第三章　二阶系统

二阶自治系统： $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ （3.1）

$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$ （3.2）

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ 是方程的解，初始状态为 $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})$

对于所有t≥0，x(t)的解在x_1-x_2平面的轨线是一条通过x_0点的曲线，该曲线称为状态方程始于x_0点的轨线或轨道。

x_1-x_2平面称为状态平面或相平面。

方程（3.1）（3.2）的右边表示曲线的切向量：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

f(x)可以看成是状态平面的向量场

无摩擦单摆系统：

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -10\sin x_1$$

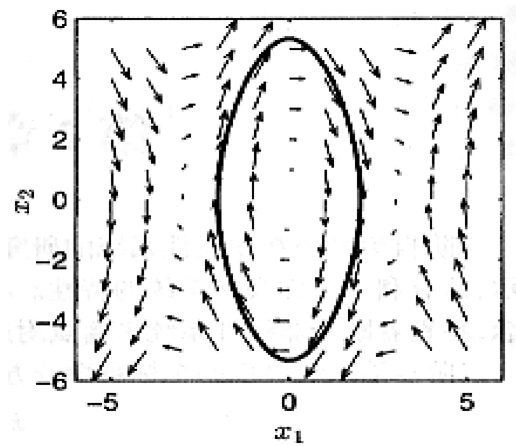


图 2.2 无摩擦力时单摆方程的向量场图

所有轨线或解的曲线称为系统的相图。

3.1 线性系统的特性

线性系统： $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

若A的特征值为λ_1， λ_2 ，可以得到方程的一般解 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$

$$x = \alpha_1(x_0)\beta_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} + \alpha_2(x_0)\beta_2 e^{\lambda_2(t-t_0)}$$

例1：二阶线性系统自由运动的微分方程为

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

取 $x_2 = \dot{x}$ ，$x_1 = x$，则式对应的状态方程为

$$\dot{x}_2 = -\omega_n^2 x_1 - 2\xi\omega_n x_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

合并以上两式，可得 $$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\frac{\omega_n^2 x_1 + 2\xi\omega_n x_2}{x_2}$$

得 $$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\omega_n^2 x_1 + 2\xi\omega_n x_2}{x_2}$$

从式解得的关系式就是二阶线性系统的相轨迹方程。

特征方程为 $$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

其特征根为 $$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

二阶线性系统相轨迹的形状和奇点的性质，与特征根在复平面上的位置有关。

（一）两个特征值都为实数， $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

线性坐标变换： $\mathbf{z} = M^{-1}\mathbf{x}$ $\quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

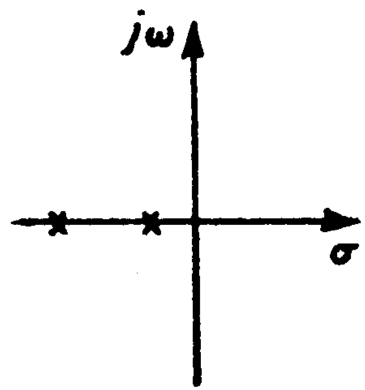
$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 \end{aligned}$$

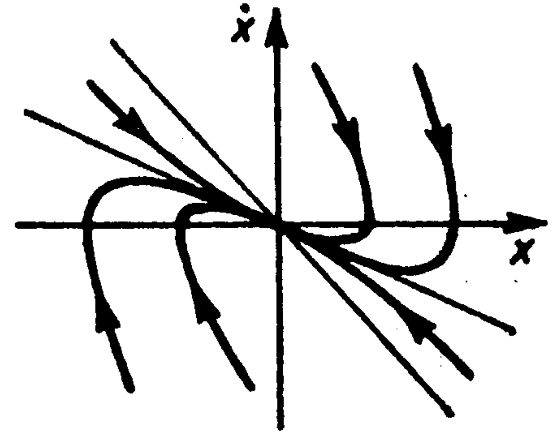
$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = e^{J_r t}\begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} z_1(t) &= z_{10}e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) &= z_{20}e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow z_2 = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1}, \qquad c = z_{20}\big/(z_{10})^{\lambda_2/\lambda_1}$$

J_r 是A的约当型

1. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$时





（a）

$\mathbf{x=0}$ **称为稳定结点**

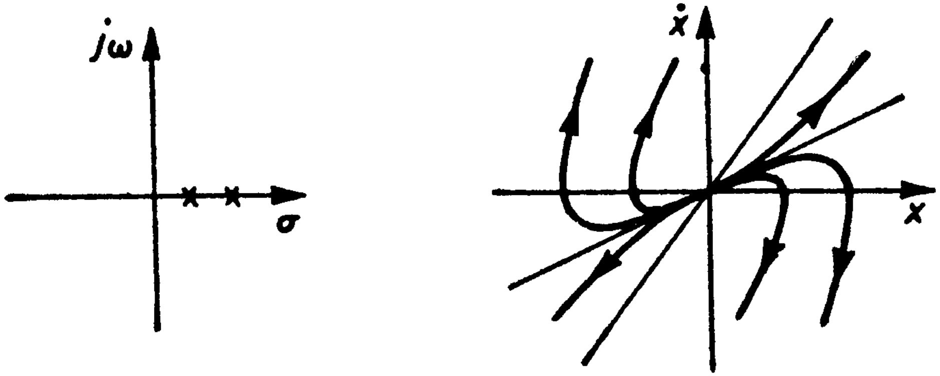
λ_1、λ_2为两个负实根，系统处于过阻尼状态。

其零输入响应呈指数衰减状态。对应的相轨迹是一簇趋向相平面原点的抛物线。相平面原点为奇点。

2. $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$时

$\mathbf{x=0}$ **称为非稳定结点**

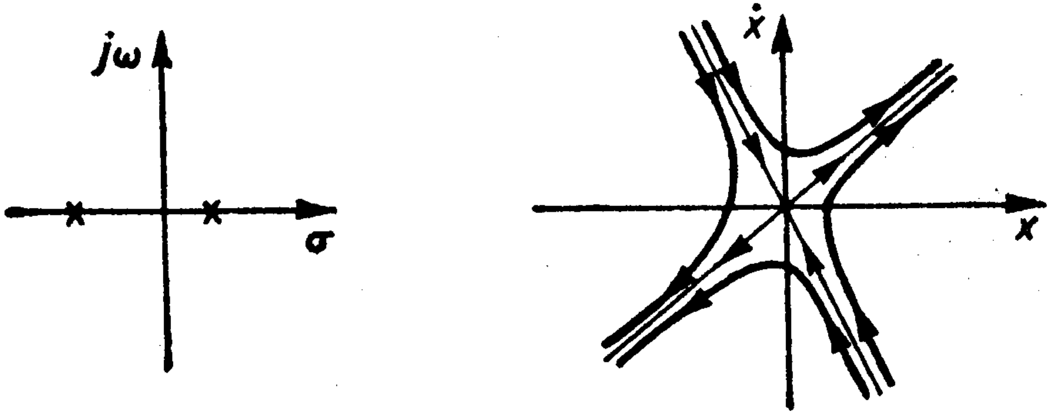
λ_1 、λ_2 为两个正实根，系统的零输入响应为非周期发散的。对应的相轨迹是由原点出发的发散的抛物线簇。相应的奇点称为不稳定的结点。



（b）不稳定的结点

3. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$时

$\mathbf{x=0}$ **称为鞍点**



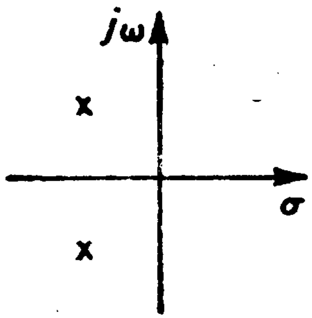
（c）鞍点

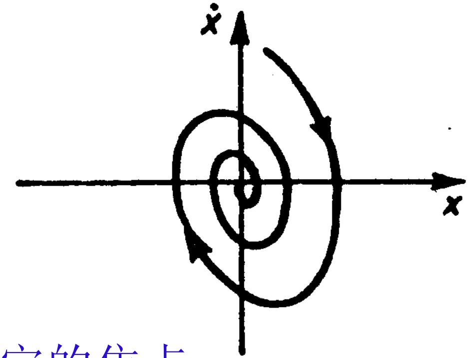
λ_1 、λ_2为两个符号相反的实根，此时系统的零输入响应是非周期发散的。这时奇点称为鞍点，是不稳定的平衡状态。

（二）特征值为复数，$\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$

$$\begin{bmatrix}\dot z_1\\ \dot z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned}\dot z_1&=\alpha z_1-\beta z_2\\ \dot z_2&=\beta z_1+\alpha z_2\end{aligned}$$

1. $\alpha<0$时



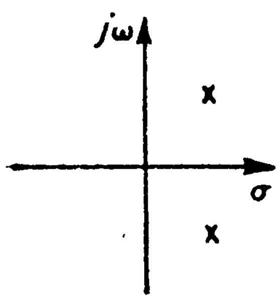


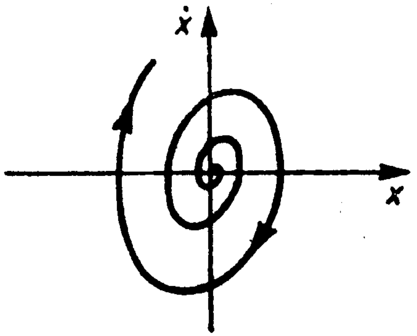
$\mathbf{x}=\mathbf{0}$ **称为稳定焦点**

（d）稳定的焦点

λ_1、λ_2为一对具有负实部的共轭复根，系统处于欠阻尼状态。其零输入响应为衰减振荡，收敛于零。对应的相轨迹是一簇对数螺旋线，收敛于相平面原点。这时原点对应的奇点称为稳定的焦点。

2. $\alpha>0$时





$\mathbf{x}=\mathbf{0}$ **称为非稳定焦点**

（e）不稳定的焦点

λ_1、λ_2为一对具有正实部的共轭复根，系统的零输入响应是振荡发散的。对应的相轨迹是发散的对数螺旋线。这时奇点称为不稳定的焦点。

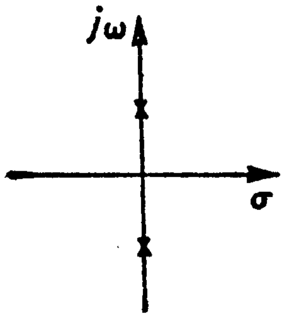
3.$\alpha = 0$ 时

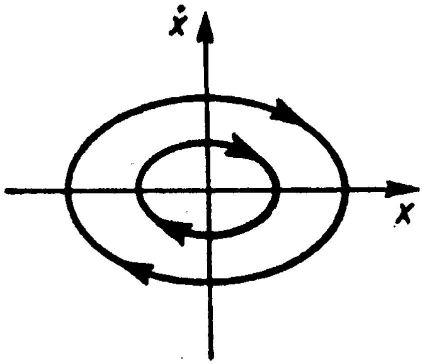
λ_1 、λ_2 为一对共轭纯虚根，系统处于无阻尼运动状态。

对于系统 $\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\omega_n^2 x_1}{x_2}$$

$$x_1^2 + (\frac{x_2}{\omega_n})^2 = R^2 \qquad R^2 = x_{10}^2 + (\frac{x_{20}}{\omega_n})^2$$





（f）中心点

系统的相轨迹是一簇同心椭圆，这种奇点称为中心点。每个椭圆对应一定频率下的等幅振荡过程，线性系统的等幅振荡实际上是不能持续的。

3.2　平衡点附近的特性

非线性系统：
$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

设p=(p$_1$, p$_2$)是非线性系统的平衡点，并假设f$_1$, f$_2$连续可微。

在(p$_1$, p$_2$)处按泰勒级数展开：

$$\dot{x}_1 = f_1(p_1, p_2) + a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2) +$$
$$\dot{x}_2 = f_2(p_1, p_2) + a_{21}(x_1 - p_1) + a_{22}(x_2 - p_2) +$$

$$a_{11} = \left.\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}, \quad a_{12} = \left.\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}$$
$$a_{21} = \left.\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}, \quad a_{22} = \left.\frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}$$

若： $f_1(p_1, p_2) = f_2(p_1, p_2) = 0$

定义： $y_1 = x_1 - p_1 \quad y_2 = x_2 - p_2$

状态方程改写为：

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + $$

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + $$

忽略高阶项：

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

$$\dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

雅可比矩阵在p点的计算值

向量形式表示： $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$

称为f(x)的雅可比矩阵

其中： $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{p}}$

例2 求方程 $\ddot{x}-(1-x^2)\dot{x}+x=0$ 的奇点，并确定其奇点类型。

解：　令 $\ddot{x}=\dot{x}=0$ 　得系统奇点为

$$x_e=0$$

在 $x_e=0$ 处将 $\ddot{x}=f(\dot{x},x)=(1-x^2)\dot{x}-x$ 展开为泰勒级数，保留一次项，有

$$\ddot{x}=f(0,0)+\frac{\partial f(\dot{x},x)}{\partial \dot{x}}\bigg|_{\substack{x=0\\ \dot{x}=0}}\dot{x}+\frac{\partial f(\dot{x},x)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=0\\ \dot{x}=0}}x=\dot{x}-x$$

得出奇点处的线性化方程为 $\ddot{x}=\dot{x}-x$ ，特征方程为 $s^2-s+1=0$ ，特征根为

$$s_{1,2}=\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

奇点 x_e 为不稳定的焦点。

3.3 极限环

奇点的类型完全确定了线性系统的性质，而对非线性系统只能决定系统在奇点附近的性质（行为），而不能确定整个相平面上的运动上的运动状态。所以，还要研究离平衡点较远处的相平面图，其中极限环具有重要的意义。

我们知道非线性系统存在自振现象.在相平面上表现为一个极限环.极限环是一条封闭的相轨迹,它附近的运动最终全部趋向于它.对应系统的一种稳定的周期运动，即自振。

分为三种:稳定极限环、不稳定极限环和半稳定极限环

(1)稳定极限环

如果由极限环外部和内部起始的相轨迹都渐近地趋向这个极限环，任何较小的扰动使系统运动离开极限环后，最后仍能回到极限环上。这样的极限环称为稳定极限环，对应系统的自振，如图1所示。

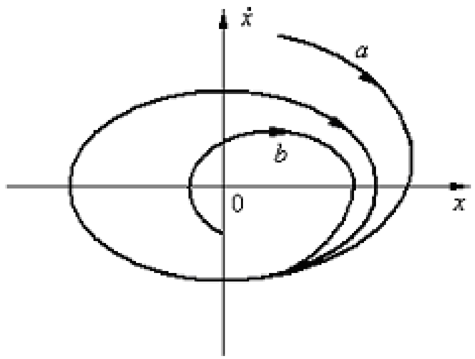


图1　稳定极限环

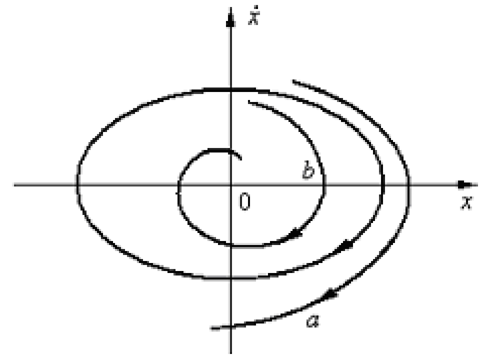


图2　不稳定极限环

(2)不稳定极限环

如果由极限环外部和内部起始的相轨迹都从极限环发散出去，任何较小的扰动使系统运动离开极限环后，系统状态将远离极限环或趋向平衡点，这样的极限环称为不稳定极限环。

相应系统的平衡状态在小范围内稳定而在大范围内不稳定，如图2所示。

(3)半稳定极限环

如果由极限环外部起始的相轨迹渐近地趋向于极限环，由内部起始的相轨迹逐渐离开极限环；或者由外部起始的相轨迹从

极限环发散出去，由内部起始的相轨迹渐近地趋向于极限环，这样的极限环称为半稳定极限环。具有这种极限环的系统不会产生自振。

系统的运动最终会趋向于极限环内的奇点，或远离极限环(见图3)。

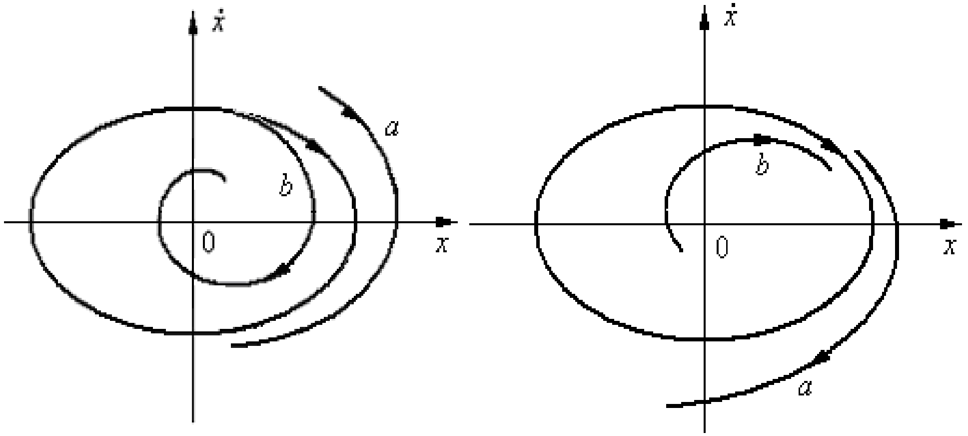


图3　半稳定极限环

非线性控制系统可能没有极限环，也可能有一个或多个极限环

3.4 多重平衡点

如果线性化后状态方程的原点对于不同的特征值是一个稳定（或非稳定）结点、一个稳定（或非稳定）焦点或一个鞍点，那么在平衡点的一个小邻域内，非线性状态方程的轨线就会具有一个稳定（或非稳定）结点、一个稳定（或非稳定）焦点或一个鞍点的特性。

例3 单摆

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -10\sin x_1 - x_2$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10\cos x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

平衡点分别为：$(0,0)$和$(\pi,0)$

得到两个雅可比矩阵：

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{特征值：} -0.5 \pm j3.12$$ 稳定焦点

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{特征值：} -3.7,\quad 2.7$$ 鞍点

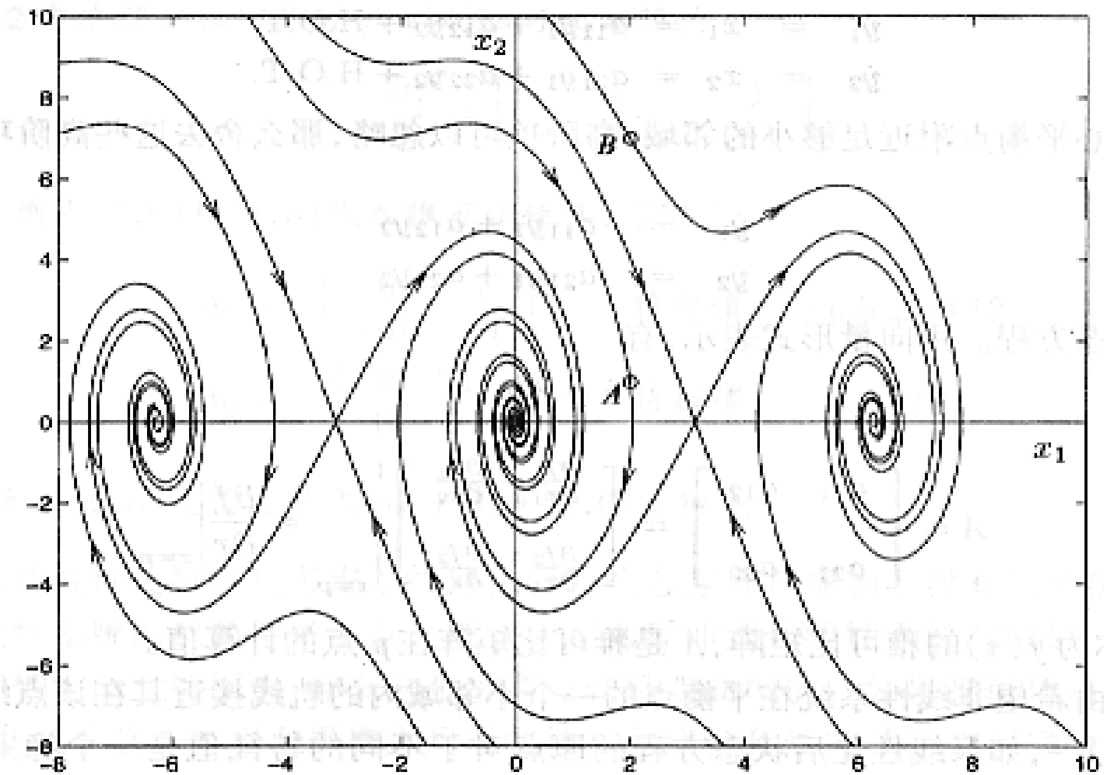


图 2.16 例 2.2 中的单摆方程的相图