第 33 卷 第 4 期
1999 年 4 月

西 安 交 通 大 学 学 报
JOURNAL OF XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

Vol. 33 №4
Apr. 1999

全离散 Fourier 非线性 Galerkin 算法稳定性

侯延仁
(西安交通大学, 710049, 西安)

摘要: 就一种简单的非线性 Galerkin 方法的构造,讨论了其全离散 Fourier 非线性 Galerkin 方法所得逼近解的有界性及其对初值的连续依赖性.

关键词: Navier-Stokes 方程;全离散非线性 Galerkin 方法;稳定性
中国图书资料分类法分类号: O241.82

The Stability of Full Discrete Fourier Nonlinear Galerkin Algorithm

Hou Yanren
(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The full discrete Fourier nonlinear Galerkin algorithm is applied to the two-dimensional Navier-Stokes equations with periodic boundary conditions. Discussed are the boundedness of its approximate solution and continuity with respect to initial value. The results attain better stability than those found from the classical Galerkin method. Long time behavior could be better simulated in addition to the possibility of modeling turbulence.

Keywords: *Navier-Stokes equations; full discrete nonlinear Galerkin method; stability*

非线性 Galerkin 方法(NGM)是基于惯性流形(IM)和近似惯性流形(AIM)理论[1,2]设计出的一种适用于耗散型发展方程的数值方法. 与标准 Galerkin 方法(SGM)相比,其空间离散位于一个非线性流形 Graph Φ 上,而不是通常的线性空间. 直观地看,这种离散更合理和贴近现实.

本文针对 Navier-Stokes 方程,就一种简单的全离散形式,对该方法所得逼近解的有界性及其对初值的连续依赖性进行了分析. 这里所谓的 Fourier-NGM 是指我们将用 Fourier 函数系作为基函数系来对连续问题进行空间离散.

1 Navier-Stokes 方程

考虑二维区域 $\Omega = [-\pi, \pi]^2$ 上具有周期边界条件的 Navier-Stokes 方程

收稿日期: 1997-11-26. 作者简介: 侯延仁, 男, 1969 年 11 月生, 理学院科学计算系, 讲师.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(1967067).

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=f &&在\ \Omega\ 上\\ &\nabla\cdot u=0 &&在\ \Omega\ 上\\ &周期边界条件\\ &u(x,0)=a(x)\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

不失一般性[3],设 $\nabla\cdot a=\int_\Omega a(x)\,dx=\int_\Omega f\,dx=\int_\Omega u\,dx=0$. 其中 u、$p$ 分别代表速度和压力, f 是体积力, $\nu>0$ 是动力粘性系数, a 是初速度场. 下面给出 Ω 上几个基本的周期函数空间, $\forall m\in N$

$$H^m(\Omega)=\{\phi=\sum_{k\in Z^2}c_k e^{ik\cdot x}:c_k=\bar{c}_{-k}$$

$$\sum_{k\in Z^2}|k|^{2m}|c_k|^2<+\infty\}$$

$$H=\{\phi\in H^0(\Omega),\mathrm{div}\,\phi=0,弱意义下\},$$

$$V=\{\phi\in H^1(\Omega),\mathrm{div}\,\phi=0\}$$

$$\dot{H}^m(\Omega)=\{\phi\in H^m(\Omega):c_0=0\},$$

$$\dot{H}=H\cap\dot{H}^0(\Omega),\dot{V}=V\cap\dot{H}^1(\Omega)$$

并记 $(u,v)=\int_\Omega uv\,dx,|u|^2=(u,u)$.

投影算子 $P:H^0(\Omega)\to H$. $\forall f=\sum_{k\in Z^2}c_k e^{ik\cdot x}\in H^0(\Omega)$

$$Pf=\sum_{k\in Z^2,k\neq0}\left(I-\frac{k\cdot k^T}{|k|^2}\right)c_k e^{ik\cdot x}+c_0$$

Stokes 算子 $A:A\phi=-\Delta\phi$, $\forall\phi\in D(A)=\{\phi\in\dot{H},\Delta\phi\in\dot{H}\}$. 我们熟知对任意的 $\alpha\in R$, 可定义 A 的幂, 其定义域为 $D(A^\alpha)=\{\phi\in\dot{H},\phi=\sum_{k\in Z^2}\phi_k e^{ik\cdot x},\sum_{k\in Z^2}|k|^{2\alpha}|\phi_k|^2<+\infty\}$.

现在将(1)式用 P 投影到 H 上, 可得如下抽象形式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du}{dt}+\nu Au+B(u,u)=Pf\triangleq f\\ &u(0)=a\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

这里 $B(u,u)=P((u\cdot\nabla)u)$. 关于三线性 $b(u;v,w)=(B(u,v),w)$ 的性质, 它们是经典的, 读者可参看文献[3,4]. 下面将基于(2)式进行讨论.

今后我们将用 $c_i,i\in N$ 来代表特定的正常数.

2　全离散形式

给定 $n,N\in\mathbf{N},n<N$, 引入下面有限维子空间

$$S_N=\{\phi:\phi=\sum_{-N\le k_1,k_2\le N}c_k e^{ik\cdot x}\},$$

$$V_N=V\cap S_N,\dot{V}_N=\dot{V}\cap S_N$$

记 P_N 为 $H^0(\Omega)$ 到 S_N、的正交投影(L^2 意义下), 并记 $Q_N=I-P_N$. 同理, 对 $n\in\mathbf{N}$ 可定义 V_n 及 $\dot{V}_n$, P_n 和 $Q_{Nn}=P_N-P_n$. 现在定义有限维子空间对

$$\dot{V}_N=\dot{V}_n\oplus\dot{V}_N^n$$

其中

$$\dot{V}_n=P_n\dot{V};\dot{V}_N^n=Q_{N_n}\dot{V}.$$

选择不同的 Φ 作为近似惯性流形, 可构造不同的 NGM. 从理论上讲, 可构造一个近似惯性流形序列[5] $\{\Phi_i\}_{i=0}^{+\infty}$, 随着 i 的增大, 逼近解的精确度将不断提高, 但取较大的 i 所带来的计算工作量的增加会使人觉得得不尝失. 所以, 这里我们取 $i=1$, 即 $\Phi(v)=\Phi_1(v)=\nu^{-1}A^{-1}Q_{Nn}\{f-B(v,v)\}$. 而事实上 $i=0$ 就是 SGM. 为简单起见, 我们采用向前 Euler 差分进行时间离散, 步长为 k, 并记 $u_m=v_m+w_m$.

$$\left.\begin{aligned}&\forall m\in Z^+,若已知\ v_m\in\dot{V}_n,\\ &\qquad求(v_{m+1},w_m)\in\dot{V}_n\times\dot{V}_N^n\ 使\\ &v_{m+1}-v_m+k\nu Av_{m+1}+\\ &\qquad kP_nB(u_m,u_m)=kP_nf\\ &w_m=\Phi(v_m)\\ &v_0=P_na\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

3　有界性及稳定性分析

我们将分别讨论 Fourier 非线性 Galerkin 逼近解的有界性及对初值的连续依赖性. 首先, 我们给出一个不等式

$\forall 0\le\mu\le\beta,\phi\in H^\beta(\Omega)$, 存在不依赖于 N 和 ϕ 的常数 $c_1>0$, 使

$$\left.\begin{aligned}&|P_N\phi|_\beta\le c_1N^{\beta-\mu}|\phi|_\mu\\ &|Q_N\phi|_\mu\le c_1N^{\mu-\beta}|\phi|_\beta\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

另外, 我们还需要两种形式的离散 Gronwall 不等式.

Gronwall 不等式 1　令 a^n 是正数序列, α、β($\alpha\neq\beta$) 和 h 为 3 个正常数并满足

$$\forall n\ge0,\alpha a_{n+1}-\beta a_n\le h$$

则 $\forall n\ge0,a^n\le(\frac{\beta}{\alpha})^n(a_0-\frac{h}{\alpha-\beta})+\frac{h}{\alpha-\beta}$.

Gronwall 不等式 2　$\forall n\ge0$, k、B、a_μ、b_μ、c_μ、γ_μ 是非负数, 且

$$a_\mu+k\sum_{\mu=0}^n b_\mu\le k\sum_{\mu=0}^n\gamma_\mu a_\mu+$$

$$k\sum_{\mu=0}^n C_\mu+B\qquad\forall n\ge0$$

若 $k\gamma_\mu < 1$,并记 $\sigma_\mu = (1 - k\gamma_\mu)^{-1}$,则

$$a_\mu + k\sum_{\mu=0}^{n} b_\mu \le \exp\{k\sum_{\mu=0}^{n}\sigma_\mu\gamma_\mu\}$$
$$(k\sum_{\mu=0}^{n} C_\mu + B) \qquad \forall n \ge 0$$

下面以 c_2 表示我们所用 b 的估计中仅与 Ω 有关的常数,并记 $c_3 = c_1 c_2$.

定理1 设 $\mathrm{a} \in D(A^{\frac{1}{2}})$, $\mathrm{f} \in \dot{H}^0(\Omega)$. 令 $M = |A^{\frac{1}{2}}\mathrm{a}| + \frac{3|\mathrm{f}|}{\gamma}| + \frac{\upsilon}{6c_3}$,若 n 和 k 满足

$$\left.\begin{array}{l} 24c_3^2M^2kn \le \upsilon \\ 4c_3Mkn^2 \le 1 \\ n \ge \max\{144c_3^2\upsilon^2, 24c_3^2M^2n^{\frac{1}{4}}\upsilon^{2}, 24c_1c_3|\mathrm{f}|\upsilon^{2}\} \end{array}\right\} \tag{5}$$

则 $\forall m \in \mathbf{N}$,有 $|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{u}_m| \le M$.

证 利用 $(a - b, 2a) = |a|^2 - |b|^2 - |a - b|^2$ 及 b 的性质,有

$$|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}_{m+1}|^2 - |A^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}_m|^2 + |A^{\frac{1}{2}}(\mathrm{v}_{m+1} - \mathrm{v}_m)|^2 + 2k\upsilon|A\mathrm{v}_{m+1}|^2 =$$
$$-2kb(\mathrm{u}_m; \mathrm{u}_m, A\mathrm{v}_{m+1}) + 2k(\mathrm{f}, A\mathrm{v}_{m+1}) \le$$
$$2k|\mathrm{f}||A\mathrm{v}_{m+1}| + 2k|b(\mathrm{u}_m; \mathrm{v}_m - \mathrm{v}_{m+1}, A\mathrm{v}_{m+1}) + b(\mathrm{w}_m; \mathrm{v}_{m+1}, A\mathrm{w}_{m+1}) +$$
$$b(\mathrm{v}_m - \mathrm{v}_{m+1}; \mathrm{v}_{m+1} - \mathrm{v}_m, A\mathrm{v}_m) +$$
$$b(\mathrm{v}_m - \mathrm{v}_{m+1}; \mathrm{u}_m, A\mathrm{v}_{m+1}) +$$
$$b(\mathrm{v}_{m+1}; \mathrm{w}_m, A\mathrm{v}_{m+1}) - b(\mathrm{w}_m; A\mathrm{v}_{m+1} + \mathrm{w}_m)|$$

下面我们分别对上式右端7项进行估计

$$2k|(\mathrm{f}, A\mathrm{v}_{m+1})| \le \frac{k\upsilon}{6}|A\mathrm{v}_{m+1}|^2 + \frac{6k}{\upsilon}|\mathrm{f}|^2$$
$$2k|b(\mathrm{u}_m; \mathrm{v}_m - \mathrm{v}_{m+1}, A\mathrm{v}_{m+1})| \le \frac{k\upsilon}{6}A\mathrm{v}_{m+1}|^2 + \frac{6c_3^2kn}{\upsilon}|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{u}_m|^2|A^{\frac{1}{2}}(\mathrm{v}_{m+1} - \mathrm{v}_m)|^2$$
$$2k|b(\mathrm{w}_m; \mathrm{v}_{m+1}, A\mathrm{v}_{m+1})| \le 2c_3n^{-\frac{1}{2}}k|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{w}_m||A\mathrm{v}_{m+1}|^2$$
$$2k|b(\mathrm{v}_m - \mathrm{v}_{m+1}; \mathrm{v}_{m+1} - \mathrm{v}_m, A\mathrm{v}_m)| \le 2c_3kn^2|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}_m||A^{\frac{1}{2}}(\mathrm{v}_{m+1} - \mathrm{v}_m)|^2$$
$$2k|b(\mathrm{v}_m - \mathrm{v}_{m+1}; \mathrm{u}_m, A\mathrm{v}_{m+1})| \le \frac{k\upsilon}{6}|A\mathrm{v}_{m+1}|^2 + \frac{6c_3^2kn}{\upsilon}|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{u}_n|^2|A^{\frac{1}{2}}(\mathrm{v}_{m+1} - \mathrm{v}_m)|^2$$
$$2k|b(\mathrm{v}_{m+1}; \mathrm{w}_m, A\mathrm{v}_{m+1})| \le 2c_2k|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{w}_n||A\mathrm{v}_{m+1}|^2$$
$$2k|b(\mathrm{w}_m; A\mathrm{v}_{m+1}, \mathrm{w}_m)| \le \frac{k\upsilon}{6}|A\mathrm{v}_{m+1}|^2 + \frac{6c_3^2k}{\upsilon}|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{w}_m|^4$$

综合以上7个估计式,最终我们可得

$$|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}_{m+1}|^2 - |A^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}_m|^2 + (1 - \frac{12c_3^2kn|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{u}_m| + 2c_3kvn^2}{\upsilon}|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{u}_m|)A^{\frac{1}{2}}(\mathrm{v}_{m+1} - \mathrm{v}_m)|^2 + k\upsilon|A\mathrm{v}_{m+1}|^2 \le$$
$$k(\frac{6}{\upsilon}|\mathrm{f}|^2 + \frac{6c_3^2}{\upsilon}|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{w}_n|^4) - (\frac{k\mathrm{v}}{3} - 2c_3n^{-\frac{1}{2}}k|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{w}_m|2c_2k|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{w}_m|)|A\mathrm{v}_{m+1}|^2$$

假定对于 $m \in \mathbf{N}$,有 $|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{u}_m| \le M$, $|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{w}_m| \le \frac{\upsilon}{12c_3}$ 成立,则有

$$|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}_{m+1}|^2 - |A^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}_m|^2 + (1 - \frac{12c_3^2knM^2}{\upsilon} - 2c_3kn^2M)|A^{\frac{1}{2}}(\mathrm{v}_{m+1} - \mathrm{v}_m)|^2 + k\upsilon|A\mathrm{v}_{m+1}|^2 \le k(\frac{6}{\upsilon}|\mathrm{f}|^2 + \frac{6\upsilon^3}{12^4c_2^3})$$

若 n 和 k 满足式(5),并注意式(4),有

$$(1 + k\upsilon)|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}_{m+1}|^2 - |A^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}_m|^2 \le \frac{6k}{\upsilon}(|\mathrm{f}|^2 + \frac{\upsilon^4}{12^4c_2^3})$$

利用 Gronwall 不等式1,我们有 $|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}_{m+1}|^2 \le |A^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}_0|^2 + \frac{6}{\upsilon^2}|\mathrm{f}|^2 + \frac{\upsilon^2}{12^4c_2^3}$. 从而

$$|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{v}_{m+1}| \le |A^{\frac{1}{2}}\mathrm{a}| + \frac{6^{\frac{1}{2}}}{\upsilon}|\mathrm{f}| + \frac{\upsilon}{144c_3}$$

至于 $|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{w}_{m+1}|$ 的估计,利用上面结果

$$|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{w}_{m+1}| \le \upsilon^{1}|A^{-\frac{1}{2}}Q_{Nn}\{\mathrm{f} - B(\mathrm{v}_{m+1}, \mathrm{v}_{m+1})\}| \le \frac{c_1|\mathrm{f}|}{n\upsilon} + \frac{c_3M^2}{n^{\frac{3}{4}}\upsilon}$$

又由(5)式的最后一条,有 $|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{w}_{m+1}| \le \frac{\upsilon}{12c_3}$. 至于 $|A^{\frac{1}{2}}\mathrm{w}_0|$,用上面的方法可得同样的估计. 现在,由归纳法,我们事实上已证明了该命题.

证毕.

从定理1的结果可知,NGM 算法(3)式的稳定性条件,即其逼近解的有界性条件只与 k 和 n 有关,而与 N 无关. 参见文[6,7]中所给出的非线性 Galerkin 方法的收敛性结果,要达到与空间离散密度

为 N 的 SGM 同样的逼近程度, NGM 只需取 $n = O(N^{\frac{1}{2}})$,显然 NGM 方法具有更好的数值稳定性及计算效率.

下面着手讨论解对初值的连续依赖性. 设分别给定初值 v_0^1、v_0^2,并设$\{(v_m^i, w_m^i)\}_{m \geq 0}$, $i = 1,2$ 分别是相应的逼近解序列. 为方便起见,记

$$v_m = v_m^1 - v_m^2;\ w_m = w_m^1 - w_m^2;$$

$$u_m = v_m + w_m;\ u_m^i = v_m^i + w_m^i;\ i = 1,2$$

则$\{(v_m, w_m)\}_{m \geq 0}$满足下面关系

$$\left.\begin{aligned} & v_{m+1} - v_m + k\upsilon A v_{m+1} + kP_n B(u_m^1, u_m) + \\ & \quad kP_n B(u_m, u_m^2) = 0 \\ & \upsilon A w_m + Q_{Nn} B(v_m^1, v_m) + Q_{Nn} B(v_m, v_m^2) = 0 \\ & v_0 = v_0^1 - v_0^2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

类似于定理 1,我们有

$$|A^{\frac{1}{2}} v_{m+1}|^2 - |A^{\frac{1}{2}} v_m|^2 + |A^{\frac{1}{2}}(v_{m+1} - v_m)|^2 + 2k\upsilon |Av_{m+1}|^2 \leq 2k|b(u_m^1; v_{m+1} - v_m, Av_{m+1}) - b(u_m^1; w_m, Av_{m+1}) + b(v_{m+1} - v_m; u_m^2, Av_{m+1}) - b(v_{m+1}; u_m^2, Av_{m+1}) - b(u_m^1; v_{m+1}, Av_{m+1}) - b(w_m; u_m^2, Av_{m+1})| \tag{7}$$

这里我们假定$|A^{\frac{1}{2}} u_m^i| \leq M$, $m \geq 0$, $i = 1,2$,且 M 由定理 1 给定. 由方程(6)易知

$$|A^{\frac{3}{5}} w_m|^2 \leq \frac{4c_3^2 M^2}{\upsilon^2 n} |A^{\frac{1}{2}} v_m|^2 \leq \frac{1}{6n^{\frac{1}{4}}} |A^{\frac{1}{2}} v_m|^2 \tag{8}$$

上式第二个不等式用到了式(5). 从而

$$2k|b(u_m^1; w_m, Av_{m+1}) + b(w_m; u_m^2, Av_{m+1})| \leq 4c_2 Mk|A^{\frac{3}{5}} w_m||Av_{m+1}| \leq \frac{k\upsilon}{3}|Av_{m+1}|^2 + \frac{2c_2^2 M^2 k}{\upsilon n^{\frac{1}{4}}}|A^{\frac{1}{2}} v_m|^2 \tag{9}$$

取 ε 使 $4c_2 M\varepsilon \leq \frac{\upsilon}{6}$,则有

$$2k|b(u_m^1; v_{m+1}, Av_{m+1}) + b(v_{m+1}; u_m^2, Av_{m+1})| \leq 4c_2 Mk|A^{\frac{3}{4}} v_{m+1}||Av_{m+1}| \leq 4c_2 Mk\varepsilon|Av_{m+1}|^2 + 4c_2 MkC_\varepsilon|A^{\frac{1}{2}} v_{m+1}||Av_{m+1}| \leq \frac{k\upsilon}{3}|Av_{m+1}|^2 + \frac{12c_2^2 M^2 C_\varepsilon^2 k}{\upsilon}|A^{\frac{1}{2}} v_{m+1}|^2 \tag{10}$$

取 n, K 使$\frac{12C_3^2 M^2 nK}{\upsilon} \leq 1$,则有

$$2k|b(u_m^1; v_{m+1} - v_m, Av_{m+1}) + b(v_{m+1} - v_m; u_m^2, Av_{m+1})| \leq 4c_3 Mn^{\frac{1}{2}} k|A^{\frac{1}{2}}(v_{m+1} - v_m)||Av_{m+1}| \leq \frac{k\upsilon}{3}|Av_{m+1}|^2 + \frac{12c_3^2 M^2 nk}{\upsilon}|A^{\frac{1}{2}}(v_{m+1} - v_m)|^2 \leq \frac{k\upsilon}{3}|Av_{m+1}|^2 + |A^{\frac{1}{2}}(v_{m+1} - v_m)|^2 \tag{11}$$

综合式(7)～(11),并记 $\alpha = (1 + k\upsilon)^{-1} < 1$,则有

$$|A^{\frac{1}{2}} v_{m+1}|^2 - \alpha|A^{\frac{1}{2}} v_m|^2 \leq \alpha k\beta_1|A^{\frac{1}{2}} v_{m+1}|^2 + \alpha k\beta_2|A^{\frac{1}{2}} v_m|^2 \tag{12}$$

其中:$\beta_1 = \frac{12c_2^2 M^2 C_\varepsilon^2}{\upsilon}$;$\beta_2 = \frac{2c_2^2 M^2}{\upsilon}$. 利用(12)式进行递推,我们不难得到

$$|A^{\frac{1}{2}} v_{m+1}|^2 - \alpha^{m+1}|A^{\frac{1}{2}} v_0|^2 \leq k\alpha^{m+1}\beta_2|A^{\frac{1}{2}} v_0|^2 + \sum_{i=1}^{m} k\alpha^{m+1-i}(\alpha\beta_1 + \beta_2)|A^{\frac{1}{2}} v_i|^2 + k\alpha\beta_1|A^{\frac{1}{2}} v_{m+1}|^2 \leq k\sum_{i=0}^{m+1}(\beta_1 + \beta_2)\alpha^{m+1-i}|A^{\frac{1}{2}} v_i|^2$$

取 k 使得 $k(\beta_1 + \beta_2) < \frac{1}{2}$,并记 $\sigma = (1 - k(\beta_1 + \beta_2))^{-1} < 2$,则可利用 Gronwall 不等式 2 及等比级数求和公式得到

$$|A^{\frac{1}{2}} v_{m+1}| \leq e^{\beta(m)}|A^{\frac{1}{2}} v_0| \tag{13}$$

这里

$$\beta(m) = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)(1 - \alpha^{m+2})}{\alpha\upsilon} \leq \frac{4c_2^2 M^2(6C_\varepsilon^2 + 1)(1 - \alpha^{m+2})}{\alpha\upsilon^2} \tag{14}$$

由式(13),易得$|A^{\frac{1}{2}} w_{m+1}| \leq \frac{2c_3 M}{\upsilon n^{\frac{3}{4}}} e^{\beta(m)}|A^{\frac{1}{2}} v_0|$. 由于 $\alpha < 1$,则 $\beta(m)$ 存在一个上界,记为 β,我们有 $|A^{\frac{1}{2}} u_{m+1}| \leq 2e^{\beta}|A^{\frac{1}{2}} v_0|$. 事实上,到此我们已证明了下面定理

定理 2 在定理 1 的条件下,若 v_0^1、$v_0^2 \in D(A^{\frac{1}{2}})$,则

$$|A^{\frac{1}{2}} u_{m+1}| \leq 2e^{\beta(m)}|A^{\frac{1}{2}} v_0|$$

其中 $\forall m \geq 0$, $\beta(m)$ 由(14)给出.

从定理 2 的结果来看,$\beta(m)$是敏感依赖于动力粘性系数 υ 的,随着 υ 的减小,解对初值的连续依赖性很可能在很快地变坏,这也是合乎物理现实的. 另外,对一定的 υ,由于 α 一般来说非常接近于

(下转第 101 页)

定条件(Ⅱ)上的一个应用.

对于 T = {99,99,9,11}, n = 3,求 NSOTA 的最优解.其最优解显然为 p_1 处理问题 t_1, p_2 处理问题 t_2, p_3 处理问题 t_3 和 t_4,完成 T 所用时间为 102.应用算法 1,产生的分配方案是 p_1 处理问题 t_1 和 t_2, p_2 处理问题 t_3, p_3 处理问题 t_4,完成 T 所用时间为 198.算法 1 产生结果的近似比为 198/102.

考虑用反迭代法并行求解 $m \times m$ 对称三对角矩阵 T 的特征向量,这里假定特征值已经求出.T 有如下形式

$$T = \begin{bmatrix} d_1 & e_2 & & \\ e_2 & d_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & e_{m-1} \\ & & e_m & d_m \end{bmatrix} \qquad (10)$$

进一步假设已有在 n 个处理器上求解 m 阶问题的并行计算方法 t.根据求此问题的特点,如果 T 的某个非对角线元素是 0,则此 m 阶问题可化成两个小规模问题来求解.这样做既可以减少计算时间又可以得到准确的特征向量[10].因此,如果有多个非对角线元素是 0,我们就可以得到一系列的子问题.为了减少在进行正交化过程中的计算和通讯开销,我们就要对子问题的任务分配进行合理的安排,这就是本文所考虑的限制条件 Ⅱ的问题,利用此方法已在求解特征值问题中得到了很好的应用.

参考文献:

[1] Garey M, Johnson D. Computers and intractability, a guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: Freeman, 1979.

[2] Lo V M. Heuristic algorithms for task assignment in distributed system. IEEE Trans Computer, 1988, 37(11): 1 384～1 397.

[3] Shen C, Tsai W. A graph matching approach to optimal task assignment in distributed computing system using a minimax criterion. IEEE Trans Computer, 1975, 34(3): 197～203.

[4] Wu W. On runtime parallel scheduling for processor load balancing. IEEE Trans on Parallel and Distributed System, 1997, 8(2): 173～185.

[5] Lee C, Shin K. Optimal task assignment in homogeneous networks. IEEE Trans on Parallel and Distributed System. 1997, 8(2): 119～129.

[6] Ramamoorthy C. Optimal scheduling strategies in a multiprocessor system. IEEE Trans Computer, 1972, 21(2): 137～146.

[7] Scholz P, Harbeck E. Task assignment for distributed computing. In: Adyances in Parallel and Distributed Computing. Washington: IEEE Computer Society Press, 1997. 270～277.

[8] Ahmad I, Kafil M. A parallel algorithm for optimal task assignment in distributed system. In: Advances in Prallel and Distributed Computing. Washington: IEEE Computer Society Press, 1997. 284～290.

[9] Sun H. New bounds on time and number of processors for multiprocessor optimal schedules. Wuhan University J Natural Sci, 1996, 1(3/4): 350～355.

[10] Chi Xuebin. Parallel solver of generalized eigen problem on dawning-1000. In: Advances in Parallel and distributed computing. Washington: IEEE Computer Society Press, 1997. 144～148.

(编辑　赵大良)

(上接第 97 页)

1,事实上 $1 - \alpha \sim O(k\upsilon)$,又由式(5),我们可断定在不太长的时间内 $\beta(m) \sim O(\frac{1}{n})$.

参考文献:

[1] Foias C, Sell G R, Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations. Journal of Differential Equations, 1988, 73: 309～353.

[2] Foias C, Manley O, Temam R. On the interaction of small eddies in two-dimensional turbulence flows. Math Modeling and Numerical Analysis, 1988, 22: 93～114.

[3] Temam R. Navier-Stokes equation and nonlinear functional analysis. SIAM, Philadelphia, 1983.

[4] 李开泰,马逸尘.数理方程 HILBERT 空间方法(下).西安:西安交通大学出版社,1992.

[5] Debussche A, Temam R. Convergent family of approximate inertial manifolds. J Math Pures Appl, 1994, 73: 489～522.

[6] Marion M, Temam R. Nonlinear Galerkin methods. SIAM J Numer Anal, 1989, 26: 1 139～1 157.

[7] Li Kaitai, Hou Yanren. Fourier nonlinear Galerkin method for Navier-Stokes equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 1996, 2(4): 479～524.

(编辑　杜秀杰)