抽象代数

维基百科，自由的百科全书

抽象代数亦称近世代数，是研究各种代数系结构及性质的分支学科。它是在初等代数基础上经过数系概念的推广，与实施代数运算范围的扩大，从18世纪末萌芽到20世纪30年代，逐步形成现代数学的主要分支之一。

魔方的所有可能重新排列形成一個群，叫做魔方群。群是抽象代數中的一個重要概念。

抽象代数是研究以任意对象作为元素的集合，赋予元素间的若干合成法则——即对集合中任意元素a，b有集合中惟一的元素c与之对应——称为运算，并且这些运算满足于特定的一些条件——称为公理.随着集合所赋予的运算及其所满足的公理体系的不同而形成各种不同的代数系，如群、环、域、格、模（包括向量空间）、代数等. [1]

抽象代数作为数学的一门学科，主要研究对象是代数结构，比如群、环、域、模、向量空间和代数。这些代数结构中，有的在19世纪就已经被给出了正式的定义。事实上，对抽象代数的研究是应数学更严格化的要求而发展起来的。对抽象代数的研究还使人们形成了对全部数学和自然科学的基础性逻辑假设（的复杂性）的整体认识，现今，几乎没有那一个数学分支用不到代数学的结论。此外，随着抽象代数的发展，代数学家们发现：明显不同的逻辑结构通过类比可以得到一个很简练的由公理构成的核心。这对深入研究代数的数学家是有益的，并赋予他们更大的本领。

“抽象代数”这词，是为了与“初等代数”区别开，后者教授公式和代数表达式的运算方法，其中有实数、复数和未知项。20世纪初，抽象代数有时也称为**现代代数**，**近世代数**。

在泛代数中有时用**抽象代数**这一称呼，但作者大多简单的称作“代数”。

目录

历史及发展

代数系的起源较早，在挪威数学家阿贝尔（Abel, N.H.）证明五次以上方程不能用根式求解的进程中就孕育着群的概念；1830年，年仅19岁的伽罗瓦（Galois, E.）彻底解决了代数方程的根式求解问题，从而引进数域的扩张、置换群、可解群等概念；后来，凯莱（Cayley, A.）在1854年的文章中给出有限抽象群；戴德金（Dedekind, J.W.R.）于1858年在代数数域中又引入有限交换群和有限群；克莱因（Klein, C.F.）于1872年建立了埃尔朗根纲领，这些都是抽象群产生的主要源泉。然而抽象群的公理系统直到

1882年凯莱与韦伯（Weber, H.）在Math.Annalen的同一期分别给出有限群的公理定义，1893年韦伯又给出无限抽象群的定义。由于李（Lie, M.S.）对连续群和弗罗贝尼乌斯（Frobenius, F.G.）对群表示的系统研究，对群论发展产生了深刻的影响。同时，李在研究偏微分方程组解的分类时引入李代数的概念，然而，它的发展却是19世纪末和20世纪初，由基灵（Killing, W.K.J.）、外尔（Weyl, (C.H.)H.）和嘉当（Cartan, É.(-J.)）等人的卓越工作才建立了系统理论。

域这个名词虽是戴德金较早引入的，但域的公理系统却是迪克森（Dickson, L.E.）与亨廷顿（Huntington, E.V.）于19世纪初才独立给出。而域的系统发展是从1910年，施泰尼茨（Steinitz, E.）的著名论文“域的代数理论”开始的。同期，布尔（Boole, G.）研究人的思维规律，于1854年出版《思维规律的研究》，建立了逻辑代数，即布尔代数。但格论是在1933～1938年，经伯克霍夫、坎托罗维奇（Канторович.П.В.）、奥尔（Ore, O.）等人的工作才确立了在代数学中的地位。另一方面，1843年，哈密顿（Hamilton, W.R.）引进四元数并奠定了向量代数和向量分析的基础，而四元数系又构成实数域上有限维可除代数。凯莱与西尔维斯特（Sylvester, J.J.）一起建立了代数型的理论，奠定了代数不变量的矩阵理论。凯莱又是矩阵代数的创始人，他建立了八元数与非结合代数，同时，克利福德（Clifford, W.K.）将八元数（复四元数）及外代数推广到一般克利福德代数，并将其成功地应用于非欧几里得空间中运动的研究。

19世纪和20世纪之交，库默尔（Ernst Kummer）（Kummer, E.E.）引入对代数数论有重要影响的理想数概念，他于1844年指出整环未必有惟一分解性质.戴德金将库默尔理想数推广并引出现代理想的概念，建立了代数数域的理论和代数整数环上理想的惟一分解定理。特别是1894年，嘉当（Cartan, E.J.）关于复单李代数的完全分类以及1907年，韦德伯恩（Wedderburn, J.H.M.）发展了嘉当关于实数域和复数域上线性结合代数的结构定理，从而创立了一般域上结合代数的结构定理，极大地发展了抽象代数的理论。在此期间，群以及与其紧密相关的不变量概念在分析、几何、力学和理论物理中都发挥了重大影响，而这些学科的发展反过来又促进了代数的发展。如诺特（Noether, M.）研究代数簇在双有理变换下的不变性质和关于曲面的著名定理，便导致多项式环理想理论的建立。因此，深入研究代数的相关概念，以及从各种具体对象抽象出共同特性来进行公理化的研究，就导致抽象代数的进一步演变，促进了相对独立的学科，如群、域、线性代数、代数数论、环论等向纵深和综合两方面发展.德国代数学派在这方面起了领导作用，戴德金、希尔伯特（Hilbert, D.）和韦伯以及施泰尼茨等对代数学抽象公理化的研究有很大贡献，其中突出的成就是布饶尔（Brauer, R.(D.)）、哈塞（Hasse, H.）、诺特（Noether，A.E.）、阿尔贝特（Albert, A.A.）关于有限维结合代数的理论，它阐明了有理数域上单代数都是其中心F上的循环代数.特别是诺特于1920年引入左（右）模的概念，并研究了模在有限群表示论中的作用，以及模与代数结构理论之间的联系，使模成为数学的重要工具，从而又推动了环论的发展。1921年，她写的“整环的理想理论”建立了交换诺特环理论，证明了准素分解定理，成为交换代数的里程碑。1926年，她又给出戴德金环的公理刻画，因此，诺特是抽象代数的奠基人之一。她和阿廷（Artin, E.）以及他们的学生（包括中国数学家曾炯）为中心，在20世纪20—30年代，对域论、类域论、代数的理想理论到阿廷环的推广取得辉煌成就。其中，阿廷在1927年将代数结构定理推广到极小条件环上，就是著名的韦德伯恩-阿廷定理，成为环论发展的一个新里程碑；同时，克鲁尔（Krull, W.）创立了局部环的理想理论，范·德·瓦尔登（van der Waerden, B.L.）等人发展并简化了单纯代数的结构和环的理想理论.20世纪30年代初，范·德·瓦尔登的《近世代数学》综合总结了从伽罗瓦起100年来抽象代数各方面的工作，是抽象代数的一个里程碑。由于抽象代数的理论和方法已渗透到数学的各个学科和其他领域（如理论物理、晶体学），这就反过来推动抽象代数在深度和广度上更加迅速发展，范·德·瓦尔登的书只能是现代数学工作者的基础了。抽象代数的各分支学科之间，以及与其他学科之间的相互渗透，不仅促进这些学科的进一步发展，也促进了新学科的形成。比如，同期，范·德·瓦尔登与扎里斯基（Zariski, O.）首先将交换代数的方法引进代数几何；在20世纪40年代，韦伊（Weil, A.）又用抽象代数的方法建立了一般域上代数几何的理论.又如，域上多重线性代数的概念和理论推广到交换环上形成环上多重线性代数。

从20世纪40年代初开始，抽象代数进入一个新的阶段。1945年，雅各布森（Jacobson, N.）引入根及本原环的理论，成为环论发展的新阶段.另一方面，作为线性代数推广的模论得到进一步发展并产生深刻影响。在20世纪20—30年代出现了以生成元及其定义关系所定义的无限群，经霍尔（Hall, P.）、马尔采夫（М а л ь ц е в, А.И.）等人的精彩工作，到20世纪40年代已形成独立体系。1962年，费特（Feit, W.）与汤普森（Thompson, J.G.）关于奇数阶群必为可解群的定理，是对有限单群分类的重大突破。从伽罗瓦引入置换群，其后证明An（n≥5）是单群到1981年有限单群分类的完全解决，经历了约150年之久。同期，李代数也得到深入发展，不仅推广到一般域，而且无限维李代数从20世纪60年代崛起，作为复单李代数推广的卡茨-穆迪代数就是卡茨（Kac, V.）与穆迪（Moody, R.）于1968年彼此独立建立的。它与理论物理有密切关系.而李群的深入发展派生出代数群，即群是代数闭域上仿射簇。代数群及其表示理论与多重线性代数、交换环论、代数几何、李代数等都有十分密切的联系，近年来已成为抽象代数的活跃分支.

在抽象代数中同态和同构起主要作用，它不考虑代数系的特殊结构，而是用统一方法去研究，这种作为各代数结构的比较性研究，首先是把群论、环论和格论中一些共同的概念和平行的结果推广到代数系上去，这就产生了泛代数，20世纪30年代末提出的伯克霍夫定理，是它独立发展的起点。泛代数（不限于二元运算）是以各种不同的代数系之间的共性为主要研究对象的学科，它对模型论、自动机理论和程序语言的语义学都有应用。

将同一种代数以及它们之间的同态映射合起来考虑，就会发现这与数学其他分支研究的对象以及对象间的联系（如拓扑空间及连续映射，集合及映射，环及同态等）有许多本质上的共性.1945年，由艾仑伯格（Eilenberg, S.）、麦克莱恩（Maclane, S.）通过研究对偶空间的自然变换建立的范畴论，正好讨论了这些共性。范畴是比集合更高层次的公共语言，这种语言和它的理论已渗透到代数几何（由格罗腾迪克（Grothendieck, A.）和迪厄多内（Dieudonné, J.）于1960年引入）和代数的以及数学的许多分支（如戈德门特（Godement, R.），埃雷斯曼（Ehresmann, C.）于1958年分别引入拓扑学和微分几何），并在其中起着重要作用.

由美国和欧洲数学家在20世纪40年代，几乎同时彼此独立发展起来同调代数，它是以代数拓扑为背景，以模为主要研究对象的学科，通过两类重要的函子与Hom及由它们导出的函子Tor，Ext得出刻画环的许多深刻结果.由于代数拓扑中赫维茨（Hurewicz, W.）问题的解决，导致1945年艾伦伯格和麦克莱恩定义了群的（系数在任意域上）上同调群.同时，赫希施尔德（Hochschild, G.）引进了结合代数的上同调群，谢瓦莱（Chevalley, C.）等人又发展了李代数的上同调群。同调代数在数论、群论、代数拓扑、代数几何中都有重要作用。当考虑李群或者作为它的推广的H空间的同调以及上同调时，就得到霍普夫代数.它的研究是由霍普夫（Hopf, H.）于1941年开始的，博雷尔（Borel, A.）于1953年推广其基本结构定理。霍普夫代数的理论是代数拓扑的常用工具，它在物理学中的模型是量子群。

20世纪60年代起蓬勃发展的代数K理论，它同拓扑K理论一样是源于格罗腾迪克于1957年的广义黎曼-罗赫定理的工作。人们企图推广线性代数中某些部分如维数理论到环的模上而发展成为由环范畴到阿贝尔范畴的一系列函子，代数K理论就是研究这些函子（如K0、K1、K2等）的理论，它不仅对刻画环的性质起重要作用，而且在代数几何等其他学科中也有着值得重视的作用。用模、范畴、同调代数的语言和理论来刻画和研究环，从而使环论的发展推向更新的阶段。

应该指出，20世纪50年代，塞尔（Serre, J.P.）把代数簇理论建立在层的概念上，并建立了凝聚层的上同调，这为格罗腾迪克建立概型理论奠定了基础，从而使代数几何的研究进入一个新阶段。概型理论也为代数数论提供了新的理论和方法.代数几何与数学许多分支密切相关，互相促进。如代数几何中的超越方法与偏微分方程、微分方程、微分几何、拓扑学紧密相关，代数几何在控制论与现代粒子物理中也有

广泛应用。

抽象代数学的这些理论发展的同时，由于电子技术的发展和电子计算机的广泛应用，抽象代数学的一些成果和方法可直接应用到工程技术中，如代数编码学、语言代数学、代数自动机理论等新的应用代数学的领域相继产生和发展。同时它又是离散数学的重要组成部分，并对组合数学的突起和蓬勃发展产生重大影响。这些新的应用推动了近代应用代数学的形成、发展与完善。[1]

例子

有一个二元运算的代数结构的例子有：

- 广群，
- 拟群，
- 幺半群，半群，及最重要的群。

更复杂的例子有：

- 环和體，
- 模和向量空间，
- 结合代数和李代数，
- 格和布尔代数。

在泛代数中，类似的代数结构的定义和结果都收集起来。上述各类对象，连同赋予恰当意思的同态，便构成各个范畴。很多时候范畴论提供了适当的形式语言，令各种代数结构间可以对译和比较。

参考文献

1. ^ **1.0** **1.1** 《数学辞海（第二卷）》 山西教育出版社 中国科学技术出版社 东南大学出版社

参见

- 拓扑学
- 离散数学

取自“http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=抽象代数&oldid=32209314”
