac{\nu}{4}$, 则 $|A^{\frac{1}{2}}\hat{q}|^2 \leq 2c_{13}^2\beta^{*2}\nu^{-2}\lambda_{n+1}^{-1}|A^{\frac{1}{2}}\hat{p}|^2$, 即

$$|A^{\frac{1}{2}}(\Phi'_1(p_1) - \Phi'_1(p_2))| \leq \sqrt{2}c_{13}\beta^*\nu^{-1}\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}(p_1 - p_2)|.$$

记 $l_{1n} = \sqrt{2}c_{13}\beta^*\nu^{-1}\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}$, 则 (H2) 成立. 关于 (H3), 将 $p = 0$ 代入 (5.6), 立即可得. 其中 $l_{2n} = \nu^{-1}\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}$, 即 (H3) 亦成立.

至此, 我们验证了由 (5.5) 定义的一种新近似惯性流形满足本文假定 (H1)~(H3), 进而其近似惯性形式满足本文的定理性质.

最后, 我们来讨论由 A. DeBusshe 和 R. Temam[7] 给出的一种近似惯性流形族:

$$\begin{cases} \Phi_0 = 0, \\ \Phi_{N+1} = \mathcal{T}_N^{\tau N}(\Phi_N), \quad N \geq 0, \end{cases} \tag{5.8}$$

其中

$$\mathcal{T}_N^{\tau N}\psi(y_0) = A^{-1}(I - e^{-A\tau N}) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-kA\tau N} Q_n F(y_k + \psi(y_k))$$

$$+ A^{-1} e^{-NA\tau_N} Q_n F(y_N + \psi(y_N)), \quad (5.9)$$

$$y_{k+1} = R_{\tau_N} y_k + S_{\tau_N} P_n F(y_k + \psi(y_k)), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (5.10)$$

$$F(y_k + \psi(y_k)) = B(y_k + \psi(y_k), y_k + \psi(y_k)) - f, \quad k = 0, \dots, N.$$

此处 ψ 是一个 Lipschitz 常数为 l 且范数不超过线性增长的映射. 显然, 此处的 Φ_1 正是前面验证过的 (5.2) 定义的映射.

[7] 中要求 F 全局 Lipschitz 连续. 由于 N-S 方程是耗散的, 存在吸收集, 我们可以将 $B(\cdot, \cdot)$ 进行截断, 使其在某个吸收集 $B' \subset D(A)$ 外为零同时又不改变原来系统的长期动力学行为 (例如可按 [1] 中的方法对 $B(\cdot, \cdot)$ 进行截断). 对修改后的 N-S 方程而言, 存在常数 $M_1 > 0$ 使

$$\begin{cases} |F(u_1) - F(u_2)| \leq M_1 |A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)|, & \forall u_1, u_2 \in B, \\ |F(u)| \leq M_1 (|A^{\frac{1}{2}}u| + \|f\|), & \forall u \in B, f \in C(\mathcal{R}^+, H). \end{cases} \quad (5.11)$$

关于 (H1), 由 [7] 可知, 对 (2.1) 的吸引子 \mathcal{A} 中任意的 $p + q$

$$|A^{\frac{1}{2}}(\Phi_N(p) - q)| \leq (c\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}})^N |A^{\frac{1}{2}}q| + c\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{N-1} (c\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}})^j \tau_{N-1-j} + c\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} e^{-c\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}} \triangleq \varepsilon_N.$$

于是 (H1) 成立.

假定 (5.10) 中的算子 S_{τ_N} 和 R_{τ_N} 满足 [7] 中的假设, 则由其中的引理 2.1 可知, 存在常数 $M_2 > 0$ 使

$$\begin{cases} |A^{\frac{1}{2}}y_k| \leq e^{k\tau_N(\lambda_n + M_2\lambda_n^{\frac{1}{2}})} (|A^{\frac{1}{2}}y_0| + \|f\|), \\ |A^{\frac{1}{2}}(y_k^1 - y_k^2)| \leq e^{k\tau_N(\lambda_n + M_2\lambda_n^{\frac{1}{2}})} |A^{\frac{1}{2}}(y_0^1 - y_0^2)|, \end{cases} \quad (5.12)$$

于是存在常数 $K > 0$ 使

$$\begin{aligned} |A^{\frac{1}{2}}\{\mathcal{T}_N^{\tau_N}\psi(y_0^1) - \mathcal{T}_N^{\tau_N}\psi(y_0^2)\}| &\leq \sum_{k=0}^N K\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda_{n+1}k\tau_N} |F(y_k^1 + \psi(y_k^1)) - F(y_k^2 + \psi(y_k^2))| \\ &\leq KM_1\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^N e^{-\lambda_{n+1}k\tau_N} \{|A^{\frac{1}{2}}(y_k^1 - y_k^2)| + |A^{\frac{1}{2}}(\psi(y_k^1) - \psi(y_k^2))|\} \\ &\leq KM_1(1+l)\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^N e^{k\tau_N(\lambda_n - \lambda_{n+1} + M_2\lambda_n^{\frac{1}{2}})} |A^{\frac{1}{2}}(y_0^1 - y_0^2)|. \end{aligned}$$

由 [7] 的讨论, 我们取 $\tau_N = (M_2(N+1)\lambda_n^{\frac{1}{2}})^{-1}$, 从而

$$|A^{\frac{1}{2}}\{\mathcal{T}_N^{\tau_N}\psi(y_0^1) - \mathcal{T}_N^{\tau_N}\psi(y_0^2)\}| \leq KM_1(1+l)\lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^N e^{\frac{k}{N+1}}\right) |A^{\frac{1}{2}}(y_0^1 - y_0^2)| \quad (5.13)$$

$$= C_N \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} |A^{\frac{1}{2}}(y_0^1 - y_0^2)|.$$

这里 $C_N = KM_1(1+l) \sum_{k=0}^N e^{\frac{k}{N+1}} \leq KM_1(1+l)(N+1)e$.

如 [7] 中所说, (5.10) 的离散误差随着 N 指数增长, 所以, 建议固定一个 N , 得到一个有限近似惯性流形序列. 于是对给定的 N , 记 $l_{1n} = C_N \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}$, 则 $\{\Phi_k\}_{k=0}^N$ 均满足本文的假设 (H2), 而对于假设 (H3), 可按上面的步骤同样验证其是满足的.

6. 数值结果与比较

在本节, 我们将针对 §5 中介绍的第一种形式的近似惯性流形 (5.2), 结合简单的向前 Euler 差分, 给出一个具体的非线性 Galerkin 算法 (NGM) 的数值计算结果, 同时, 给出相应问题的标准 Galerkin 算法 (SGM) 的计算结果, 并就其计算结果进行比较, 说明由 (5.2) 诱导的 NGM 方法相比于 SGM 方法具有较好的稳定性、收敛性和较高的计算效率, 从而是一种有效的长时间算法, 适于对系统的长期行为进行数值模拟.

我们考虑二维矩形区域上具有周期边界条件的 N-S 方程, 假定已知其解为

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix} = \sum_{k \in Z^2, k \neq 0} a_l(t) e^{ik \cdot x}, \tag{6.1}$$

且

$$|a_l(t)| \sim |l|^{-5}. \tag{6.2}$$

然后利用 (2.1) 确定外力项 $f(x, t)$. 反过来, 在已知 f 的前提下, 求 (6.1) 所给的 u . 为便于比较, 我们取 $u(x, t)$, 即 (6.1), 为某种形式的时间周期解, 并取 $n = 625, N = 2401$, 其中 n, N 分别给出低频和高频分量所在空间的维数, 当我们用标准 Galerkin 算法计算时, 总是取逼近解所在有限维子空间的维数为 N .

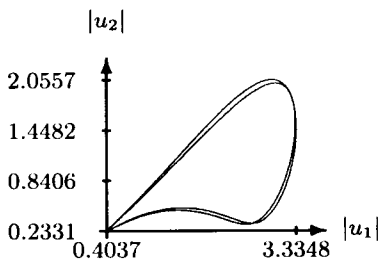


图 1. 真解相图

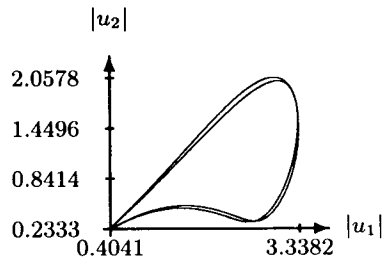


图 2. NGM 相图

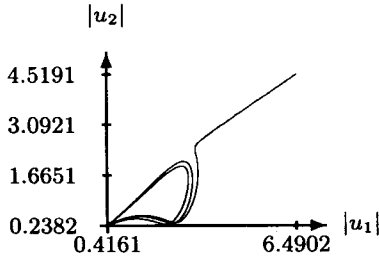


图 3. SGM 相图

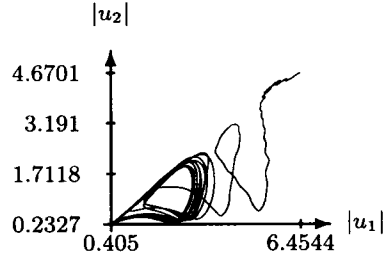


图 4. SGM 相图

上面图 1 给出的是由 (6.1) 所描述的真解的相图, x 轴代表 $|u_1|$, y 轴代表 $|u_2|$. 图 2、图 3 分别给出了当时间步长取 0.0005 时, 两种算法的数值结果, 其中 SGM 只模拟了 10 个时间单位就发散了, 而 NGM 在计算了 42 个时间单位后, 仍然保持了与真解 (图 1) 基本相似的图形. 显然, 图 2、3 显示了 NGM 所具有的良好稳定性. 为了使 SGM 可以模拟更长的时间, 我们取其时间步长为 NGM 的 $\frac{1}{5}$, 即 0.0001, 给出了相应的相图 4, 这次 SGM 在计算了 42 个时间单位后才发散, 但从图 4 不难看出, 其计算结果很早就偏离了真解. 图 2 和图 3 的结果说明, 在 NGM 的步长是 SGM 的 5 倍情况下, NGM 的稳定性仍然优于 SGM. 就所花 CPU 时间来讲, 由于我们在计算三线性项时利用了 FFT, 实际上每完成一个时间步的计算, NGM 所用 CPU 时间反而是 SGM 的两倍, 但由于 NGM 的时间步长是 SGM 的 5 倍, 所以就我们所给定的 n 和 N 而言, NGM 的计算效率应当是 SGM 的两倍多, 实际计算也说明了这点.

最后在下面图 5 中, 给出了图 2、图 4 计算中前 10 个时间单位的相对误差比较, 结果显示 NGM 也具有较好的精度, 当然这与其良好稳定性密切相关.

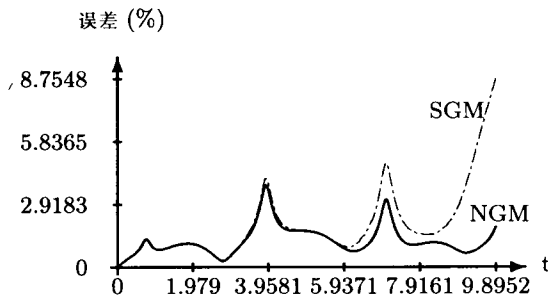


图 5. 相对误差比较

注. 正如 [2] 中说明的那样, 只有当 n 充分大时, 才可以用 (5.2) 来计算高频分量, 由于计算条件限制, 很难进行再大规模的数值计算, 因而在计算时, 适当地在 (5.2) 中补充了一些关于高频分量时间导数的项, 同时补充的项并不增加原有算法的计算量. 关于这方面问题的讨论将在另外的文章中予以讨论.

参 考 文 献

- [1] C. Foias, G. R. Sell, R. Temam, *Inertial Manifolds for Nonlinear Evolutionary Equations*, J. Diff. Eqs., 73(1988), 309–353.
- [2] C. Foias, O. Manley, R. Temam, *On the Interaction of Small Eddies in Two-Dimensional Turbulence Flows*, Math. Modeling and Numerical Analysis, M²AN, 22(1988), 93–114.
- [3] R. Temam, *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1983.
- [4] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, 2nd ed. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [5] D. Henry, *Geometric Theory of Parabolic Equations*, Lecture Notes in Math. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [6] H. Okamoto, *On the Semi-Discrete Finite Element Approximation for the Nonstationary Navier-Stokes Equations*, J. Fac. Sci., Univ. of Tokyo Sec. IA Math., 29(1982), 613–652.
- [7] A. Debussche & R. Temam, *Convergent Families of Approximate Inertial Manifolds*, J. Math. Pures Appl., 73(1994), 489–522.
- [8] 李开泰, 马逸尘, 数理方程 HILBERT 空间方法 (下), 西安交通大学出版社, 1992.
(Li Kaitai, Ma Yichen, Hilbert Space Methods for Mathematical Physical Equations (II), Xi'an Jiaotong University Press, 1992.)
- [9] J. G. Heywood and R. Rannacher, *On the Question of Turbulence Modeling by Approximate Inertial Manifolds and the Nonlinear Galerkin Method*, SIAM J. Numer. Anal., 6(1993), 1603–1621.