第43卷第3期 数 学 学 报 Vol.43, No.3
2000年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA May, 2000

文章编号: 0583-1431(2000)03-0435-10 **文献标识码**: A

时滞惯性流形及近似时滞惯性流形族

李开泰 侯延仁

(西安交通大学理学院 陕西 西安 710049)
(Fax: (029)3237910; E-mail: ktli@xjtu.edu.cn)

摘 要 时滞惯性流形是对耗散系统惯性流形、近似惯性流形的最新发展，它基于对大小涡分量间相互作用更细致的观察，即改变了惯性流形和近似惯性流形方法中大小涡分量间相互作用为瞬时行为的隐含假定，而认为这种作用与系统的历史相关的. 本文给出了一类耗散系统时滞惯性流形的存在性证明，由于其存在性不需要“谱间隔条件”保证，因而时滞惯性流形是广泛存在的. 随后我们引出了一类离散的时滞惯性流形，并在此基础上构造了一种近似时滞惯性流形族，分别给出了它们近似时滞惯性流形的误差估计，结果显示这种新方法为构造稳定和高精度的算法提供了可能.

关键词 耗散系统；惯性流形；近似惯性流形
MR(1991) 主题分类 65M12, 65M60
中图分类 O175.29, O241.82

IMD and a Family of Approximate IMDs

LI Kai-tai HOU Yan-ren
(School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China)
(Fax: (029)3237910; E-mail: ktli@xjtu.edu.cn)

Abstract Inertial Manifold with Delay (IMD) is the recent development of the Inerial Manifold (IM) and Approximate Inertial Manifold (AIM) for the dissipative systems, which is based on the more precise observation of the interaction between large and small eddies, that is we believe this kind of interaction is related with the history of the system instead of implicitly regarding it is instantaneous as in IM and AIM. In this paper, we present a proof of the existence of IMD with respect to a certain sort of dissipative system. Becasue the so-called "spectral gap condition" is not necessary for the existence of IMD, it exists widely. Then we introduce a kind of discrete IMD and construct a family of IMD. Their error estimations for approximating IMD show that this kind of method can provide a possible way to construct stable and accurate algorithms.

Keywords Dissipative system; Inertial manifold; Approximate inertial manifold
MR(1991) Subject Classification 65M12, 65M60
Chinese Library Classification O175.29, O241.82

1 引言

惯性流形和近似惯性流形概念 [1,2] 反映了耗散型非线性发展方程的大小涡分量间的相互

收稿日期： 1997-10-17; 接受日期： 1999-10-15
基金项目：国家自然科学基金项目 (19671067); 国家重大基础研究项目 (G1999032801)
作者简介： 侯延仁 (1969–), 男，陕西延安人，西安交通大学理学院讲师，博士，从事偏微分方程及数值方法研究.

作用规律，即若以 $q(t)$ 和 $p(t)$ 分别表示 t 时刻的小涡和大涡分量 (也即高频和低频分量)，则 $q(t)=\Phi(p(t))$. 显然，惯性流形概念建立在这样一种隐含假定之上，即大涡与小涡分量之间的相互作用是瞬时的. 在这一基础上，又形成了所谓的非线性 Galerkin 算法 (见 [3–6]). 但在这样一种隐含假设之上建立的惯性流形，迄今为止，我们知道其存在性需 "谱间隔条件" 来保证，而这一条件对包括 Navier-Stokes 方程在内的一大类耗散系统来说是相当苛刻和难以满足的. 虽然人们尚不能肯定 "谱间隔条件" 对惯性流形来讲是否是本质的，但就目前的研究状况看，用现有的工具与方法，难以克服这一困难. 另一方面，直观地讲，自然界中的微分系统绝大多数是因果系统，其当前状态，一般地说将依赖于系统的历史. 从这一点上看，也不难理解为什么惯性流形的存在性具有苛刻的条件. 进一步，直观上来看，由于很多因素的影响，如粘性，质量等，历史的影响一般来说会有一定的时间延迟，至于这一延迟的长短，一定是由如粘性和质量等因素决定的. 正是基于这种考虑， Debussche A. 和 Temam R.[7] 在 1995 年又提出了时滞惯性流形 (Inertial Manifolds with Delay, IMD) 的概念，即 $q(t)=\Psi(p(t),q(t-T))$, 这里 $T>0$ 是一个适当的延迟时间. 它说明小涡分量的当前值不但依赖于当前大涡分量的值，还依赖于小涡分量某个时间间隔 T 以前的状态，这种关系当然表现了系统当前状态依赖于历史的规律，而且我们认为这种依赖规律并非是唯一的，但为简单起见，本文仅将针对这种关系进行讨论.

2 连续时滞惯性流形

在这一节中，我们将讨论时滞惯性流形的存在性及基本性质. 其基本结果在 [7] 中已有叙述，但 [7] 中并未给出证明，只是简单地指明了证明的基本方法. 我们这里将采用另外一种方法来得到这些结果，而这种方法在后面的讨论中还要被用到.

考虑定义在 Banach 空间 $\mathcal{E}$ 上的抽象非线性发展方程

$$\frac{du}{dt}+Au=f(u), \tag{2.1}$$

这里 A 是一个线性无界的，其定义域 $D(A)$ 在 $\mathcal{E}$ 中稠密的算子， f 是从 Banach 空间 E 到 Banach 空间 F 的映射，而 E 和 F 是 $\mathcal{E}$ 的两个子空间，满足 $E\subset F\subset\mathcal{E}$, 且其嵌入均是连续和稠密的. 今后，若非特别声明，我们总以 $|\cdot|_X$ 表示给定 Banach 空间 X 中的范数. 现在，我们对 (2.1) 作一些基本假设.

(H1) 设对任意的 $u_0\in E$, (2.1) 存在唯一解 $u=u(t)\in C(\mathcal{R}^+,E)$ 满足 $u(0)=u_0$, 即 (2.1) 可定义 E 上的一个非线性连续半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, 使得 $u(t)=S(t)u_0$.

(H2) 假定 f 是从 E 到 F 的全局 Lipschitz 连续映射，设 $M_1>0$ 是其 Lipschitz 常数，$|f(u_1)-f(u_2)|_F\leq M_1|u_1-u_2|_E,\quad \forall\, u_1,u_2\in E$.

(H3) 假定 A 可产生 $\mathcal{E}$ 上的连续半群 $\{\mathrm{e}^{-At}\}_{t\geq 0}$, 使对任意的 $t>0$ 有 $\mathrm{e}^{-At}F\subset E$.

另外，设 $\{P_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ 是特征投影算子序列，且 $AP_n=P_nA$, 并记 $Q_n=I-P_n$. 假定

- $\{\mathrm{e}^{-At}P_n\}_{t\geq 0}$ 可延拓为一个群 $\{\mathrm{e}^{-At}P_n\}_{t\in\mathcal{R}}$;
- $|\mathrm{e}^{-At}P_n|_{\mathcal{L}(F,E)}\leq\lambda_n^{\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda_n t}$, $|\mathrm{e}^{-At}P_n|_{\mathcal{L}(E)}\leq\mathrm{e}^{-\lambda_n t},\quad \forall\, t<0$;
- $|\mathrm{e}^{-At}Q_n|_{\mathcal{L}(F,E)}\leq K(t^{-\alpha}+\Lambda_n^{\alpha})\mathrm{e}^{-\Lambda_n t}$, $|\mathrm{e}^{-At}Q_n|_{\mathcal{L}(E)}\leq\mathrm{e}^{-\Lambda_n t},\quad \forall\, t>0$.

此处， $K>0$ 是一个常数， $\alpha\in[0,1)$ 与空间 E 和 F 的关系有关， $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ 和 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ 是两个正数序列满足 $\Lambda_n\geq\lambda_n>0$, 且当 n 趋于无穷时 $\frac{\Lambda_n}{\lambda_n}\to 1$.

注 我们以 Navier-Stokes 方程为例来说明 (H1)–(H3). 此时 (详见 [8–10]),

$$A=\begin{cases} -\nu\Delta & (\text{周期边界条件情形}),\\ -\nu P_L\Delta & (\text{Dirichlet 边界条件情形}),\end{cases}$$

其中 $\nu>0$ 为动力粘性系数, 在 Dirichlet 边界条件情形, P_L 是 Leray 投影算子. $f(u)=F-B(u,u)$, F 是体积力 (假定 (2.1) 为自治系统, 则 F 与 t 无关), $B(\cdot,\cdot)$ 是通常定义的双线性算子. 对适当的 E, F 和 $\mathcal{E}$, 若取 λ_n 为 A 的第 n 个特征值, Λ_n 为 A 的第 $n+1$ 个特征值, 则 (H1) 和 (H3) 是成立的. 而 (H2) 要求 f, 即是要求双线性算子 $B(\cdot,\cdot)$, 是全局 Lipschitz 连续的, 这在整个空间上是无法满足的. 但注意到 Navier-Stokes 方程的耗散性, 我们可以将 $B(\cdot,\cdot)$ 关于某个吸收集 $\mathcal{B}$ 做截断, 使其在 $\mathcal{B}$ 中保持原型, 而在某个包含 $\mathcal{B}$ 的吸收集 $\mathcal{B}'$ 外为零. 经这样修改后的方程显然满足 (H2), 且保持了系统的长期动力学性质.

对给定的 $n\in\mathcal{N}$, 为了记号上的简单起见, 记 $\lambda=\lambda_n$, $\Lambda=\Lambda_n$, $P=P_n$, $Q=Q_n$, 于是方程 (2.1) 等价于下面耦合方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}+Ay=Pf(y+z),\\ \dfrac{dz}{dt}+Az=Qf(y+z). \end{cases}\tag{2.2}$$

假定对某个 $T>0$, 我们已知

$$Pu(0)=y_0,\quad Qu(-T)=z_{-T}.\tag{2.3}$$

现在, 对 $t\in[-T,0]$, 考虑方程 (2.1), 即 (2.2). 利用 (H3) 及 (2.3) 可知

$$u(t)=\mathrm{e}^{-A(T+t)}z_{-T}+\int_{-T}^{t}\mathrm{e}^{-A(t-s)}Qf(u(s))ds+\mathrm{e}^{-At}y_0-\int_t^0\mathrm{e}^{-A(t-s)}Pf(u(s))ds.\tag{2.4}$$

若对任意的 $t\in[-T,0]$, 记

$$\mathcal{T}(y_0,z_{-T};u)(t)=\mathrm{e}^{-A(T+t)}z_{-T}+\int_{-T}^{t}\mathrm{e}^{-A(t-s)}Qf(u)ds+\mathrm{e}^{-At}y_0-\int_t^0\mathrm{e}^{-A(t-s)}Pf(u)ds.\tag{2.5}$$

则 $u\in C([-T,0],E)$ 是满足 (2.4) 的解, 当且仅当 u 是 $\mathcal{T}(y_0,z_{-T};\cdot)$ 的不动点.

对适当的常数 $\mu\geq 0$, 定义空间

$$\mathcal{G}_\mu=\Big\{u\in C([-T,0],E):\ \|u\|_\mu=\sup_{t\in[-T,0]}\mathrm{e}^{\mu t}|u(t)|_E<+\infty\Big\}.$$

我们知道这样定义的 $\mathcal{G}_\mu$ 是一个 Banach 空间 (参见 [11]), 且容易证明

引理 2.1 对给定的 $T>0$, $y_0\in PE$, $z_{-T}\in QE$, (2.5) 定义的映射 $\mathcal{T}(y_0,z_{-T};\cdot)$ 是从 $\mathcal{G}_\lambda$ 到 $\mathcal{G}_\lambda$ 的映射.

由 (H3), 不失一般性, 我们可以假定, $\forall n\in\mathcal{N}$

$$1\leq\frac{\Lambda_n}{\lambda_n}\leq\beta,\quad \beta\in(1,2).\tag{2.6}$$

定理 2.1 在 (H1)–(H3) 的假设前提下, 当 λ 和 $T>0$ 满足如下条件时

$$\frac{KM_1T^{1-\alpha}}{1-\alpha}+M_1(K\beta^\alpha+1)\lambda^\alpha T\leq\frac{1}{4},\tag{2.7}$$

$\mathcal{T}(y_0, z_{-T}; \cdot)$ 存在唯一的不动点 $\psi(y_0, z_{-T}) \in \mathcal{G}_\lambda$, 且 ψ 关于 y_0 和 z_{-T} 是连续的，满足：$\forall (y_0^i, z_{-T}^i) \in PE \times QE$, $i = 1, 2$,

$$|\psi(y_0^1, z_{-T}^1)(0) - \psi(y_0^2, z_{-T}^2)(0)|_E \leq \frac{4}{3}(\mathrm{e}^{-\Lambda T}|z_{-T}^1 - z_{-T}^2|_E + |y_0^1 - y_0^2|_E).$$

证明 引理 2.1 告诉我们 $\mathcal{T}$ 是 $PE \times QE \times \mathcal{G}_\lambda$ 到 $\mathcal{G}_\lambda$ 的映射. 若进一步可得 $\mathcal{T}$ 关于 y_0, z_{-T} 是一致压缩映像，则可知 $\mathcal{T}(y_0, z_{-T}; \cdot)$ 在 $\mathcal{G}_\lambda$ 中存在唯一不动点 $\psi(y_0, z_{-T})$, 且关于 y_0 和 z_{-T} 是连续的.

设 u_1, u_2 是 $\mathcal{G}_\lambda$ 中任意两个元素，记 $\Delta u = u_1 - u_2$, $\Delta f = f(u_1) - f(u_2)$ 及 $\Delta\mathcal{T} = \mathcal{T}(y_0, z_{-T}; u_1) - \mathcal{T}(y_0, z_{-T}; u_2)$, 于是利用 (H2) 和 (H3) 可得

$$|\Delta\mathcal{T}(t)|_E \leq KM_1 \int_{-T}^{t} ((t-s)^{-\alpha} + \Lambda^\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(t-s)}|\Delta u(s)|_E ds + M_1\lambda^\alpha \int_t^0 \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}|\Delta u(s)|_E ds.$$

用 $\mathrm{e}^{\lambda t}$ 同乘上式各项，则

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda t}|\Delta\mathcal{T}(t)|_E &\leq KM_1 \int_{-T}^{t} ((t-s)^{-\alpha} + \Lambda^\alpha)\mathrm{e}^{-(\Lambda-\lambda)(t-s)}\|\Delta u\|_\lambda ds + M_1\lambda^\alpha|t|\,\|\Delta u\|_\lambda \\ &\leq KM_1T^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1}\|\Delta u\|_\lambda + KM_1\Lambda^\alpha T\|\Delta u\|_\lambda + M_1\lambda^\alpha T\|\Delta u\|_\lambda.\end{aligned}$$

由 (2.6) 可知， $\Lambda^\alpha \leq \beta^\alpha\lambda^\alpha$. 从而上面不等式可写为

$$\mathrm{e}^{\lambda t}|\Delta\mathcal{T}(t)|_E \leq \left\{\frac{KM_1T^{1-\alpha}}{1-\alpha} + M_1(K\beta^\alpha + 1)\lambda^\alpha T\right\}\|\Delta u\|_\lambda.$$

若取适当的 λ 和 T 使得 (2.7) 成立，则有 $\|\Delta\mathcal{T}\|_\lambda \leq \frac{1}{4}\|\Delta u\|_\lambda$.

至此，我们说明了 $\mathcal{T}$ 是 $PE \times QE \times \mathcal{G}_\lambda$ 到 $\mathcal{G}_\lambda$ 的一致压缩映像，于是对任给的 $(y_0, z_{-T}) \in PE \times QE$, $\mathcal{T}(y_0, z_{-T}; \cdot)$ 在 $\mathcal{G}_\lambda$ 存在唯一不动点 $\psi(y_0, z_{-T})$, 且关于 (y_0, z_{-T}) 连续.

设 $(y_0^i, z_{-T}^i) \in PE \times QE$, $i = 1, 2$ 是任意给定的两组参数， $\psi(y_0^i, z_{-T}^i) \in \mathcal{G}_\lambda$, $i = 1, 2$ 是对应的 $\mathcal{T}$ 的不动点，且记 $\Delta\psi = \psi(y_0^1, z_{-T}^1) - \psi(y_0^2, z_{-T}^2)$. 由刚才证明 $\mathcal{T}$ 一致压缩的过程，容易看出 $\mathrm{e}^{\lambda t}|\Delta\psi(t)|_E \leq \frac{1}{4}\|\Delta\psi\|_\lambda + \mathrm{e}^{-\Lambda T}\mathrm{e}^{-(\Lambda-\lambda)t}|z_{-T}^1 - z_{-T}^2|_E + |y_0^1 - y_0^2|_E$. 从而 $|\psi(y_0^1, z_{-T}^1)(t) - \psi(y_0^2, z_{-T}^2)(t)|_E \leq \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathrm{e}^{-\lambda T}|z_{-T}^1 - z_{-T}^2|_E + |y_0^1 - y_0^2|_E)$, $\forall t \leq 0$. 证毕.

现在，对任意的 $(y_0, z_{-T}) \in PE \times QE$, 记

$$\Psi(y_0, z_{-T}) = Q\psi(y_0, z_{-T})(0). \tag{2.8}$$

则 $\Psi : PE \times QE \to QE$ 就是我们所说的时滞惯性流形. 由前面的定理，我们知道， (2.1) 的任何一条轨道都满足 (2.8), 这也是时滞惯性流形与惯性流形、近似惯性流形的一个很明显的区别. 另外，定理 2.1 也表明这种时滞惯性流形的存在不需要谱间隔条件来保证，甚至对 λ 的大小，即 n 的大小也没有一个苛刻的下界要求，因而它是广泛存在的.

下面给出的定理可以看作是定理 2.1 的一个推论.

定理 2.2 若 (H1)–(H3) 成立，进一步要求 λ 和 T 满足： $KM_1((1-\alpha)^{-1}T^{1-\alpha} + \beta^\alpha\lambda^\alpha T) \leq \frac{1}{5}$, $M_1\lambda^\alpha T \leq \frac{1}{5}$, 则时滞惯性流形 Ψ 满足： $\forall (y_0^i, z_{-T}^i) \in PE \times QE$, $i = 1, 2$,

$$|\Psi(y_0^1, z_{-T}^1) - \Psi(y_0^2, z_{-T}^2)|_E \leq 2\mathrm{e}^{-\lambda T}|z_{-T}^1 - z_{-T}^2|_E + \frac{1}{2}|y_0^1 - y_0^2|_E.$$

证明 由定理 2.1 可知，对任意给定的 (y_0^1,z_{-T}^1) 和 (y_0^2,z_{-T}^2), $\psi(y_0^1,z_{-T}^1)(t)$ 和 $\psi(y_0^2,z_{-T}^2)(t)$ 是 (2.4) 的解. 若记 $\Delta\psi(t)=\psi(y_0^1,z_{-T}^1)(t)-\psi(y_0^2,z_{-T}^2)(t)$, 则易知

$$\mathrm{e}^{\lambda t}|P\Delta\psi(t)|_E\le|y_0^1-y_0^2|_E+M_1\lambda^\alpha T\|P\Delta\psi\|_\lambda+M_1\lambda^\alpha T\|Q\Delta\psi\|_\lambda, \tag{2.9}$$

$$\mathrm{e}^{\lambda t}|Q\Delta\psi(t)|_E\le X_1\|P\Delta\psi\|_\lambda+X_1\|Q\Delta\psi\|_\lambda+\mathrm{e}^{-\lambda T}|z_{-T}^1-z_{-T}^2|_E. \tag{2.10}$$

此处 $X_1=KM_1(1-\alpha)^{-1}T^\alpha+KM_1\beta^\alpha\lambda^\alpha T$, 另外记 $X_2=X_1+\frac{M_1\lambda^\alpha T}{1-M_1\lambda^\alpha T}$, 则由 (2.9) 和 (2.10) 中解出 $\|Q\Delta\psi\|_\lambda$ 可得

$$\begin{aligned}\|Q\Delta\psi\|_\lambda\le&\mathrm{e}^{-\lambda T}|z_{-T}^1-z_{-T}^2|_E+X_1\Big(\frac{1}{1-M_1\lambda^\alpha T}|y_0^1-y_0^2|_E+\frac{M_1\lambda^\alpha T}{1-M_1\lambda^\alpha T}\|Q\Delta\psi\|_\lambda\Big)+X_1\|Q\Delta\psi\|_\lambda\\ \le&\mathrm{e}^{-\lambda T}|z_{-T}^1-z_{-T}^2|_E+X_2\|Q\Delta\psi\|_\lambda+\frac{X_1}{1-M_1\lambda^\alpha T}|y_0^1-y_0^2|_E.\end{aligned}$$

如果 $1-X_2>0$, 则 $\|Q\Delta\psi\|_\lambda\le\frac{\mathrm{e}^{-\lambda T}}{1-X_2}|z_{-T}^1-z_{-T}^2|_E+\frac{X_1}{(1-X_2)(1-M_1\lambda^\alpha T)}|y_0^1-y_0^2|_E$. 在定理条件下，我们可以验证

$$\sup_{t\in[-T,0]}\mathrm{e}^{\lambda t}|Q\psi(y_0^1,z_{-T}^1)(t)-\psi(y_0^2,z_{-T}^2)(t)|_E\le2\mathrm{e}^{-\lambda T}|z_{-T}^1-z_{-T}^2|_E+\frac{1}{2}|y_0^1-y_0^2|_E.$$

从而推出定理的结论，证毕.

3 离散时滞惯性流形

对任意给定的 $N\in\mathcal{N}$, $0<T<+\infty$, 我们记 $\tau_N=\frac{T}{N}$. 现在以 τ_N 为单位，将区间 $[-T,0]$ 分成 N 等份，即 $[-T,0]=\bigcup_{i=0}^{N-1}[t_{i+1},t_i]$, 其中 $t_i=-i\cdot\tau_N$. 为书写方便，对任意的 $t\in[-T,0]$, 我们定义记号 $[t]=\frac{t}{\tau_N}$的最大整数部分 $\times\,\tau_N$. 对某个给定的 $\mu\ge0$, 以 $\mathcal{G}_\mu^N$ 表示 $[-T,0]$ 上如下定义的阶梯函数空间 $\mathcal{G}_\mu^N=\{u(t)=u([t]),\forall\,t\in[-T,0],\|u\|_\mu=\sup_{t\in[-T,0]}\mathrm{e}^{\mu t}|u(t)|_E\}$. 易于验证 $\mathcal{G}_\mu^N$ 亦为一 Banach 空间. 下面的讨论就将在一定的 $\mathcal{G}_\mu^N$ 中展开.

对任意给定的 $N\in\mathcal{N}$, 作为第 2 节中定义的映射 $\mathcal{T}$ 的近似，这里我们定义 $PE\times QE\times\mathcal{G}_\mu^N$ 上的映射 $\mathcal{T}^N$: $\forall\,(y_0,z_{-T})\in PE\times QE$, $u\in\mathcal{G}_\mu^N$,

$$\mathcal{T}^N(y_0,z_{-T};u)(t)=\mathrm{e}^{-A(T+[t])}z_{-T}+\int_{-T}^{[t]}\mathrm{e}^{-A([t]-s)}Qf(u)ds+\mathrm{e}^{-A[t]}y_0-\int_{[t]}^0\mathrm{e}^{-A([t]-s)}Pf(u)ds.$$

显然，对给定的 $0<T<+\infty$, $\mu\ge0$, $\mathcal{T}^N$ 是一个从 $PE\times QE\times\mathcal{G}_\mu^N$ 到 $\mathcal{G}_\mu^N$ 的映射. 另外，假定 (2.6) 在这里也是正确的. 仿照定理 2.1 的证明我们容易得到

定理 3.1 在定理 2.1 的条件下，对任意给定的 $N\in\mathcal{N}$, $(y_0,z_{-T})\in PE\times QE$, $\mathcal{T}^N(y_0,z_{-T};\cdot)$ 存在唯一的不动点 $\psi^N(y_0,z_{-T})\in\mathcal{G}_\lambda^N$, 且 ψ^N 关于 (y_0,z_{-T}) 是连续的，满足 $\forall\,(y_0^i,z_{-T}^i)\in PE\times QE$, $i=1,2$,

$$|\psi^N(y_0^1,z_{-T}^1)(0)-\psi^N(y_0^2,z_{-T}^2)(0)|_E\le\frac{4}{3}(\mathrm{e}^{-\Lambda T}|z_{-T}^1-z_{-T}^2|_E+|y_0^1-y_0^2|_E).$$

类似于连续情形，取 $\Psi^N(y_0,z_{-T})=Q\psi^N(y_0,z_{-T})(0)$, 这里的 $\Psi^N:PE\times QE\to QE$ 就是我们所谓的离散时滞惯性流形. 下面我们来考察 $\psi^N(\Psi^N)$ 逼近 $\psi(\Psi)$ 的程度，也即 ψ^N (Ψ^N) 逼近 (2.1) 解的程度.

这里讨论的均是耗散型偏微分方程，因此，由 (2.1) 定义的半群拥有一个全局吸引子 $\mathcal{A}$. 而一般来说，$\mathcal{A}$ 是包含在一个比 E 更小的 Banach 空间中的. 一般地，对 $\mathcal{A}$ 中的任意一条轨道 $\{u(t):t\in\mathcal{R}\}$, 通常其时间导数也是一致有界的. 据此，我们假定

(H4) 存在常数 $\beta_1>0$, 对 $\mathcal{A}$ 中 (2.1) 的任意轨道 $\{u(t):t\in\mathcal{R}\}$, 有 $\left|\frac{du}{dt}\right|_E\le\beta_1,\quad\forall t\in\mathcal{R}$.

另外，引入如下定义的一个由 $\mathcal{A}$ 诱导的子集 $\mathcal{A}_T$:

$$\mathcal{A}_T=\{(Pu(t),Qu(t-T)):\forall u(t)\in\mathcal{A},\,t\in\mathcal{R}\}.$$

定理 3.2 在定理 2.1 的条件下，进一步假定 (H4) 成立. 则对任意给定的 $N\in\mathcal{N}$, 有 $\sup_{(y_0,z_{-T})\in\mathcal{A}_T}|\Psi^N(y_0,z_{-T})-\Psi(y_0,z_{-T})|_E\le C_1\lambda^{\alpha-1}\tau_N$, 其中 $C_1>0$ 是一个与 λ 和 T 无关的常数.

证明 首先，记

$$\gamma_\alpha=\int_0^{+\infty}s^{-\alpha}\mathrm{e}^{-s}ds. \tag{3.1}$$

另外对任意的 $t\in[-T,0]$, 记 $u(t)=\psi(y_0,z_{-T})(t),\quad u^N(t)=\psi^N(y_0,z_{-T})(t)$. 对任意给定的 $(y_0,z_{-T})\in\mathcal{A}_T$, 为方便起见，记 $t_i=-i\cdot\tau_N,\,i\in\{0,\dots,N\}$, 即 t_i 为等分点的情形. 注意到 T 和 T^N 的定义，我们有

$$\begin{aligned}u(t_i)-u^N(t_i)&=\psi(y_0,z_{-T})(t_i)-\psi^N(y_0,z_{-T})(t_i)\\&=\sum_{k=N}^{i+1}\int_{t_k}^{t_{k-1}}\mathrm{e}^{-A(t_i-s)}Q[f(u(s))-f(u(t_{k-1}))+f(u(t_{k-1}))-f(u^N(t_{k-1}))]ds\\&\quad-\sum_{k=0}^{i-1}\int_{t_{k+1}}^{t_k}\mathrm{e}^{-A(t_i-s)}P[f(u(s))-f(u(t_k))+f(u(t_k))-f(u^N(t_k))]ds.\end{aligned}$$

由 (H4) 可知，对任意的 $t\in[-T,0]$, 有 $|\dot u(t)|_E\le\beta_1$. 于是，利用 (H2) 和 (H4), 有

$$|f(u(s))-f(u(t_i))|_F\le M_1|u(s)-u(t_i)|_E\le M_1\beta_1\tau_N,\quad i=k-1,k.$$

从而利用 (3.1) 有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=N}^{i+1}\int_{t_k}^{t_{k-1}}\mathrm{e}^{-A(t_i-s)}Q[f(u(s))-f(u(t_{k-1}))]ds\right|_E\\&\le M_1K\beta_1\tau_N\sum_{k=N}^{i+1}\int_{t_i-t_{k-1}}^{t_i-t_k}s^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\Lambda s}ds+M_1K\beta_1\tau_N\Lambda^\alpha\sum_{k=N}^{i+1}\int_{t_i-t_{k-1}}^{t_i-t_k}\mathrm{e}^{-\Lambda s}ds\\&\le\frac{\gamma_\alpha M_1K\beta_1}{\Lambda^{1-\alpha}}\tau_N+\frac{M_1K\beta_1(1-\mathrm{e}^{-\Lambda T})}{\Lambda^{1-\alpha}}\tau_N\le\frac{(\gamma_\alpha+1)M_1K\beta_1}{\Lambda^{1-\alpha}}\tau_N.\end{aligned}\tag{3.2}$$

另外,

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\lambda t_i}\left|\sum_{k=N}^{i+1}\int_{t_k}^{t_{k-1}}\mathrm{e}^{-A(t_i-s)}Q[f(u(t_{k-1}))-f(u^N(t_{k-1}))]ds\right|_E\\&\le M_1K\max_{0\le i\le N}\mathrm{e}^{\lambda t_i}|u(t_i)-u^N(t_i)|_E\int_{-T}^{t_i}((t_i-s)^{-\alpha}+\Lambda^\alpha)\mathrm{e}^{-(\Lambda-\lambda)(t_i-s)}ds\\&\le M_1K\Big(\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\beta^\alpha\lambda^\alpha T\Big)\max_{0\le i\le N}\mathrm{e}^{\lambda t_i}|u(t_i)-u^N(t_i)|_E.\end{aligned}$$

至此，我们有

$$\mathrm{e}^{\lambda t_i}|Q(u(t_i)-u^N(t_i))|_E \le \frac{(\gamma_\alpha+1)MK\beta_1}{\Lambda^{1-\alpha}}\tau_N + M_1K\Big(\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\beta^\alpha\lambda^\alpha T\Big) \cdot \max_{0\le i\le N}\mathrm{e}^{\lambda t_i}|u(t_i)-u^N(t_i)|_E. \tag{3.3}$$

下面我们来考虑低频部分. 类似于得到 (3.2) 的方法与过程，有

$$\Big|\sum_{k=0}^{i-1}\int_{t_{k+1}}^{t_k}\mathrm{e}^{-A(t_i-s)}P[f(u(s))-f(u(t_k))]ds\Big|_E \le M_1\beta_1\lambda^\alpha\tau_N\sum_{k=0}^{i-1}\int_{t_{k+1}}^{t_k}\mathrm{e}^{-\lambda(t_i-s)}ds$$
$$= M_1\beta_1\lambda^\alpha\tau_N\int_{t_i}^{0}\mathrm{e}^{-\lambda(t_i-s)}ds \le \frac{M_1\beta_1(\mathrm{e}^{-\lambda t_i}-1)}{\lambda^{1-\alpha}}\tau_N, \tag{3.4}$$

$$\Big|\sum_{k=0}^{i-1}\mathrm{e}^{\lambda t_i}\int_{t_{k+1}}^{t_k}\mathrm{e}^{-A(t_i-s)}P[f(u(t_k))-f(u^N(t_k))]ds\Big|_E \le M_1\lambda^\alpha\sum_{k=0}^{i-1}\int_{t_{k+1}}^{t_k}\mathrm{e}^{\lambda s}|u(t_k)-u^N(t_k)|_E ds$$
$$\le M_1\lambda^\alpha T\max_{0\le i\le N}\mathrm{e}^{\lambda t_i}|u(t_i)-u^N(t_i)|_E. \tag{3.5}$$

从而对低频部分有

$$\mathrm{e}^{\lambda t_i}|P(u(t_i)-u^N(t_i))|_E \le M_1\lambda^\alpha T\max_{0\le i\le N}\mathrm{e}^{\lambda t_i}|u(t_i)-u^N(t_i)|_E + \frac{M_1\beta_1}{\lambda^{1-\alpha}}\tau_N. \tag{3.6}$$

综合 (3.3) 和 (3.6) 并利用 (2.6), 只要我们取 λ 和 T 满足定理 2.1 中的条件 (2.7), 则

$$\max_{0\le i\le N}\mathrm{e}^{\lambda t_i}|\psi(y_0,z_{-T})(t_i)-\psi^N(y_0,z_{-T})(t_i)|_E \le \frac{4}{3}\Big(\frac{M_1\beta_1}{\lambda^{1-\alpha}}+\frac{(\gamma_\alpha+1)M_1K\beta_1}{(\beta\lambda)^{1-\alpha}}\Big)\tau_N.$$

若记 $C_1=\frac{4}{3}(M_1\beta_1+M_1K\beta_1(\gamma_\alpha+1)\beta^{\alpha-1})$, 则立即可得定理的结果.

通过定理 3.2, 可以看出离散时滞惯性流形对 (2.1) 的吸引子 $\mathcal{A}$ 有良好的逼近性. 同时, 定理的结果也表明了, 当 $N\to+\infty$ 时, 离散时滞惯性流形 Ψ^N 将一致地收敛到时滞惯性流形 Ψ. 另外, 从定理证明中我们还可得, 对任意的 $t\in[-T,0]$, $|u(t)-u^N(t)|_E=|u(t)-u^N([t])|_E=|u(t)-u([t])+u([t])-u^N([t])|_E\le|u(t)-u([t])|_E+|u([t])-u^N([t])|_E\le\beta_1\tau_N+\max_{0\le i\le N}|u(t_i)-u^N(t_i)|_E$. 于是, 现在就可以得到对任意的 $t\in[-T,0]$,

$$\sup_{(y_0,z_{-T})\in\mathcal{A}_T}|\psi(y_0,z_{-T})(t)-\psi^N(y_0,z_{-T})(t)|_E\le(\beta_1+C_1\mathrm{e}^{-\lambda t}\lambda^{\alpha-1})\tau_N,\quad\forall\, t\in[-T,0].$$

4 近似时滞惯性流形族

在上一节中我们构造了一种离散的时滞惯性流形 Ψ^N, 并通过定理 3.2 显示了其对耗散系统 (2.1) 的吸引子 $\mathcal{A}$ 具有很好的逼近性质. 但上一节得到的 Ψ^N 是通过一个非线性算子 T^N 的不动点得到的, 其构造是隐式的, 换句话说, Ψ^N 是不可操作的. 本节的目的就是要克服这种不可操作性, 从而使时滞惯性流形的方法成为现实的方法.

类似于上一节的记号, 对任意的 $N\in\mathcal{N}$, $0\le i\le N$, 记 $\tau_N=\frac{T}{N}$, $t_i^N=-i\cdot\tau_N$, 并对任意的 $t\in[-T,0]$, 记 $[t]_N=\frac{t}{\tau_N}$的最大整数部分 $\times\,\tau_N$.

另外，我们定义一个从 $\mathcal{G}_\mu^{N-1}$ 到 $\mathcal{G}_\mu^N$ 的插值算子 π^N:

$$\begin{cases} \forall w \in \mathcal{G}_\mu^{N-1}, \text{ 即 } w(t) = w([t]_{N-1}), \quad t \in [-T, 0], \\ \pi^N w(t) = w([t]_N). \end{cases} \tag{4.1}$$

注意，当 $N=1$ 时，$\mathcal{G}_\mu^0 \equiv \mathcal{G}_\mu^1$, 而 π^1 则是 $\mathcal{G}_\mu^0$ 上的恒等算子.

现在，类似于 T^N 的定义，利用 π^N 如下定义一个由 $\mathcal{G}_\mu^{N-1}$ 到 $\mathcal{G}_\mu^N$ 的算子 $\hat{T}^N$:

$$\begin{cases} \forall (y_0, z_{-T}) \in PE \times QE, \quad u \in \mathcal{G}_\mu^{N-1}, \\ \hat{T}^N(y_0, z_{-T}; u)(t) = \mathrm{e}^{-A(T+[t]_N)} z_{-T} + \displaystyle\int_{-T}^{[t]_N} \mathrm{e}^{-A([t]_N - s)} \pi^N Q f(u(s)) ds \\ \qquad\qquad + \mathrm{e}^{-A[t]_N} y_0 - \displaystyle\int_{[t]_N}^0 \mathrm{e}^{-A([t]_N - s)} \pi^N P f(u(s)) ds. \end{cases} \tag{4.2}$$

利用 (4.2) 定义的算子序列 $\{\hat{T}^N\}_{N\in\mathcal{N}}$, 我们可以定义一族 "阶梯" 函数 $\{\hat{\psi}^N\}_{N\in\mathcal{N}}$:

$$\begin{cases} \forall (y_0, z_{-T}) \in PE \times QE, \\ \hat{\psi}^0(y_0, z_{-T})(t) = (y_0, z_{-T}), \quad \forall t \in [-T, 0], \\ \hat{\psi}^N(y_0, z_{-T})(t) = \hat{T}^N(y_0, z_{-T}; \hat{\psi}^{N-1})(t), \quad \forall t \in [-T, 0], \quad N \in \mathcal{N}. \end{cases} \tag{4.3}$$

若记

$$\hat{\Psi}^N(y_0, z_{-T}) = Q\hat{\psi}^N(y_0, z_{-T})(0), \quad \forall N \geq 0, \tag{4.4}$$

则 $\{\hat{\Psi}^N\}_{N\geq 0}$ 即是本节要讨论的近似时滞惯性流形族. 我们希望这样定义的近似时滞惯性流形族，随着 N 的增长，会越来越逼近第 2 节所给出的时滞惯性流形 Ψ.

本节将仍然在集合 $\mathcal{A}_T$ 展开讨论，并取 $\mu = \lambda$. 首先，我们给出 π^N 的一个性质:

引理 4.1 对任意给定的 $N \in \mathcal{N}$, 若 $w \in \mathcal{G}_\mu^{N-1}$, $v \in C([-T,0], E)$, 则对任意的 $0 \leq i \leq N$

$$|f(v(t_i^N)) - \pi^N f(w(t_i^N))|_F \leq |f(v(t_i^{N-1})) - f(w(t_i^{N-1}))|_F + |f(v(t_i^{N-1})) - f(v(t_i^N))|_F, \tag{4.5}$$

当上式右端出现 t_N^{N-1} 时，可以认为 $t_N^{N-1} = t_N^N = -T$.

证明 为了证明 (4.5), 很明显，我们仅需考虑 $i = 1, \ldots, N-1$ 时的情况就可以了. 对任意的 $1 \leq i \leq N-1$, 注意到 $w(t_i^N) = w(t_i^{N-1})$, 我们有

$$\begin{aligned} |f(v(t_i^N)) - \pi^N f(w(t_i^N))|_F &= |f(v(t_i^N)) - f(w(t_i^{N-1}))|_F \\ &\leq |f(v(t_i^{N-1})) - f(w(t_i^{N-1}))|_F + |f(v(t_i^{N-1})) - f(v(t_i^N))|_F. \end{aligned}$$

此即 (4.5).

在此基础之上，下面我们来考察 $\hat{\psi}^N$ 逼近 ψ 的程度.

引理 4.2 在定理 2.1 的条件下进一步假定 (H4) 成立，则对任意给定的整数 $N \geq 2$

$$\begin{aligned} &\sup_{(y_0, z_{-T}) \in \mathcal{A}_T} \max_{0 \leq i \leq N} \mathrm{e}^{\lambda t_i^N} |\psi(y_0, z_{-T})(t_i^N) - \hat{\psi}^N(y_0, z_{-T})(t_i^N)|_E \\ &\quad \leq \frac{1}{4} \sup_{(y_0, z_{-T}) \in \mathcal{A}_T} \max_{0 \leq i \leq N-1} \mathrm{e}^{\lambda t_i^{N-1}} |\psi(y_0, z_{-T})(t_i^{N-1}) - \hat{\psi}^{N-1}(y_0, z_{-T})(t_i^{N-1})|_E + C_2 \lambda^{\alpha-1} \tau_N. \end{aligned}$$

这里 $C_2 > 0$ 是一个与 λ 和 T 无关的常数. 而当 $N=1$ 时,

$$\sup_{(y_0, z_{-T}) \in \mathcal{A}_T} \max_{0 \leq i \leq 1} \mathrm{e}^{\lambda t_i^1} |\psi(y_0, z_{-T})(t_i^1) - \hat{\psi}^1(y_0, z_{-T})(t_i^1)|_E \leq \frac{\beta_1 T}{4}.$$

证明 首先考虑 $N \geq 2$ 的情况．为书写方便，我们对任给的正整数 L, 记

$$S(L) = \max_{0 \leq i \leq L} e^{\lambda t_i^L} |\psi(y_0, z_{-T})(t_i^L) - \hat{\psi}^L(y_0, z_{-T})(t_i^L)|_E. \tag{4.6}$$

$$I_P = P\{\psi(y_0, z_{-T})(t_i^N) - \hat{\psi}^N(y_0, z_{-T})(t_i^N)\},\ I_Q = Q\{\psi(y_0, z_{-T})(t_i^N) - \hat{\psi}^N(y_0, z_{-T})(t_i^N)\}.$$

利用 ψ 和 $\hat{\psi}^N$ 的定义，首先对 I_Q 有

$$\begin{aligned} I_Q &= Q\{\mathcal{T}(y_0, z_{-T}; \psi)(t_i^N) - \hat{\mathcal{T}}^N(y_0, z_{-T}; \hat{\psi}^{N-1})(t_i^N)\} \\ &= \sum_{k=N}^{i+1} \bigg\{ \int_{t_k^N}^{t_{k-1}^N} e^{-A(t_i^N - s)} Q\{f(\psi(y_0, z_{-T})(s)) - f(\psi(y_0, z_{-T})(t_{k-1}^N))\} ds \\ &\quad + \int_{t_k^N}^{t_{k-1}^N} e^{-A(t_i^N - s)} Q\{f(\psi(y_0, z_{-T})(t_{k-1}^N)) - \pi^N f(\hat{\psi}^{N-1}(y_0, z_{-T})(t_{k-1}^N))\} \bigg\} ds. \end{aligned} \tag{4.7}$$

同理，关于 I_P 也有

$$\begin{aligned} I_P = -\sum_{k=0}^{i-1} \bigg\{ &\int_{t_{k+1}^N}^{t_k^N} e^{-A(t_i^N - s)} P\{f(\psi(y_0, z_{-T})(s)) - f(\psi(y_0, z_{-T})(t_k^N))\} ds \\ &- \int_{t_{k+1}^N}^{t_k^N} e^{-A(t_i^N - s)} P\{f(\psi(y_0, z_{-T})(t_k^N)) - \pi^N f(\hat{\psi}^{N-1}(y_0, z_{-T})(t_k^N))\} \bigg\} ds. \end{aligned} \tag{4.8}$$

由定理 2.1 可知，对任意的 $(y_0, z_{-T}) \in \mathcal{A}_T$, $t \in [-T, 0]$, $\psi(y_0, z_{-T}(t)$ 是 (2.1) 的解，且 $\psi(y_0, z_{-T})(t) \in \mathcal{A}$. 注意到 (H2) ~(H4) 及引理 4.1, 我们有

$$\begin{aligned} e^{\lambda t_i^N} |I_Q|_E &\leq KM_1 \int_{-T}^{t_i^N} ((t_i^N - s)^{-\alpha} + \Lambda^\alpha) e^{-(\Lambda - \lambda)(t_i^N - s)} \\ &\quad \times \max_{0 \leq k \leq N} e^{\lambda t_{k-1}^N} |\psi(y_0, z_{-T})(t_{k-1}^{N-1}) - \hat{\psi}^{N-1}(y_0, z_{-T})(t_{k-1}^{N-1})|_E ds \\ &\quad + 2KM_1\beta_1\tau_N \int_{-T}^{t_i^N} ((t_i^N - s)^{-\alpha} + \Lambda^\alpha) e^{-\Lambda(t_i^N - s)} ds \\ &\leq \frac{2KM_1\beta_1(\gamma_\alpha + 1)}{\Lambda^{1-\alpha}} \tau_N + KM_1 \Big(\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \Lambda^\alpha T \Big) \\ &\quad \times \max_{0 \leq k \leq N-1} e^{\lambda t_k^{N-1}} |\psi(y_0, z_{-T})(t_k^{N-1}) - \hat{\psi}^{N-1}(y_0, z_{-T})(t_k^{N-1})|_E ds. \end{aligned}$$

注意，在上面倒数第二个不等式中会出现 $k-1=-1$ 的情况，其实此时， $t_{-1}^N = t_{-1}^{N-1} = -T$.

类似地，对 I_P 也有

$$\begin{aligned} e^{\lambda t_i^N} |I_P|_E &\leq M_1 \lambda^\alpha T \max_{0 \leq k \leq N} e^{\lambda t_k^{N-1}} |\psi(y_0, z_{-T})(t_k^{N-1}) - \hat{\psi}^{N-1}(y_0, z_{-T})(t_k^{N-1})|_E + \frac{2M_1\beta_1}{\lambda^{1-\alpha}} \tau_N \\ &\leq M_1 \lambda^\alpha T \max_{0 \leq k \leq N-1} e^{\lambda t_k^{N-1}} |\psi(y_0, z_{-T})(t_k^{N-1}) - \hat{\psi}^{N-1}(y_0, z_{-T})(t_k^{N-1})|_E + \frac{2M_1\beta_1}{\lambda^{1-\alpha}} \tau_N. \end{aligned}$$

同样，在倒数第二个不等式中会出现 $k = N$ 的情况，这时 $t_N^N = t_N^{N-1} = 0$.

综合以上估计，在定理 2.1 所给 λ 和 T 要求满足的条件下可得

$$S(N) \leq \frac{1}{4} S(N-1) + C_2 \lambda^{\alpha - 1} \tau_N,$$

此处 $C_2 = 2M_1\beta_1\left(\frac{K(\gamma_\alpha+1)}{\beta^{1-\alpha}}+1\right)$. 由此立即可得引理当 $N \geq 2$ 时的结论.

对于 $N=1$, 由 π^1, $\hat{\psi}^1$ 和 $\hat{\psi}^0$ 的定义立即可得.

引理 4.2 给了我们一个递推关系及初始状态. 于是, 按这个递推关系, 可得到相应的结论. 证毕.

定理 4.1 在定理 2.1 给定的 λ 和 T 要求满足的条件及假定 (H1)-(H4) 成立的前提下, 对任意的 $N \in \mathcal{N}$,

$$\sup_{(y_0,z_{-T})\in\mathcal{A}_T} \max_{0\leq i\leq N} e^{\lambda t_i^N} |\psi(y_0,z_{-T})(t_i^N) - \hat{\psi}^N(y_0,z_{-T})(t_i^N)|_E \leq C_2\lambda^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\tau_{N-i}}{4^i} + \frac{1}{4^N}\beta_1 T.$$

特别地,

$$\sup_{(y_0,z_{-T})\in\mathcal{A}_T} |\hat{\Psi}^N(y_0,z_{-T}) - \Psi(y_0,z_{-T})|_E \leq C_2\lambda^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\tau_{N-i}}{4^i} + \frac{1}{4^N}\beta_1 T. \tag{4.9}$$

(4.9) 式右端第二项当 N 增长时, 在很快地 (指数阶) 衰减, 但第一项的衰减却比较慢. 当然, 这种慢是人为因素造成的. 若我们取 $\tau_i = \frac{1}{2}\tau_{i-1}$, 则利用几乎与引理 4.2 同样的方法, 可以得到 (4.9) 式. 但此时, $\tau_i = \frac{T}{2^{i-1}}$. 于是有

$$\sup_{(y_0,z_{-T})\in\mathcal{A}_T} |\hat{\Psi}^N(y_0,z_{-T}) - \Psi(y_0,z_{-T})|_E \leq 4C_2\lambda^{\alpha-1}\frac{T}{2^N} + \frac{1}{4^N}\beta_1 T \leq 4C_2\lambda^{\alpha-1}\tau_N + \frac{\beta_1}{2^N}\tau_N.$$

由上式可见, (4.2)-(4.3) 构造了一种对时滞惯性流形具有高精度的算法. 当 λ 固定时, 若 N 充分大使得 $N \geq \left(\ln\frac{\beta_1}{C_2} + (1-\alpha)\ln\lambda\right)/\ln 2 + 1$, 则上式右端与 $\lambda^{\alpha-1}\tau_N$ 同阶.

参 考 文 献

[1] Foias C, Sell G R, Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations [J]. J Diff Eqs, 1988,73(2): 309–353

[2] Foias C, Manley O, Temam R. On the interaction of small eddies in two-dimensional turbulence flows [J]. Math Modeling and Numerical Analysis, M^2AN, 1988, 22(1): 93–114

[3] Marion M, Temam R. Nonlinear galerkin methods [J]. SIAM J Numer Anal, 1989, 26(5): 1139–1157

[4] Marion M, Temam R. Nonlinear glerkin mthods: The finite elements case [J]. Numer Math, 1990, 57(3): 205–226

[5] Marion M, J. Xu. Error estimates on a new nonlinear galerkin method based on two-grid finite elements [J]. SIAM J Numer Anal, 1995, 32(4): 1170–1184

[6] Li Kaitai, Hou Yanren. Fourier nonlinear galerkin method for *N-S* equations [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 1996, 2(4): 497–524

[7] Debussche A, Temam R. Inertial manifolds with delay [J]. Applied Math Letters, 1995, 8(1): 21–24

[8] Temam R. Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis [M]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1983

[9] Temam R. Navier-Stokes Equations [M]. Theory and Numerical Analysis, 2nd ed. North-Holland, Amsterdam, 1979

[10] Li Kaitai, Ma Yichen. Hilbert Space Method for Mathematical Physics Equations [M]. Vol 2, Xi'an Jiaotong University press, 1992

[11] Chow S N, Lu K. Invariant manifolds for flows in banach spaces [J]. J Diff Eqs, 1988, 73(7): 258–317

[12] Debussche A, Temam R. Convergent families of approximate inertial manifolds [J], J Math Pures Appl, 1994, 73: 489–522