第8章 势流

理想、均质不可压、定常

平面势流

- 基础知识

理想、不可压、定常流动的数学描述，流线，无旋，全微分，有势

概述

势流

平面势流

→ **势流伯努利方程、流函数、速度势函数、流网、柯西-黎曼条件**

基本平面势流及其叠加

柱体绕流

无旋流动 $\vec{\omega}=0$

potential flow or irrotational flow

三维流动

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

- **有旋与否与流体微团的运动轨迹无关；**
- **无旋的运动学特征**

8.2 平面势流——平面流动1

平面流动 *plane flow*

- **任意时刻，流场中各流体质点的速度都平行于某固定平面；**

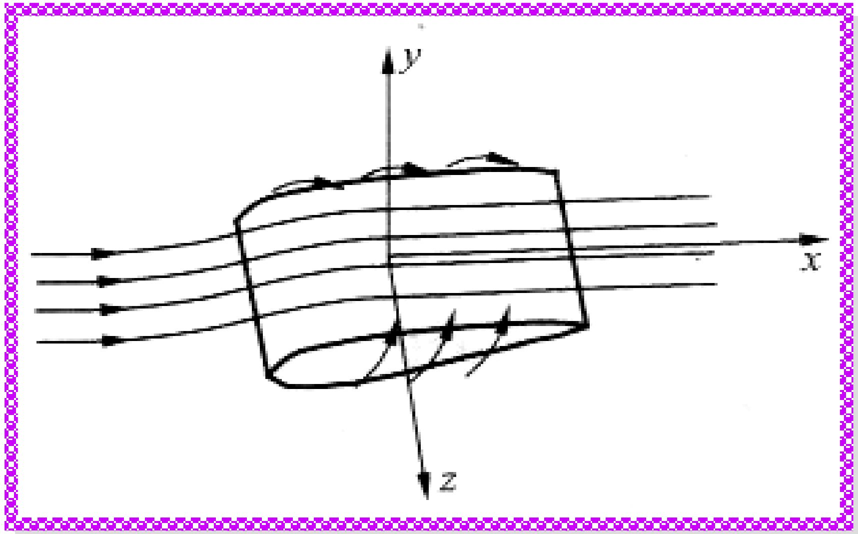
$u_z = 0$ 或者，$w = 0$

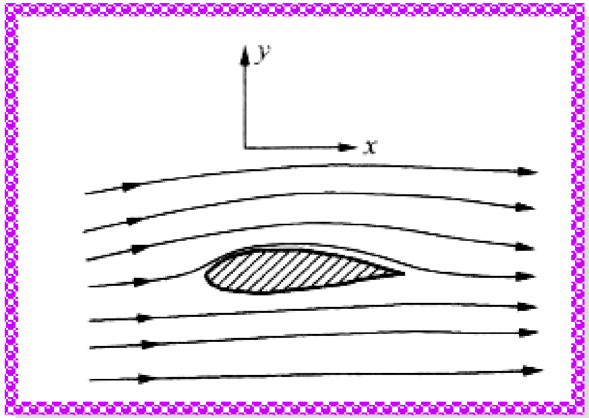
- **各物理量在此平面的垂直方向上没有变化.**

$\frac{\partial}{\partial z} = 0$ 二元流动

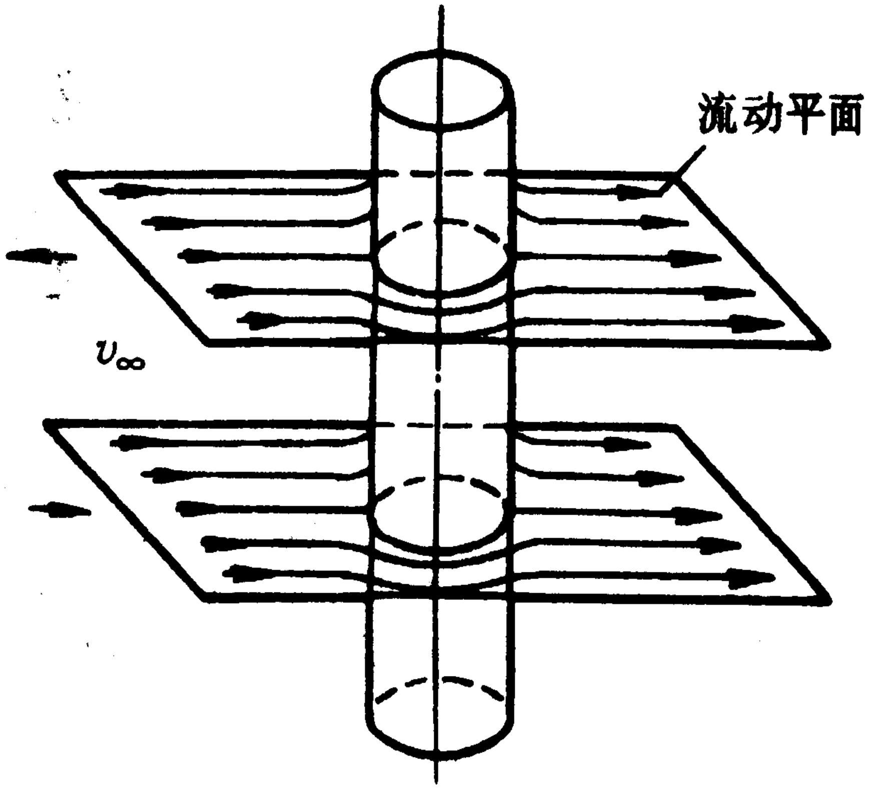
T、p 等只是两个坐标的函数

平面流动2





绕无限长机翼的二维流动



绕无穷长圆柱的流动

无旋流动 $\Rightarrow$ $\vec{\omega}=0$

三维流动 $\Rightarrow$

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}}-\cancel{\frac{\partial v}{\partial z}}\right)=0$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}-\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}\right)=0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

$\xrightarrow[\text{无旋流动}]{\text{平面流动}}$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\equiv 0$$

平面无旋流动（平面势流） $\Rightarrow$ $\omega_z\equiv 0$ **或** $\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\equiv 0$

平面势流基本控制方程

理想、均质不可压、定常、平面势流

$$\mu = 0 \quad , \quad \rho = const$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad , \quad \omega_z \equiv 0$$

二维欧拉运动方程

无旋

积分

平面势流伯努利方程

p

连续方程

无旋条件

流函数
速度势函数
拉普拉斯方程

$\vec{V}$

理想不可压缩流体平面无旋流动

平面势流——控制方程组1

连续方程 → 不可压、平面流动

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

运动方程 → 不可压、平面（忽略质量力）理想、定常流动

欧拉方程 →

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

控制方程组2

势流伯努利方程 ⟸ $\vec{\omega}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$

⟹ 不可压、平面、理想、定常势流

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=C$$

或

$$p+\frac{1}{2}\rho V^2=C'$$

⟹ 机械能在整个流场处处守恒

控制方程组3

势流伯努利方程适用条件

- 理想不可压流体
- 定常平面流动
- 无旋流动
- 适用于整个流场
- 无其它能量输入输出

流函数1　stream function

设 G 为一平面单连域，函数 $P(x,y)$， $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导，则

$$\boxed{Pdx+Qdy}$$

为某一函数 $W(x,y)$ 的全微分的充要条件是

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}}$$

连续方程 (不可压) $\Longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0}$

流函数2

流函数

stream function

$$d\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy=(-v)dx+udy$$

直角坐标系

$$u=\frac{\partial\Psi}{\partial y}\text{，}v=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

圆柱坐标系

不可压、平面定常

连续方程

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}+\frac{\partial(V_\theta)}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}=\frac{\partial(-V_\theta)}{\partial\theta}$$

流函数3

流函数 ⟹

$$d\Psi = (-V_\theta)dr + rV_r d\theta$$

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r}dr + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}d\theta$$

极坐标系 ⟹

$$\boxed{V_r = \frac{\partial \Psi}{r\partial \theta}\ ,\ V_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}}$$

不可压缩平面流动满足连续方程，必然存在流函数，无论是否为势流

流函数的基本性质1

标量函数（流函数、速度势函数） ⟹ 矢量场

- **流函数可以相差一个任意常数而不影响其对流场的描述（不影响速度分布）**

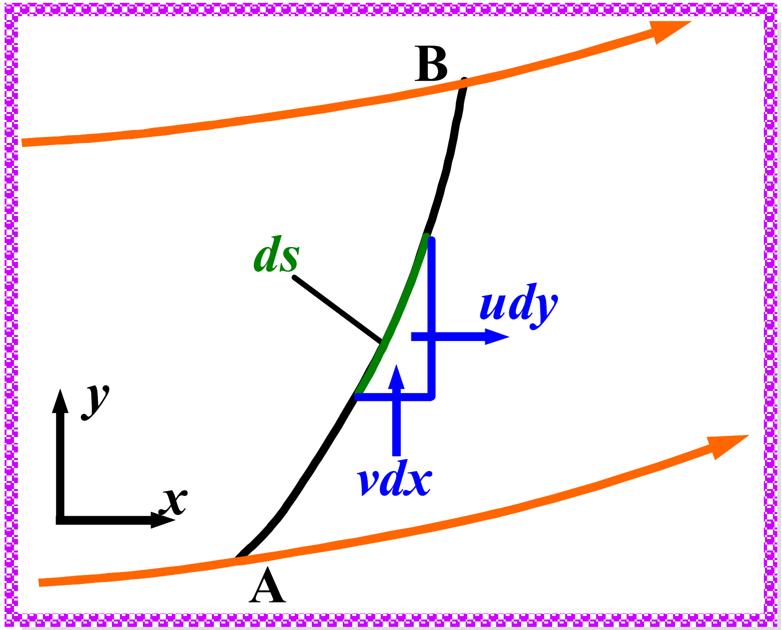
等流函数线 ⟹ $\Psi = \text{const}$ ***streamline***

⟹ $d\Psi = 0$ ⟹ $\dfrac{dx}{u} = \dfrac{dy}{v}$

- **等流函数线就是二元流线**

流函数与流量的关系

$$Q_{AB} = \Psi_B - \Psi_A$$



- **流经任意曲线的流量等于曲线两端点流函数之差，与曲线形状无关**

- 通过两流线间任意单位厚度曲线的体积流量等于两条流线上的流函数之差，与该曲线形状无关

若曲线本身为流线 ⇒ $Q_{AB} = 0$

流函数满足拉普拉斯方程的条件

势流 $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0}$ $\quad u=\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}\ ,\ v=-\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=0}$ ***Laplace's equation***

势流条件下，流函数满足拉普拉斯方程

- 齐次线性方程，简化求解，允许解线性叠加
- 判断某函数是否可表示流函数
- 判断某不可压平面流动是否为无旋流动

设 G 为一平面单连域，函数 $P(x\,,y)$， $Q(x\,,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导，则

$$\boxed{Pdx + Qdy}$$

为某一函数 $W(x\,,y)$ 的全微分的充要条件是

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

无旋流动 $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0}$

速度势函数2

速度势函数 $\Rightarrow$ $d\Phi = udx + vdy$

velocity potential function

直角坐标系 $\Rightarrow$ $u = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\ ,\ v = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$ $\qquad \vec{V} = \nabla \Phi$

极坐标系 $\Rightarrow$ $V_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\ ,\ V_\theta = \dfrac{\partial \Phi}{r\partial \theta}$

二元无旋流动一定存在速度势函数，无论是否为不可压缩流动

速度势函数3—— 三元无旋流动

设 G 为一平面单连域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$，$R(x,y)$,在 G 内具有一阶连续偏导，则

$$Pdx+Qdy+Rdz=dW$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}\equiv\frac{\partial R}{\partial y}\qquad \frac{\partial R}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial z}$$

无旋流动 ⇒

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

⇒

$$\frac{\partial u}{\partial y}\equiv\frac{\partial v}{\partial x}\qquad \frac{\partial v}{\partial z}\equiv\frac{\partial w}{\partial y}\qquad \frac{\partial w}{\partial x}\equiv\frac{\partial u}{\partial z}$$

速度势函数

$$d\Phi = u dx + v dy + w dz$$

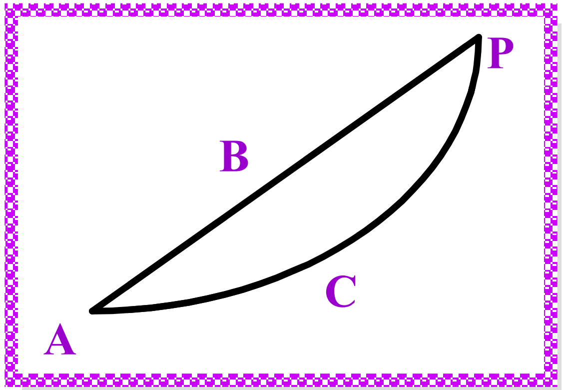
三元无旋流动也一定存在速度势函数

无旋流动一定存在速度势函数，无论是否为不可压缩流动

速度势函数性质1

- 速度势函数可以相差一个任意常数，而不影响其对流场的描述（不影响速度分布）

$$\vec{\Gamma}=\oint_L \vec{V}\cdot d\vec{l}=0$$ *circulation*



无旋

$$\boxed{\int_A^P \vec{V}\cdot d\vec{l}=\Phi_P-\Phi_A}=\int_{ABP}\vec{V}\cdot d\vec{l}=\int_{ACP}\vec{V}\cdot d\vec{l}$$

- 速度沿曲线的线积分与路径无关 → 速度场有势

速度势函数性质2

等势函数线 *equipotential line*

$$\Phi = \text{const}$$

$$d\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad udx + vdy = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi} = -\frac{u}{v}$$

等流函数线

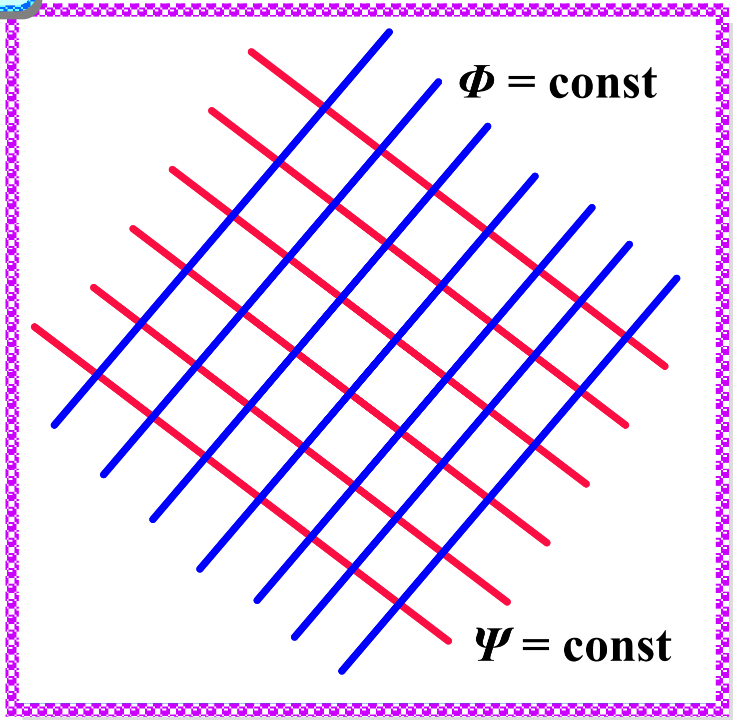
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi} = \frac{v}{u}$$

流网1 *flow net*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi}=-\frac{u}{v}\cdot\frac{v}{u}=-1$$

流线与等势函数线相互垂直

采用相等的增量Δ*Φ*、Δ*Ψ* 绘制等势线和流线，则等势线或流线较密的地方对应的速度如何?

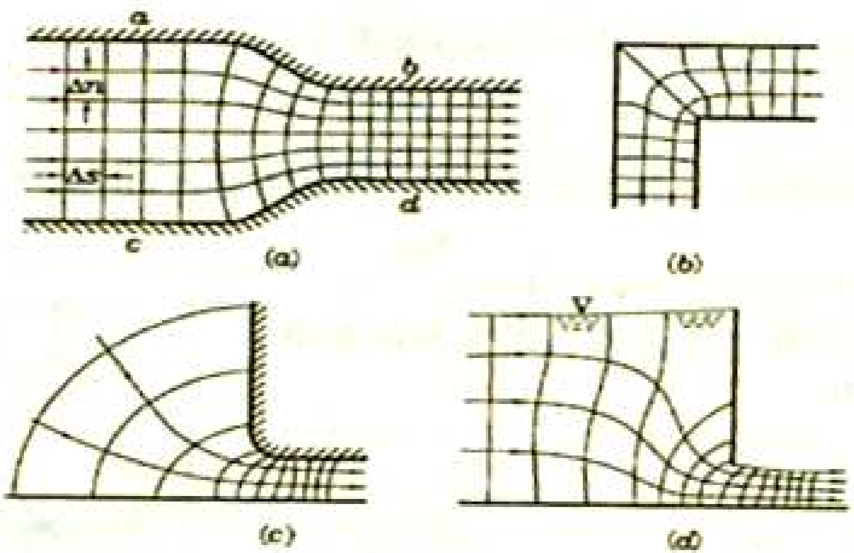


流网2

采用相等的增量$\Delta\Phi$， $\Delta\Psi$，则等势线或流线较密的地方，对应的速度如何？

$$V=\frac{\partial\Psi}{\partial n}$$

$$V=\frac{\partial\Phi}{\partial s}$$



流线和等势线越密的地方，对应的流场速度越大

势函数满足拉普拉斯方程的条件

- 不可压缩 ⟹ $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

⟹ $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0$$ *Laplace's equation*

不可压缩流体速度势函数满足拉普拉斯方程

- 齐次线性方程，简化求解，允许解线性叠加
- 判断某函数是否可表示速度势函数
- 判断某无旋流动流体是否不可压

不可压缩平面势流流函数和势函数关系

柯西—黎曼条件 *Cauchy-Riemann equations*

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v=\frac{\partial \Phi}{\partial y}=-\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

共轭调和函数

conjugate harmonic function

复势函数

$$F(z)=\Phi(x,y)+i\Psi(x,y)$$

complex velocity potential

流函数、速度势函数的求解1

已知一速度场$u = x - 4y$，$v = -4x - y$，该速度可否表示不可压缩流体平面流动？若可以求流函数。流动是否为势流？若是，求速度势函数。

解：(1) 判断是否为不可压缩流体平面流动

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

由 $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$ ⇒ 不可压缩流体

流函数、速度势函数的求解2

(2) 流函数的求解

$$u = x - 4y = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad v = -4x - y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \Psi = \int \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \Psi = \underline{\underline{2x^2 + xy - 2y^2}}$$

不能采用对 u 和 v 同时积分的方法求流函数

流函数、速度势函数的求解3

(3) 判断流动是否为势流

- **由速度场求旋度，看其是否为零**

$$\Omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(-4x-y)-\frac{\partial}{\partial y}(x-4y)=0$$

- **流函数是否满足拉普拉斯方程**

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2x^2+xy-2y^2\right)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(2x^2+xy-2y^2\right)$$

$$\Rightarrow\quad\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=0$$

(4) 速度势函数的求解

$$u = x - 4y = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad v = -4x - y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi = \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi = \frac{1}{2}x^2 - 4xy - \frac{1}{2}y^2$$

势流伯努利方程的应用1

设气体二元不可压定常势流，势函数为 $\Phi = x^2 - y^2$。求：(1) (2，1.5)处速度；(2) (2，1.5)处压强。设驻点压强$p_0 = 101\text{kPa}$，$\rho = 1.19\ \text{kg/m}^3$。

解：(1) 速度

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x = 2\times 2 = \underline{\underline{4}} \quad (\text{m/s})$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2y = -2\times 1.5 = \underline{\underline{-3}} \quad (\text{m/s})$$

(2) 压强

对驻点和 (2 , 1.5) 点列势流伯努利方程

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$\Rightarrow \quad p = p_0 - \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$= 1.01 \times 10^5 - \frac{1}{2} \times 1.19 \times (3^2 + 4^2)$$

$$= \underline{1.00 \times 10^5} \quad (\text{Pa})$$

小结1

流函数和速度势函数存在条件

- **流函数** → 平面不可压缩
- **速度势函数** → 势流

满足拉普拉斯方程的条件

- **流函数** → 势流
- **速度势函数** → 不可压缩

小结2

柯西—黎曼条件 *Cauchy-Riemann equations*

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v=\frac{\partial \Phi}{\partial y}=-\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

共轭调和函数

conjugate harmonic function

复势函数

$$F(z)=\Phi(x,y)+i\Psi(x,y)$$

complex velocity potential

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=0$$

拉普拉斯方程解的可叠加性

设 Φ_1 (Ψ_1)， Φ_2 (Ψ_2) 是拉普拉斯方程的解，则

$$\Phi = K_1\Phi_1 + K_2\Phi_2 + \cdots$$
$$\Psi = K_1\Psi_1 + K_2\Psi_2 + \cdots$$

也是拉普拉斯方程的解

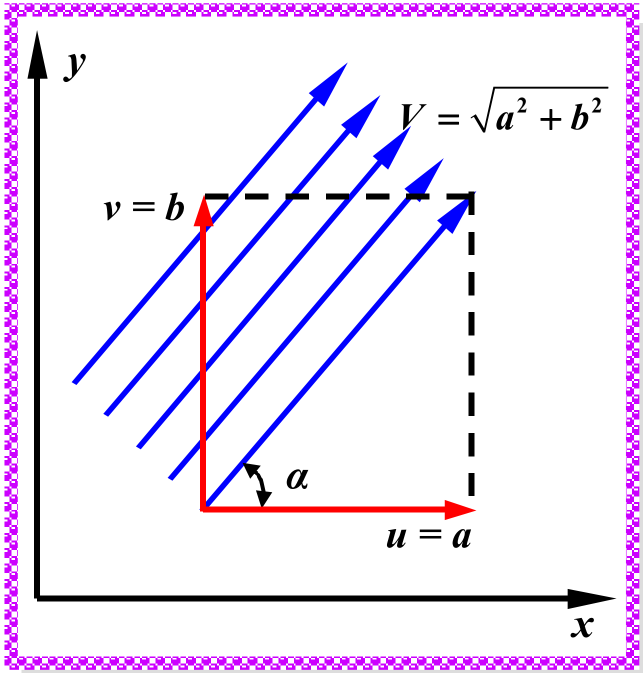
均直直线流动1 *uniform flow*

速度势函数

$$\Phi = ax + by$$

速度分布

$$u = a \ , \ v = b$$



$$V = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

速度大小、方向均不变

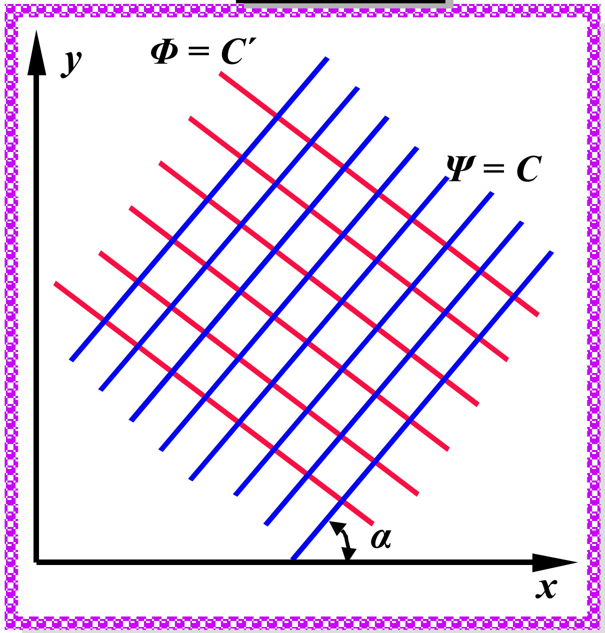
均直直线流动2

流函数

$$\Psi = \int \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + f(x)$$

$$\boxed{\Psi = -bx + ay}$$

流网



x 方向均直流 $\xrightarrow{u = U \ , \ v = 0}$

$$\Phi = Ux = Ur\cos\theta$$

$$\Psi = Uy = Ur\sin\theta$$

压强分布

由伯努利方程，压强也处处相同

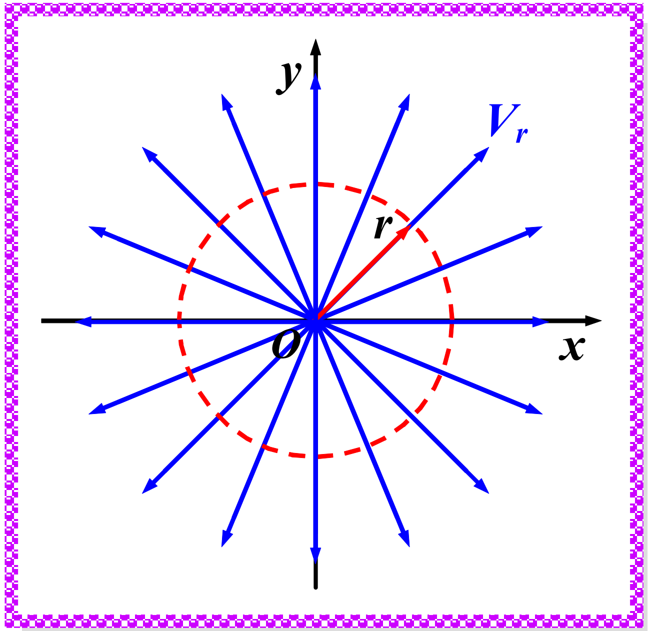
点源和点汇1 *line source / sink at the origin*

速度分布

$$V_r = \frac{m}{2\pi r}, \quad V_\theta = 0$$

$$V_{r(r\to\infty)} = 0, \quad V_{r(r=0)} \to \infty$$

只有径向速度，点源 (汇) 处速度无穷大，方向不定



点源 / 汇
位于原点

速度势函数

$$V_r = \frac{m}{2\pi r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

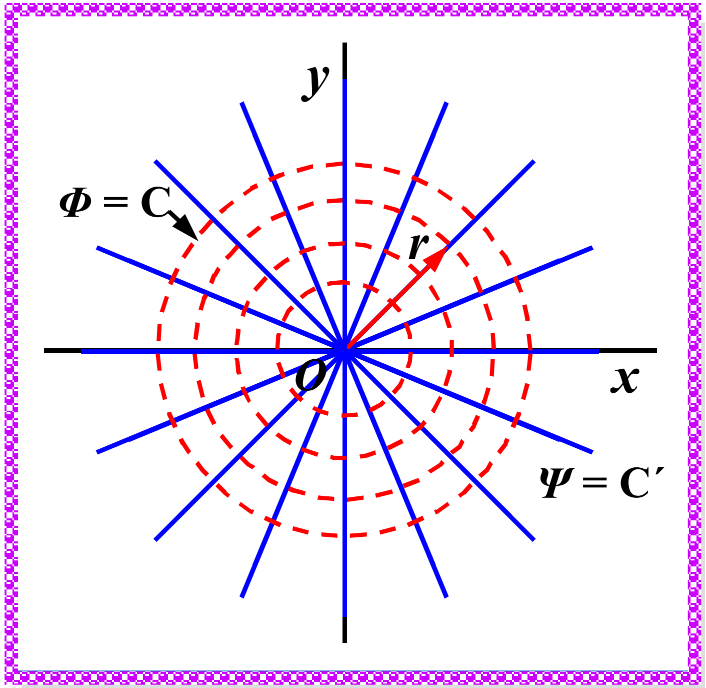
$$\Phi = \frac{m}{2\pi} \ln r$$

流函数

$$\Psi = \int \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr + f(\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi = \frac{m}{2\pi}\theta}$$

流网



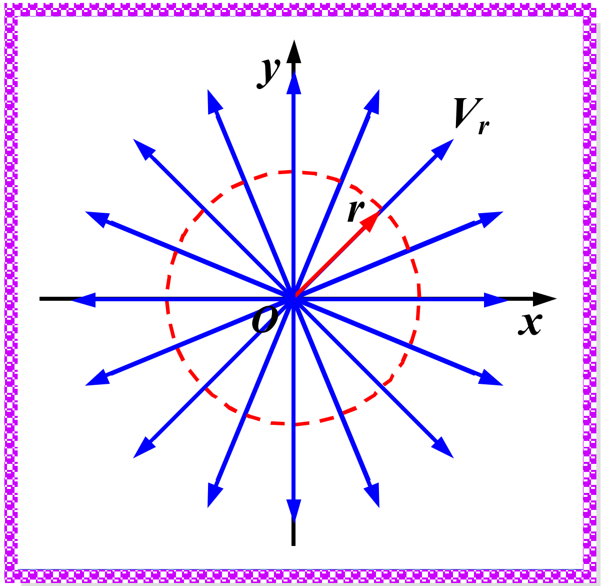
流线为过点源 (汇) 的径向射线，等势线为圆心在点源 (汇) 的同心圆族

点源和点汇3

m 的物理意义 → **点源 (点汇) 强度**

source / sink strength

→ $m = Q$



通过任一包围点源（汇）的封闭周线的流体体积流量

$m = +Q$ → 点源　　$m = -Q$ → 点汇

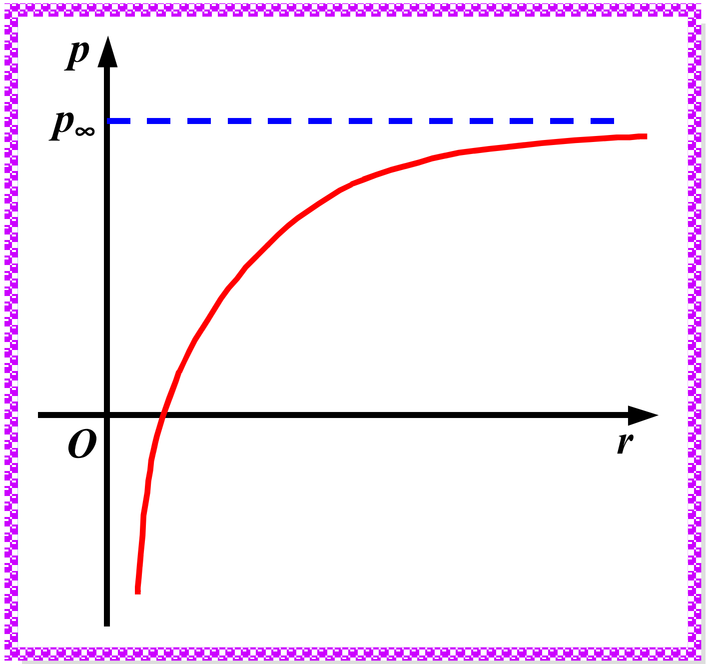
压强分布

伯努利方程

$$p_{(r\to\infty)} = p_\infty$$

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = C$$

$$\Rightarrow \quad p = p_\infty - \frac{\rho Q^2}{8\pi^2 r^2}$$



点源 (汇) 所在位置速度无穷大
压强负无穷大，物理上不存在 ⇒ 奇点

点源和点汇5

速度势函数	流函数	速度分布
$\Phi = \pm \dfrac{Q}{2\pi} \ln r$	$\Psi = \pm \dfrac{Q}{2\pi} \theta$	$V_r = \pm \dfrac{Q}{2\pi r}$
等势线	圆心在点源 (汇) 的同心圆族	
流线	过点源 (汇) 的径向射线	

点源 (汇) 所在处速度无穷大，方向不定，压强负无穷大，实际中不存在，奇点

点涡1 line irrotational vortex at the origin

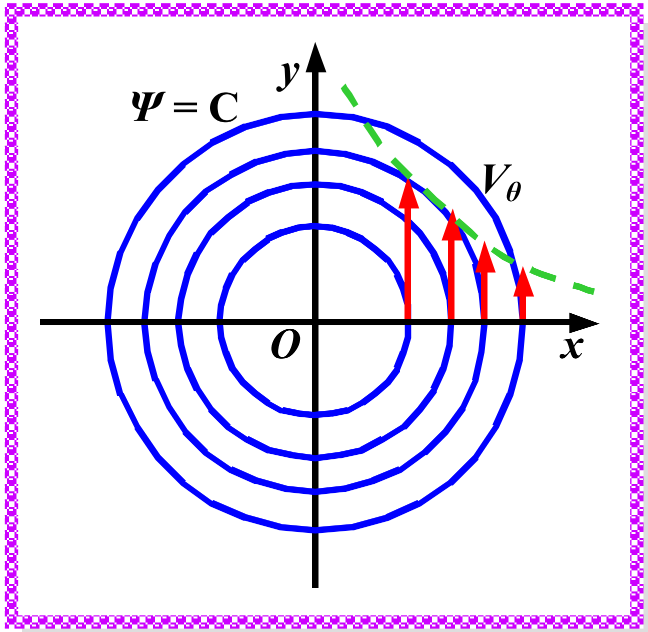
速度分布

$$V_{\theta(r\to\infty)}=0$$
$$V_{\theta(r=0)}\to\infty$$

$$V_r=0$$
$$V_\theta=\frac{K}{r}$$

只有切向速度，点涡处速度无穷大，方向不定

点涡位于原点



速度势函数

$$V_\theta=\frac{K}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

$$\Phi=K\theta$$

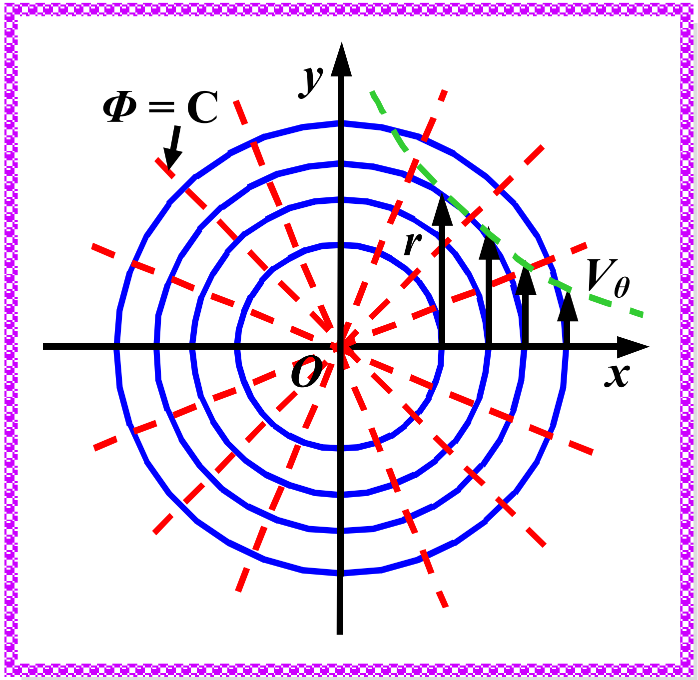
点涡2

流函数

$$\Psi = \int \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr + f(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Psi = -K \ln r}$$

流网



流线为圆心在点涡所在位置的同心圆族，
等势线为过点涡的径向射线

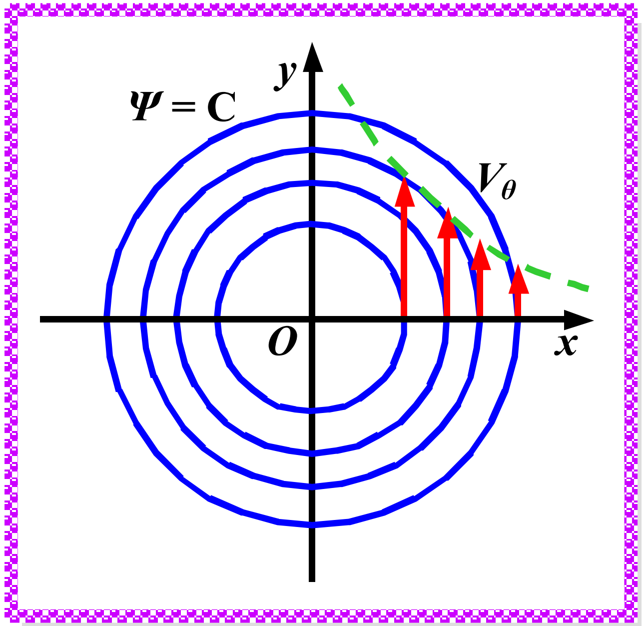
点涡3

速度环量

沿任一包围点涡的封闭周线上的速度环量 (*circulation*)

$$\Gamma = 2\pi K$$

点涡强度 *vortex strength*



$$K = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$ 逆时针

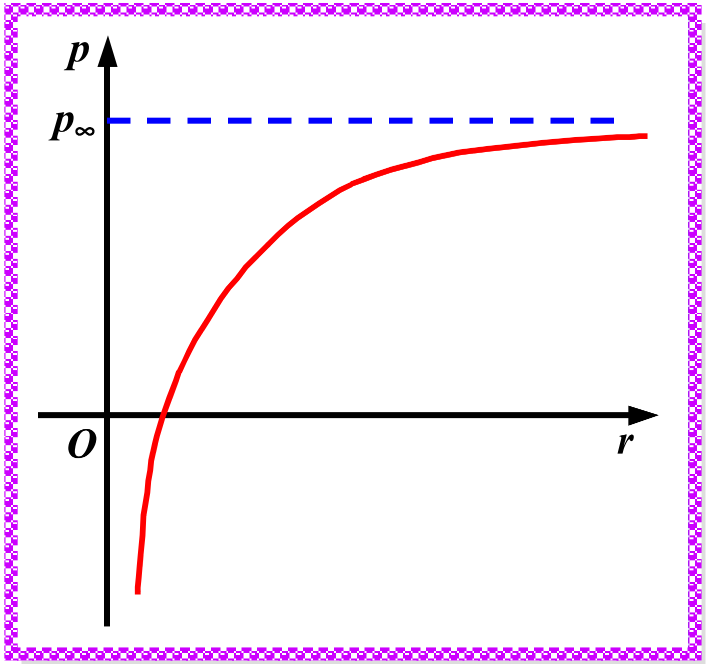
$$K = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$ 顺时针

压强分布

- **伯努利方程** $\boxed{p_{(r\to\infty)} = p_\infty}$

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = C$$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_\infty - \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 r^2}}$$



点涡所在处速度无穷大压强负无穷大，物理上不存在 $\Rightarrow$ 奇点

点涡5

速度势函数	流函数	速度分布
$\Phi = \pm \dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta$	$\Psi = \mp \dfrac{\Gamma}{2\pi}\ln r$	$V_\theta = \pm \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$
等势线	过点涡的径向射线	
流线	圆心在点涡的同心圆族	

点涡所在处速度无穷大，方向不定，压强负无穷大，实际中不存在，奇点

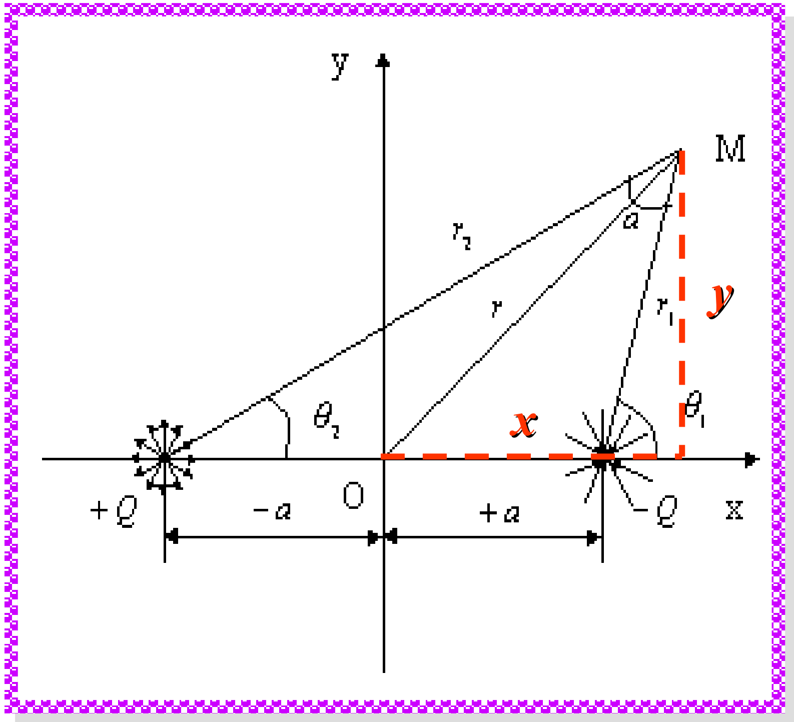
点源与点汇的合成

流函数

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1)$$

速度势函数

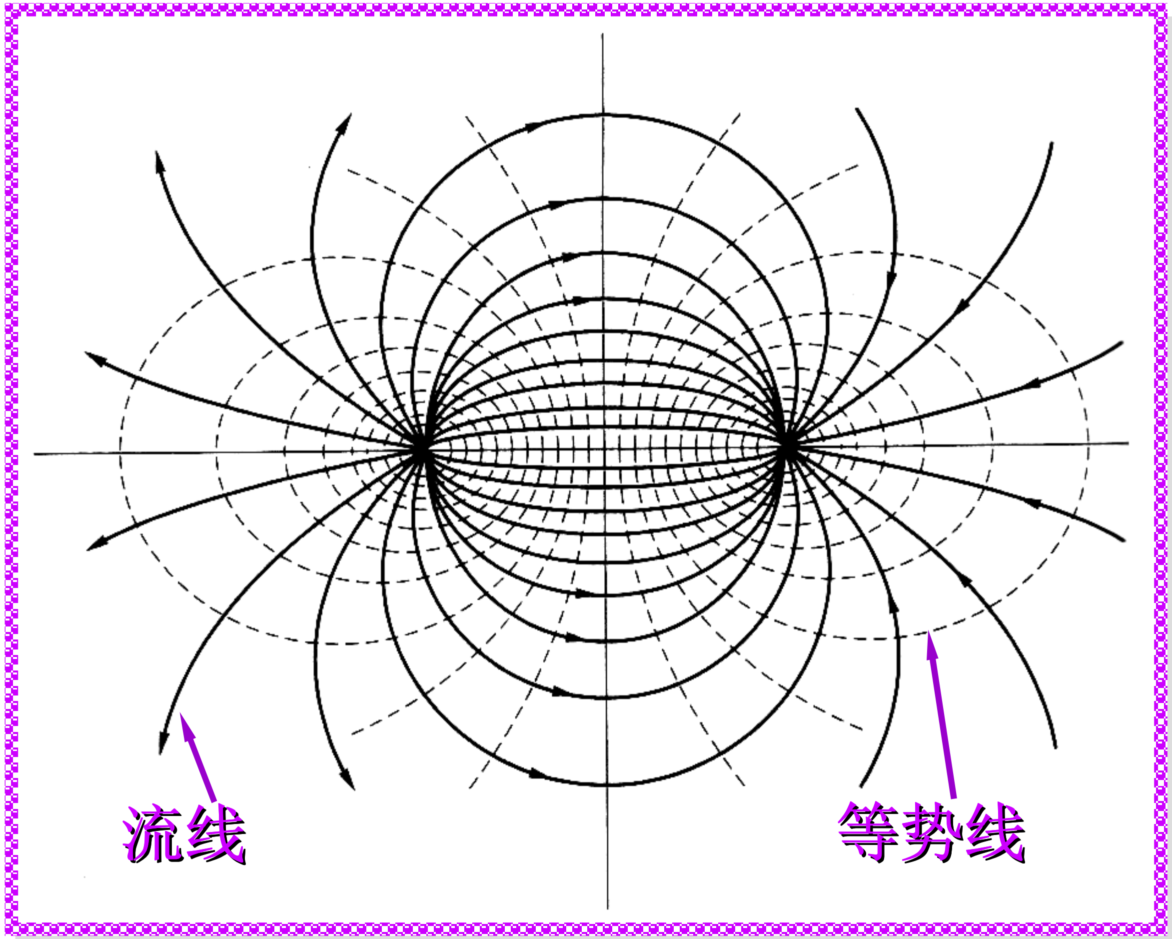
$$\Phi = \frac{Q}{2\pi}(\ln r_2 - \ln r_1)$$



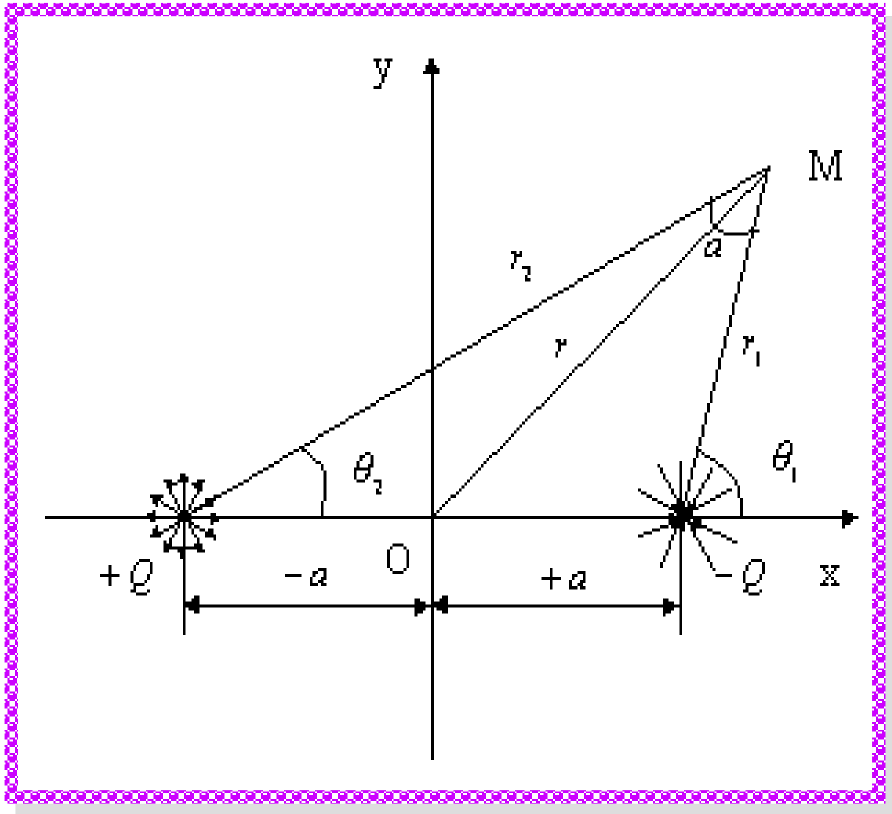
$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}\ ,\ r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

点源与点汇的合成2

点源与点汇的合成 → 流网



偶极流1　*Doublet*



$$\mu = 2am$$

强度为 m 的点源和点汇间距$2a \to 0$，保持$2aQ = C$，得位于原点强度为 M 的偶极流

偶极流2

速度势函数与流函数

$$\Phi=\frac{\mu}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\mu}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\Psi=-\frac{\mu}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\mu}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r}$$

doublet strength

偶极流正方向 ⟹ 由汇指向源

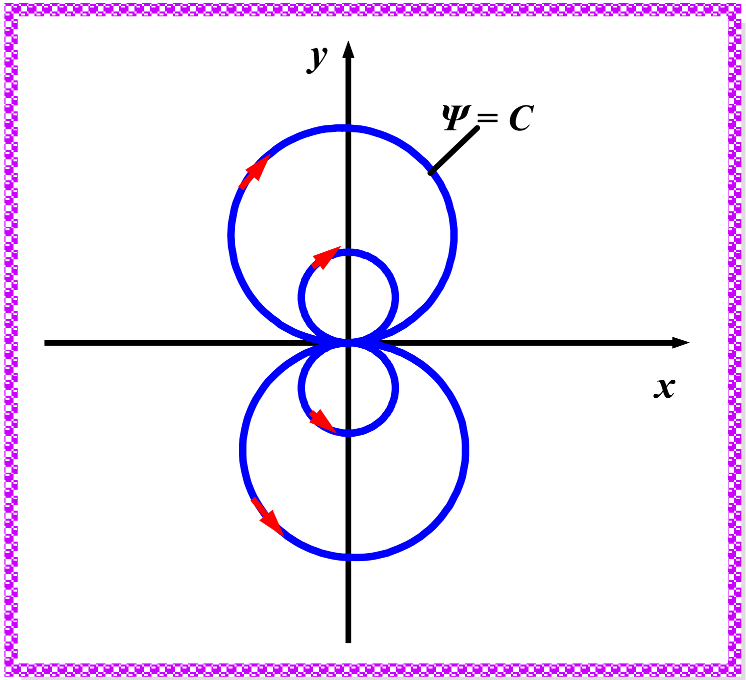
偶极流3

流线方程 $\Psi = C$

$$\Psi = -\frac{\mu}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2} = C$$

$$x^2 + \left(y + \frac{\mu}{4\pi C}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{4\pi C}\right)^2$$

圆心 $\left(0\ ,\ -\dfrac{\mu}{4\pi C}\right)$ 半径 $\left|\dfrac{\mu}{4\pi C}\right|$



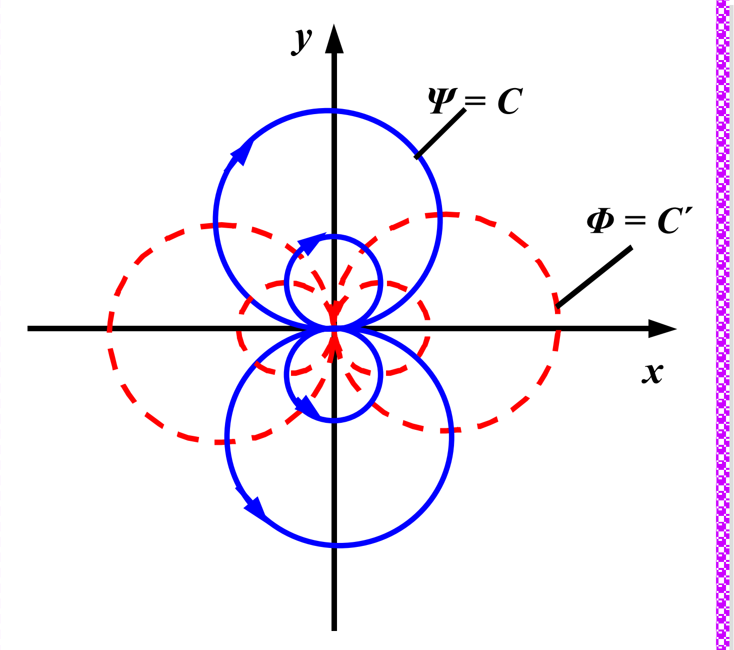
- **流线均在原点与 x 轴相切**
- **流体由偶极流中心沿负 x 轴流出，经不同半径的圆周又流入偶极流中心**

偶极流4

$$\Phi = \frac{\mu}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} = C'$$

等势线方程 $\Phi = C'$

$$\left(x-\frac{\mu}{4\pi C'}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\mu}{4\pi C'}\right)^2$$



等势线是一族圆心在 $\left(\frac{\mu}{4\pi C'},0\right)$，半径为 $\left|\frac{\mu}{4\pi C'}\right|$ 的圆族

偶极流5

速度分布

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}\right) = -\frac{\mu}{2\pi r^2}\cos\theta$$

$$V_\theta = \frac{\partial \Phi}{r\partial \theta} = \frac{\partial}{r\partial \theta}\left(\frac{\mu}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}\right) = -\frac{\mu}{2\pi r^2}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\mu}{2\pi r^2}$$

$$V_{(r\to\infty)} = 0$$
$$V_{(r=0)} \to \infty$$

原点速度无穷大

方向不定，为奇点

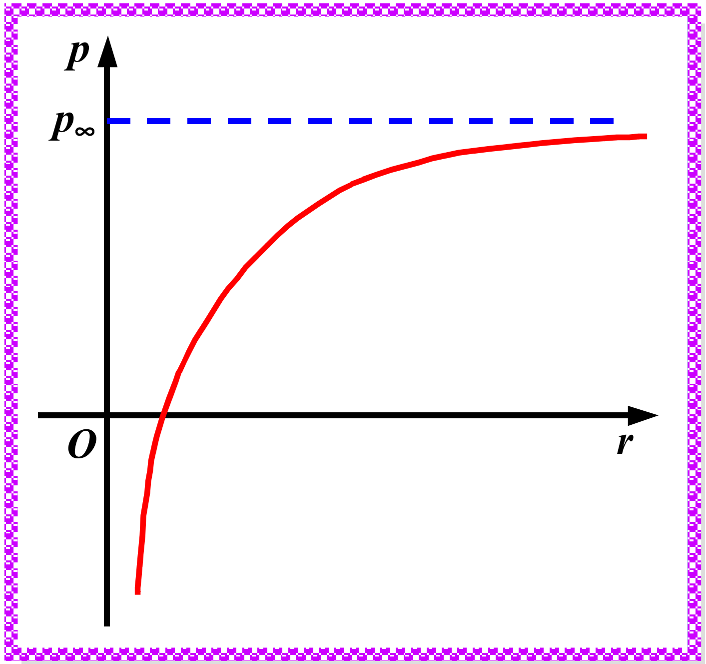
偶极流6

压强分布

- 伯努利方程 $p_{(r\to\infty)} = p_\infty$

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = C$$

$$\Rightarrow \quad p = p_\infty - \frac{\mu^2}{8\pi^2 r^4}$$

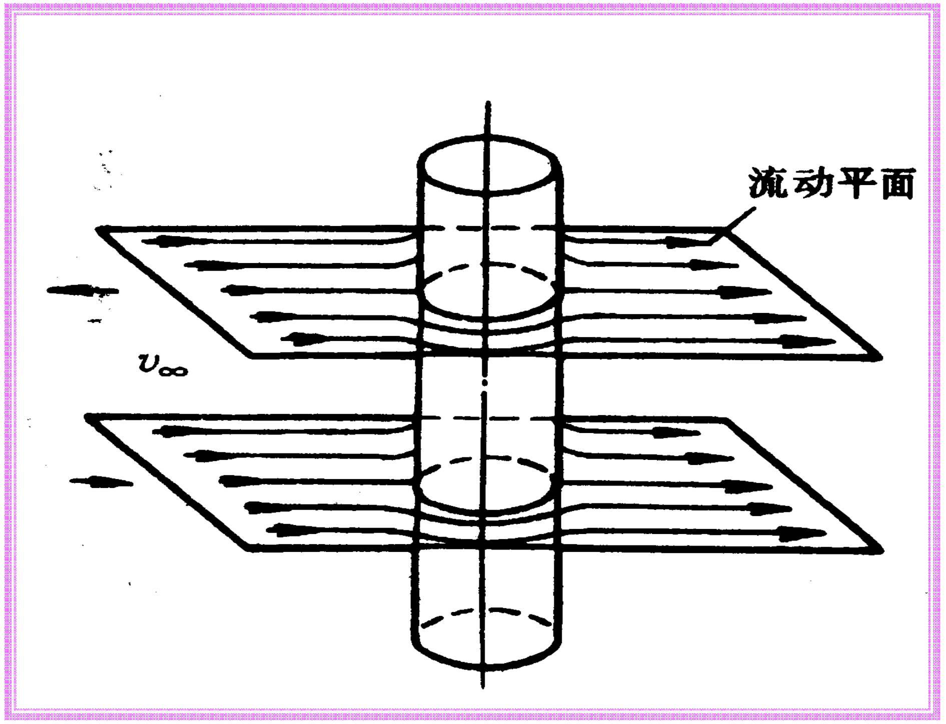


原点速度无穷大，方向不定，压强负无穷大，物理上不存在 ⇒ 奇点

理想不可压缩流体均匀流动绕流一个无限长圆柱体 – 平面流动

圆柱体无环量绕流

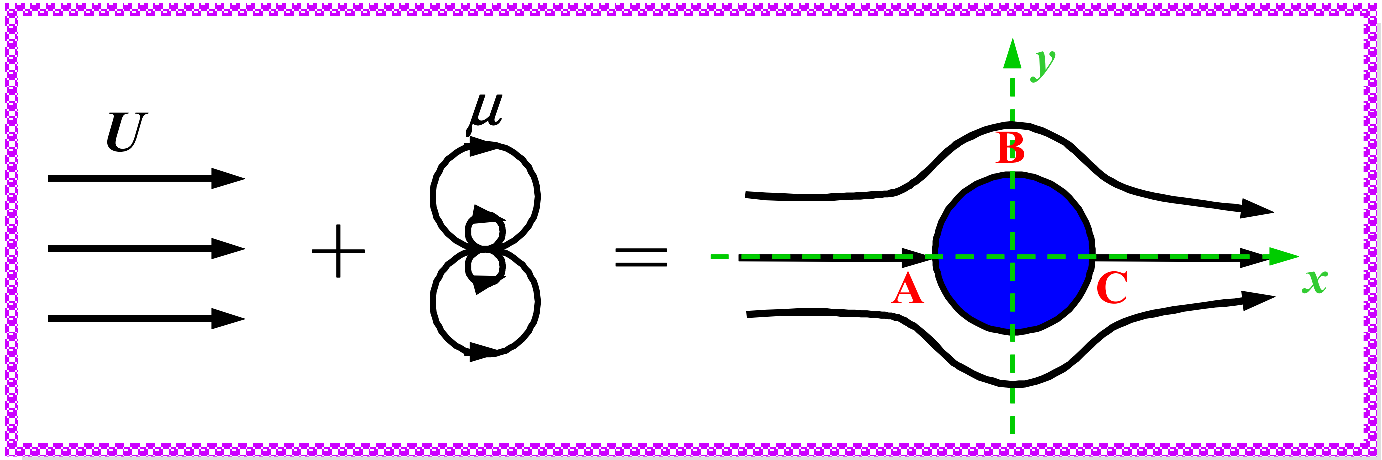
圆柱体有环量绕流



绕圆柱的无环量流动1

- **均匀来流绕流半径为 R，圆心位于原点的圆柱**

沿 x 正向的均直直线流动与位于原点的指向x负方向的偶极流的合成



$$\Phi: \quad Ur\cos\theta \qquad \frac{\mu}{2\pi r}\cos\theta$$

$$\Psi: \quad Ur\sin\theta \qquad -\frac{\mu}{2\pi r}\sin\theta$$

绕圆柱的无环量流动2

流函数与速度势函数

$$\Phi = Ur\cos\theta + \frac{\mu}{2\pi r}\cos\theta$$

$$\Psi = Ur\sin\theta - \frac{\mu}{2\pi r}\sin\theta$$

判断是否为圆柱绕流

- 绕流物体的型线必定是一条流线
- 与实际绕圆柱的边界条件是否相同

流线方程

$$Ur\sin\theta - \frac{\mu}{2\pi r}\sin\theta = C$$

绕圆柱的无环量流动3

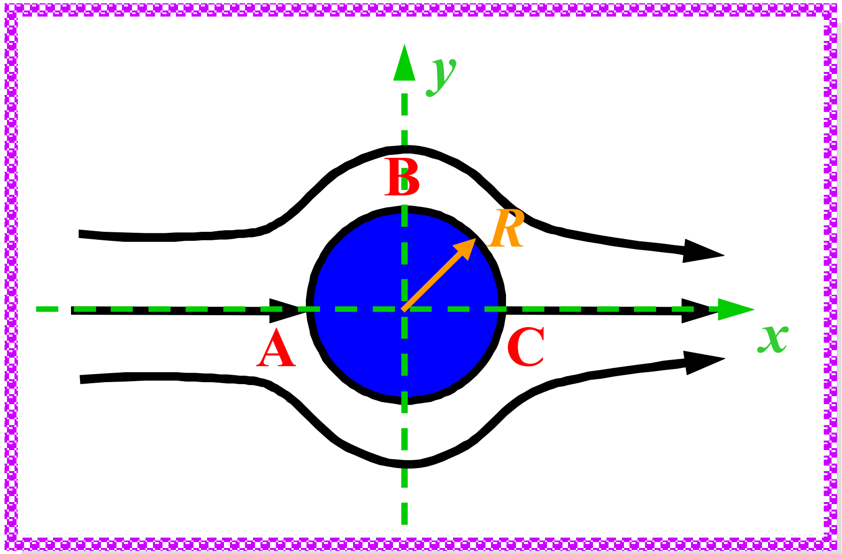
零流线 ⇒ $\Psi=0$

$$Ur\sin\theta-\frac{\mu}{2\pi r}\sin\theta=C$$

可看作固体边界

$\theta=0$ 或 $\theta=\pi$

$$r=\left(\frac{\mu}{2\pi U}\right)^{\frac{1}{2}}=R$$



- 由 x 轴和圆心在原点半径为 R 的圆组成

该流线与无限薄物体壁面等效

绕圆柱的无环量流动4

绕半径R的圆柱圆柱流动势函数流函数

$$r=\left(\frac{\mu}{2\pi U}\right)^{\frac{1}{2}}=R$$

$$\mu=2\pi V_{\infty}R^{2}$$

$$\Phi=Ur\cos\theta+\frac{\mu}{2\pi r}\cos\theta$$

$$\Psi=Ur\sin\theta-\frac{\mu}{2\pi r}\sin\theta$$

$$\Phi=U\left(r+\frac{R^{2}}{r}\right)\cos\theta$$

$$\Psi=U\left(r-\frac{R^{2}}{r}\right)\sin\theta$$

绕圆柱的无环量流动4

$$\Phi = U(r+\frac{R^2}{r})\cos\theta$$

速度分布

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = U\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$V_\theta = \frac{\partial \Phi}{r\partial \theta} = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

无穷远处 ⟹ $V = U$ 圆柱对无穷远处流场无影响

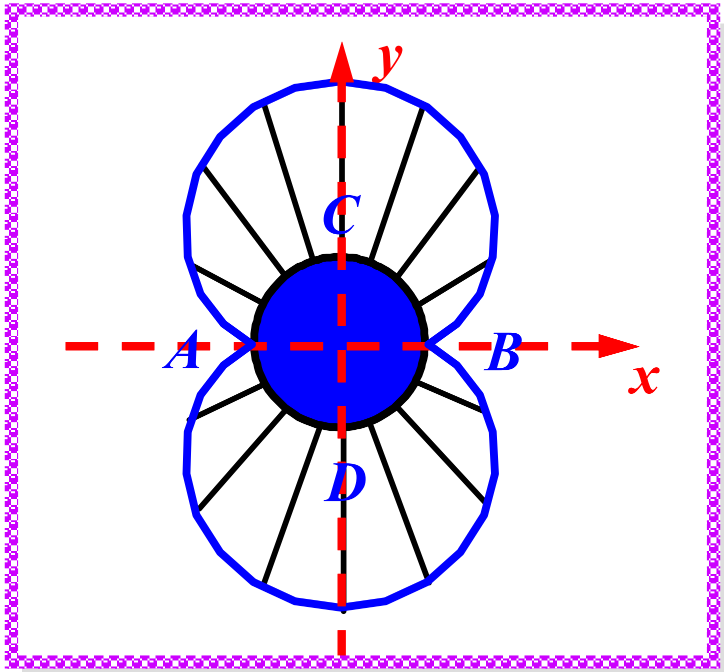
⟹ $V_r = U\cos\theta$ ， $V_\theta = -U\sin\theta$

绕圆柱的无环量流动5

圆柱表面 $r = R$

$\Rightarrow$ $V_r = 0$

$V_\theta = -2U\sin\theta$



速度分布相对于 x、y 轴对称

- A点、B点 $\theta = 0,\ \pi$

$\Rightarrow$ 驻点

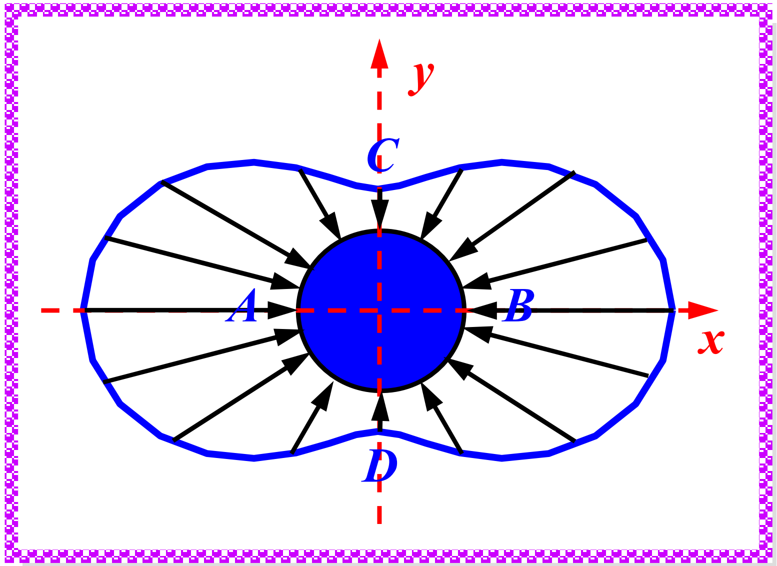
- C点、D点 $\theta = \pm\pi/2$ $\Rightarrow$ 鞍点

绕圆柱的无环量流动6

柱面压强分布

$$p+\frac{1}{2}\rho V^2 = p_{\infty}+\frac{1}{2}\rho U^2$$

$$p = p_{\infty}+\frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho\left(4U^2\sin^2\theta\right)$$



symmetric pressure distribution

速度分布，压强分布相对于 x 轴和 y 轴对称

绕圆柱的无环量流动7

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho\left(4U^2\sin^2\theta\right)$$

压强系数 *pressure coefficient*

$$\bar{p} = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - 4\sin^2\theta$$

绕流物体阻力和升力

阻力 作用在物体上表面力合力在来流方向分量

升力 作用在物体上表面力合力在与来流垂直方向分量

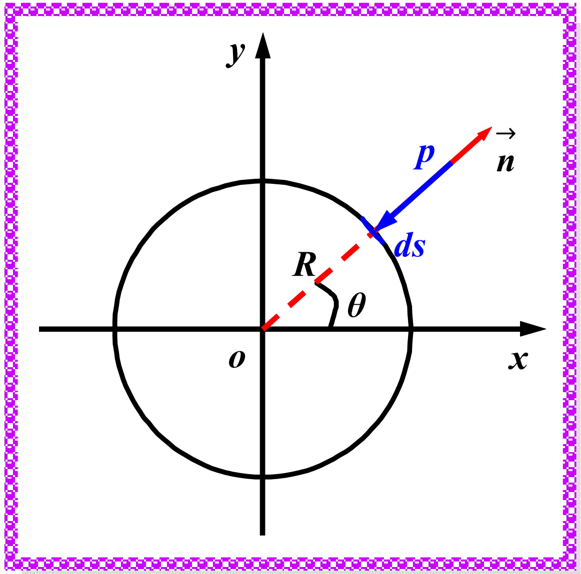
绕圆柱的无环量流动8

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho\left(4U^2\sin^2\theta\right)$$

阻力

$$F_x = -\int_S pds\cos\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} pR\cos\theta d\theta = 0$$



升力

$$F_y = -\int_S pds\sin\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} pR\sin\theta d\theta = 0$$

绕圆柱的无环量流动9

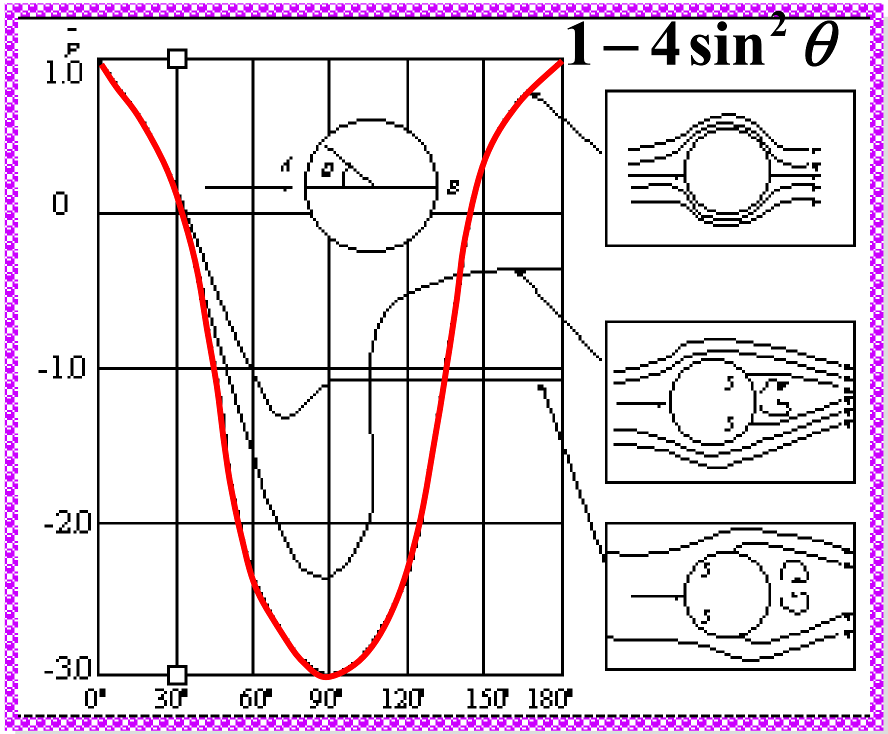
达朗贝尔悖论 → **理想不可压流动中，任一封闭物体的绕流，其阻力 (*drag*) 都是零**

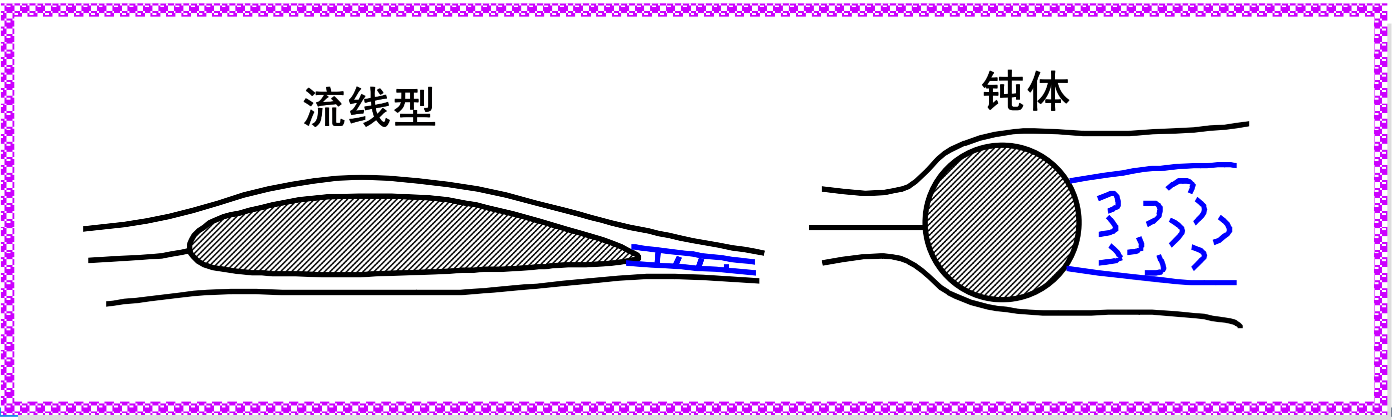
d'Alembert paradox

导致达朗贝尔悖论的原因是没有考虑真实流体的粘性

- **在粘性流体中运动的物体会承受摩擦阻力(*friction drag*) 和压差阻力（形状阻力 *pressure drag*)**

绕圆柱的无环量流动10





绕圆柱的无环量流动11

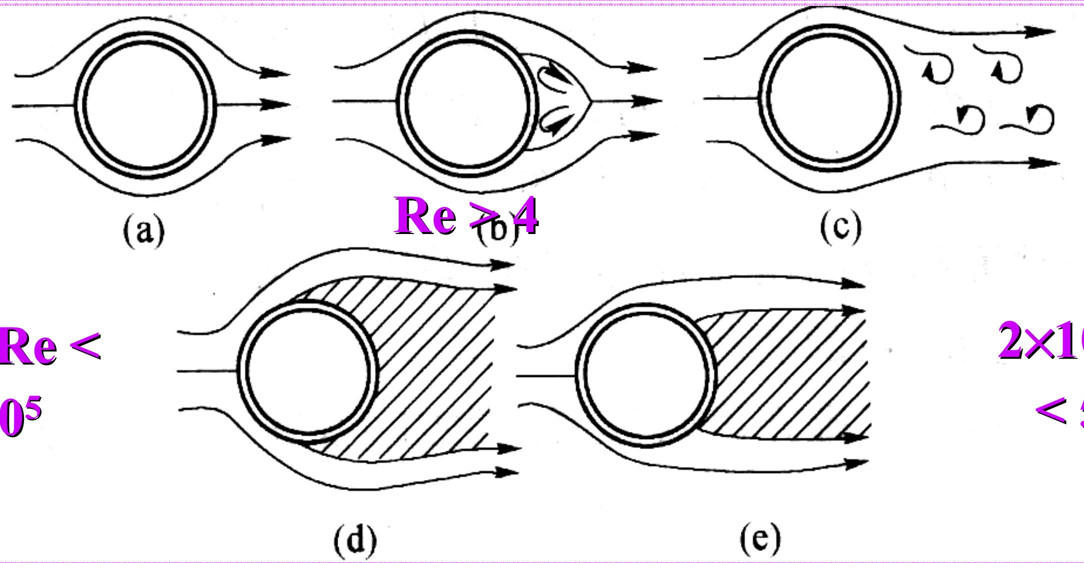
Re << 1

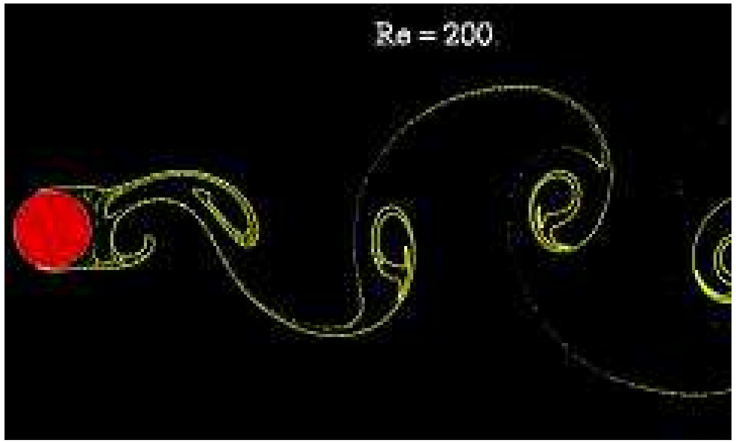
Re > 4

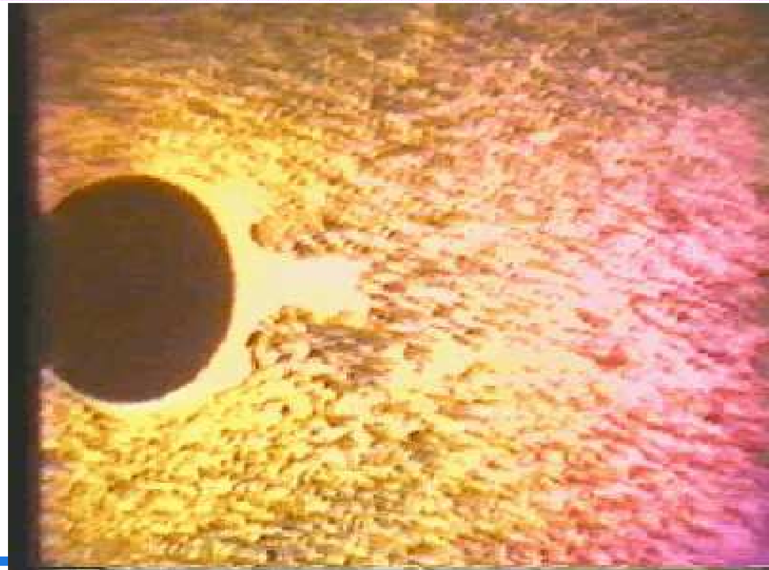
60 < Re < 500

500 < Re < 2×10^5

2×10^5 < Re < 5×10^5







绕圆柱的有环量流动1

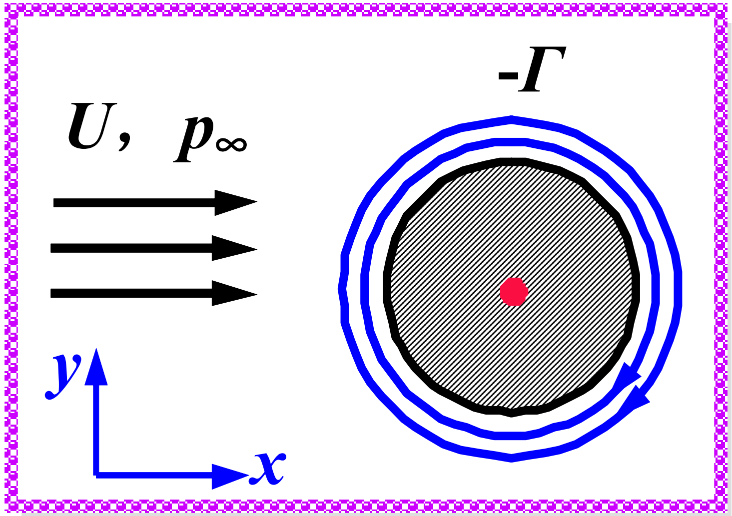
绕圆柱无环量流动与顺时针点涡（圆心）的合成

流函数与速度势函数

$$\Phi = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta$$

$$-\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\Psi = U\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta \quad + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$



Flow past a circular cylinder with circulation

绕圆柱的有环量流动2

速度分布

$$V_r = U\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$V_\theta = -U\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

无穷远处 $\Rightarrow$ $V = U$ 圆柱对无穷远处流场无影响

$$V_r = U\cos\theta \quad , \quad V_\theta = -U\sin\theta$$

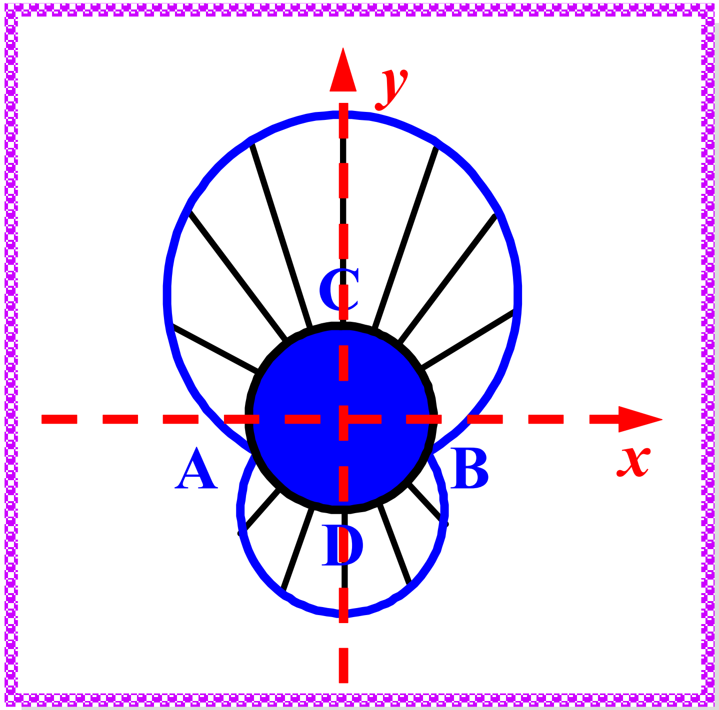
绕圆柱的有环量流动3

圆柱表面 ⇒

$$V_r = 0$$

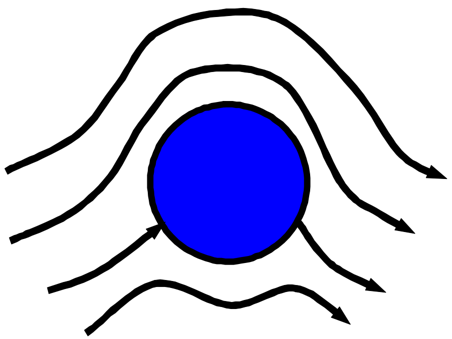
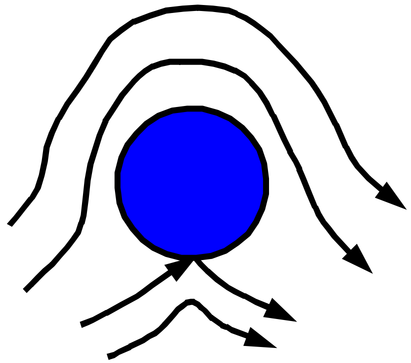
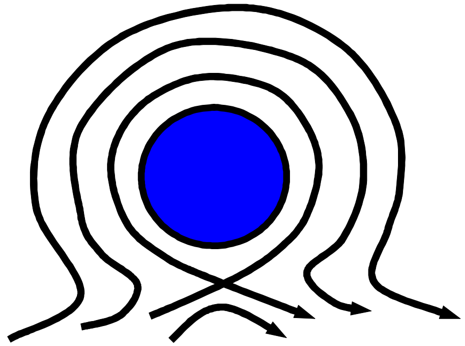
$$V_\theta = -2U\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

速度分布相对于 y 轴对称，而相对于 x 轴不对称，因此必然导致压强分布相对于 x 轴不对称



绕圆柱的有环量流动4

驻点位置 ⟹ $$\sin\theta_s = -\frac{\Gamma}{4\pi RU}$$

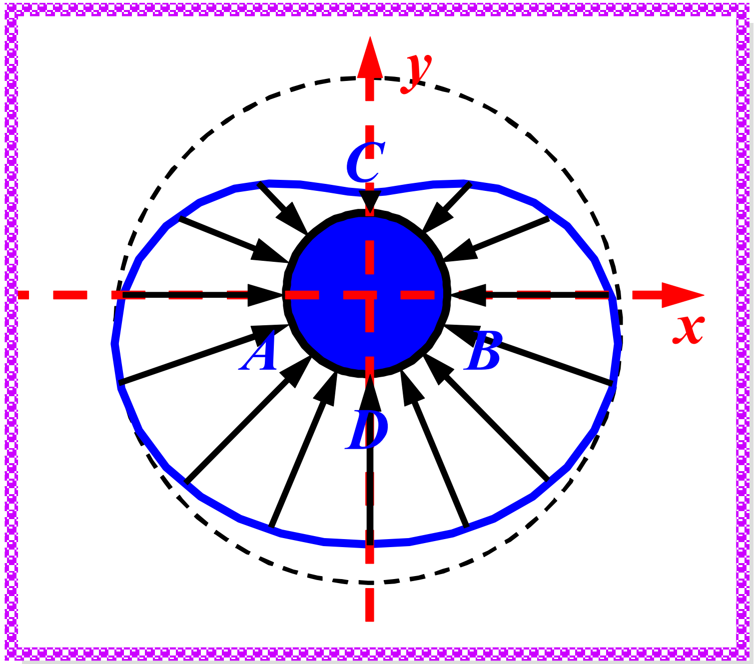
$\Gamma < 4\pi RU$	$\Gamma = 4\pi RU$	$\Gamma > 4\pi RU$
		
两驻点	一驻点	柱面无驻点

在闭合流线和圆柱面之间的内部区域自成闭合环流，但流线不是圆形

柱面压强分布

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left[U^2 - \left(2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2\right]$$

环量的存在使圆柱上下表面压强分布不对称，从而产生垂直于来流方向的合力



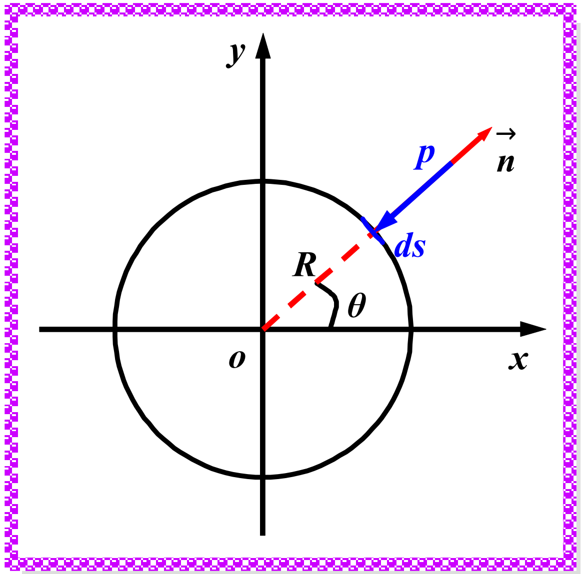
绕圆柱的无环量流动6

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho\left[U^2 - \left(2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2\right]$$

阻力

$$F_x = -\int_S pds\cos\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} pR\cos\theta d\theta = 0$$



- 绕圆柱有环量流动，圆柱收到阻力仍为零

升力：库塔-儒可夫斯基升力定理

Kutta-Joukowski lift theorem

圆柱在与来流垂直方向，即 y 方向所受的力

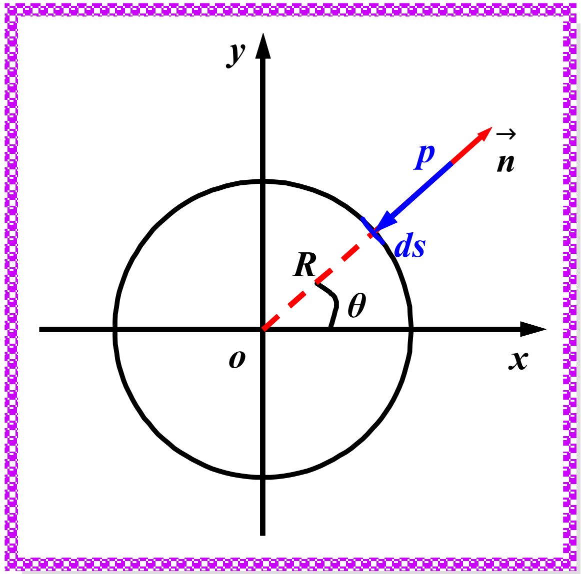
$$F_y = -\int_S p ds \sin\theta = -\int_0^{2\pi} pR\sin\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_y = \rho U \Gamma}$$

库塔—儒可夫斯基升力定理

W. M. Kutta, 1902

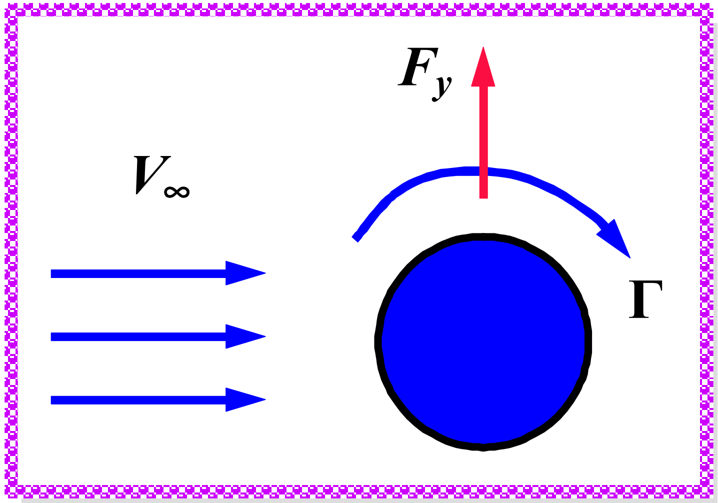
N. Joukowski, 1906



绕圆柱的有环量流动8

升力的方向 *lift*

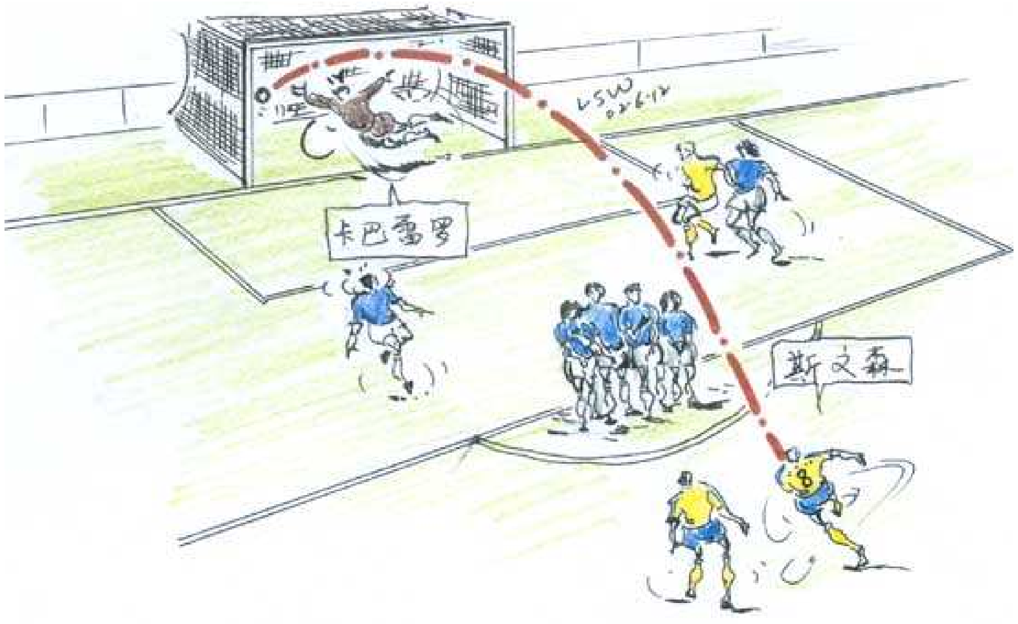
来流速度矢量方向
逆环流方向旋转90°

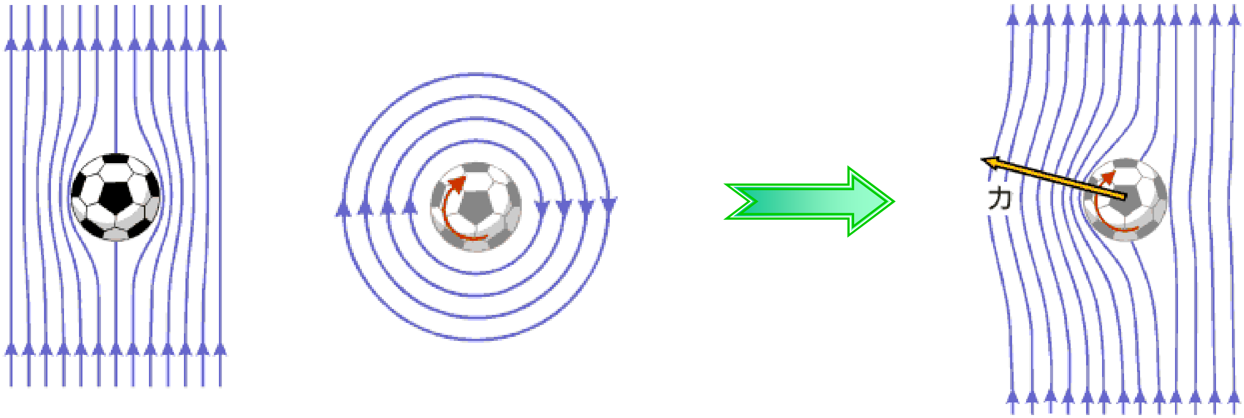


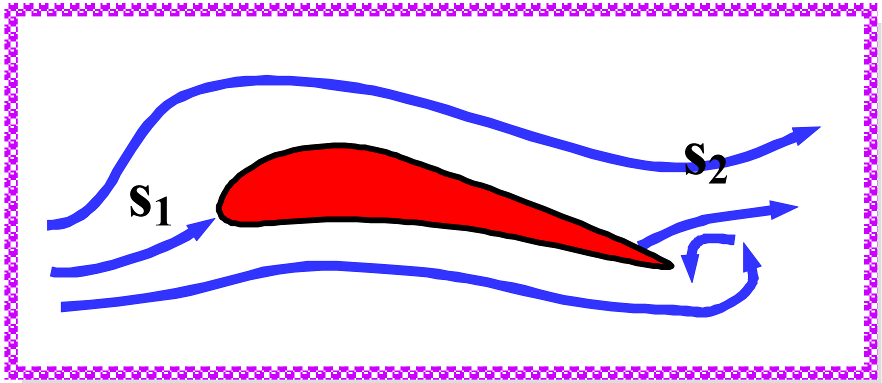
马格努斯效应(*Magnus effect*)

- **处于平行流动中的旋转圆柱体将受到垂直于来流方向的侧向力**

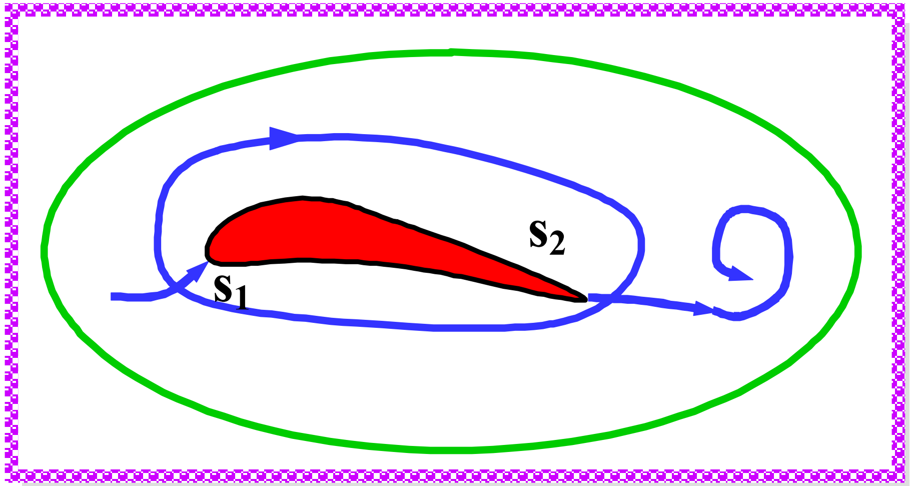
绕圆柱的有环量流动8



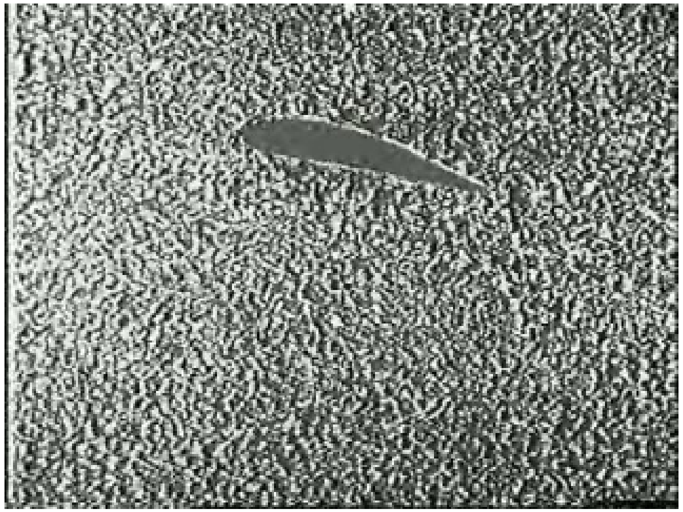




S1
S2



S1
S2



作业

作业：P.327～328

- 8.3
- 8.12
- 8.14
- 8.18
- 8.21

上机作业题1

通过编写和调试程序及应用画图软件画出绕圆柱无环量和有环量流动流线分布图

- **来流速度，圆柱直径以及环量值自己确定，通过取不同值，各给出5幅以上清晰显示流动特点的流线分布图**

- **提交报告。报告包括计算公式、程序框图、程序和流线分布图**

小结1

势流概念

平面势流概念

平面势流的伯努利方程

适用条件，物理意义，应用

小结2

流函数和速度势函数

- 流函数、速度势函数存在的条件
- 流函数、速度势函数满足拉普拉斯方程的条件
- 等流函数线，等势函数线，流网
- 流函数与流量的关系

小结3

基本平面势流

- 流函数、速度势函数，速度场，压强场流线，等势函数线，A 的物理意义

绕圆柱的流动

- 简单势流叠加，速度场，压强场，库塔—儒可夫斯基升力定理

小结5

平面势流伯努利方程

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}=C$$

$$p+\frac{1}{2}\rho V^2=C'$$

柯西—黎曼条件

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v=\frac{\partial \Phi}{\partial y}=-\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

小结6

库塔—儒可夫斯基定理

$$F_y = \rho V_\infty \Gamma$$

注意方向判断

计算

- 伯努利方程、动量方程的求解
- 流函数、速度势函数的求解
- 如何用简单势流叠加成复杂势流流场

柯西黎曼条件

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{r\partial \theta}$$
$$V_\theta = \frac{\partial \Phi}{r\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

- **流函数、速度势函数存在条件**

  流函数：平面不可压缩；　速度势函数：无旋

- **流函数、速度势函数满足拉普拉斯方程的条件**

  流函数：无旋；　速度势函数：不可压缩

- **流网特点:** 流线、等势线处处正交

均直直线流动 → $\Phi = ax + by$　$\Psi = -bx + ay$　$u = a\ ,\ v = b$

- 速度大小方向，压强大小都不变
- 流线、等势线均为直线

点源（汇） → $\Phi = \pm\dfrac{Q}{2\pi}\ln r$　$\Psi = \pm\dfrac{Q}{2\pi}\theta$　$V_r = \pm\dfrac{Q}{2\pi r}$

- 点源点汇所在位置速度无穷大，压强负无穷大，奇点
- 流线为过点源 (汇) 的径向射线、等势线为圆心在点源 (汇) 的同心圆族