

# 第七章 非线性系统的反馈线性化

反馈线性化方法的基本思想是用反馈的方法，将非线性被控对象补偿成为一个具有线性特性的系统，然后利用线性系统理论进行控制系统设计。

基于微分几何的反馈线性化方法是一种精确线性化方法。

## 7.1 反馈线性化基本概念

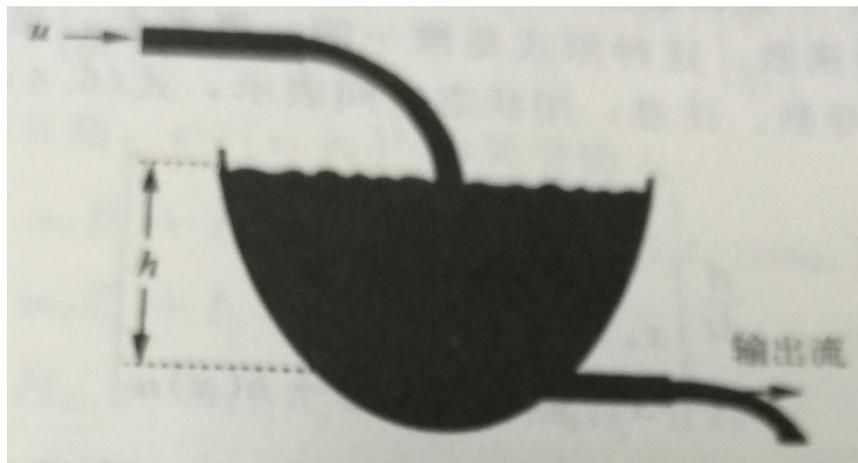
反馈线性化设计步骤是：

- (1) 通过反馈的方法将非线性系统转化为线性系统，这个过程可以用微分几何方法；
- (2) 经过线性化处理后的系统进行设计。

与泰勒级数展开的近视线性化方法不同，它是建立在系统状态变换与非线性反馈基础上的一种精确方法。

它是大范围有效的，而不是仅仅局限于工作点附近。

例1 考察控制一个水槽的高度 $h$ 到特定高度 $h_d$ , 控制输入 $u$ , 初始高度为 $h_0$ .



$$\text{水槽的系统模型为 } \frac{d}{dt} \left[ \int_0^h A(h) dh \right] = u(t) - a\sqrt{2gh}$$

$A(h)$ 是水槽的横截面,  $a$ 为出水管横截面, 则 $h$ 的控制是一个非线性控制问题。

$$A(t)\dot{h} = u(t) - a\sqrt{2gh}$$

如果选取 $u(t)$ 为  $u(t) = a\sqrt{2gh} + A(t)v$

$v$ 为等价输入, 则得到的系统是线性的  $\dot{h} = v$

选取 $v$ 为  $v = -a\tilde{h}$

其中,  $\tilde{h} = h(t) - h_d$  为液面高度误差, 所得闭环系统为

$$\dot{\tilde{h}} + a\tilde{h} = 0$$

系统是稳定的

实际输入流量由非线性控制律获得

$$u(t) = a\sqrt{2gh} - A(t)\tilde{h}$$

控制律第1项提供输出流量, 第2项用来根据线性动态提供的液面高度控制。

如果  $h_d$  随时间变化, 则可选择 $v(t)$ 为

$$v = \dot{\tilde{h}}_d - a\tilde{h}$$

仍保证闭环系统是稳定的。

考虑如下系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}u \quad (7.1)$$

$\mathbf{x}$ 是系统状态， $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是光滑向量场， $u$ 是控制输入， $\mathbf{B}$ 是输入矩阵且可逆。设跟踪轨迹为 $\mathbf{x}_d$ 。

定义跟踪误差

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}u$$

主要思路是设计如下的补偿控制算法

$$u = \mathbf{B}^{-1}(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{f}(\mathbf{x}) + k\mathbf{e})$$

补偿后的误差动态方程为  $\dot{\mathbf{e}} = -k\mathbf{e}$  稳定

例2 两关节机械手

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h\dot{q}_1 - h\dot{q}_2 \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

其中,  $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$  为关节角,  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2]^T$  为关节输入。

$$H_{11} = m_1 l_{c_1}^2 + I_1 + m_2 [l_1^2 + l_{c_2}^2 + 2l_1 l_{c_2} \cos q_2] + I_2$$

$$H_{22} = m_2 l_{c_2}^2 + I_2$$

$$H_{21} = H_{12} = m_2 l_1 l_{c_2} \cos q_2 + m_2 l_{c_2} + I_2$$

$$h = m_2 l_1 l_{c_2} \sin q_2$$

$$g_1 = m_1 l_{c_1} g \cos q_1 + m_2 g_2 [l_{c_2} \cos(q_1 + q_2) + l_2 \cos q_1]$$

$$g_2 = m_2 l_{c_2} g \cos(q_1 + q_2)$$

表示成向量形式

$$H(q)\ddot{\mathbf{q}} + C(q, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + g(q) = \boldsymbol{\tau}$$

两边同乘以  $H^{-1}$ , 可变成仿射非线性系统 (7.1)。

为了达到跟踪控制，可以采用下面的控制规律

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h\dot{q}_1 - h\dot{q}_2 \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

这里

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_d - 2\lambda\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \lambda^2\tilde{\mathbf{q}}$$

跟踪误差为  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$

跟踪误差方程为

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + 2\lambda\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \lambda^2\tilde{\mathbf{q}} = 0$$

因此跟踪误差可保证收敛到0，式（7.2）称为机器人力矩控制。

反馈线性化的目的是通过反馈消去系统的非线性项. 对于具有特殊结构的系统, 可采用简单方法:

(1) 如果控制输入与非线性特性是相加的关系, 则可通过相减法;

(2) 如果控制输入与非线性特性是相乘的关系, 则可通过相除法, 这时如果矩阵非奇异, 则可采用逆矩阵消去非线性项。

例3

$$\dot{x} = ax^2 + \frac{u}{b + c \sin^2 t}$$

反馈线性化控制器取为

$$u = [b + c \sin^2 t](-ax^2 - kx)$$

得到的闭环系统方程为  $\dot{x} = -kx$

对于一般结构, 须用微分几何方法

## 7.2 微分几何知识

为了分析非线性系统，把状态变量空间视为微分流形，认为系统状态方程右端各向量是定义在流形上的向量场集合，这种应用流形上的向量场来研究非线性动力学方法，被称为微分几何方法。

微分几何学以光滑曲线(曲面)作为研究对象，由曲线的弧长、曲线上一点的切线等概念展开的。在微分几何中，对任意曲线的“小范围”性质的研究，还可以用拓扑变换把这条曲线“转化”成初等曲线进行研究。

在微分几何中，由于运用数学分析的理论，就可以在无限小的范围内略去高阶无穷小，一些复杂的依赖关系可以变成线性的，不均匀的过程也可以变成均匀的，这些都是微分几何特有的研究方法。

微分几何知识已成为非线性控制的重要工具。

## 1. 仿射非线性系统

在仿射非线性系统中，系统的状态空间表现为非线性，而控制输入为线性的，有以下形式：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{7.3}$$

## 2. 同胚变换

对于非线性系统，我们可以构造一个变换  $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ ，将反馈化后的系统状态方程从  $\mathbf{x}$  坐标系变换到  $\mathbf{z}$  坐标系，使变换后的状态方程具有可线性化的结构。

上述变换  $\mathbf{T}(\cdot)$  必须是可逆的，由于  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{z}$  的导数是连续的，因此要求  $\mathbf{T}(\cdot)$  和  $\mathbf{T}^{-1}(\cdot)$  必须是连续可微的。于是我们称具有连续可微逆变换的连续可微变换  $\mathbf{T}(\cdot)$  为同胚变换。

### 3. 李导数算子

流形是数学中的微分几何重要概念， $n$ 维流形可以理解为多个同为 $n$ 维的曲面拼接所得的曲面。微分流形也称为光滑流形，可理解为拼接光滑的流形。

对于非线性系统  $\dot{x} = f(x)$ ，如果 $f$ 在定义域  $D \subset R^n$  上足够光滑，则称映射  $f : D \rightarrow R^n$  为 $D$ 上的向量场。

按微分几何的思想，状态空间可视为 $n$ 维微分流形 $N$ ，状态 $x$ 视为流形中的一点，右端 $f(x)$ 视为定义在流形上的一个向量场。

研究向量场必须借助于数学工具，这里是李代数，一个重要概念是函数的李导数。

为了在 $u$ 和 $y$ 之间建立关系，定义函数李导数

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \stackrel{\text{def}}{=} L_f h(x) + L_g h(x)u$$

式中  $L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x)$$

称为李导数，或李导数算子。

$L_f h(x)$  被称为函数  $h(x)$  沿向量场  $f$  的李导数。

若  $h$  标量函数，则有

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, f(x) \right\rangle \end{aligned}$$

实际上是函数  $h(x)$  的梯度向量与  $f(x)$  的标量积。

高阶的李导数可表示为

$$L_g L_f h(x) = L_g (L_f h(x)) = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} g(x)$$

$$L_f (L_f h(x)) = L_f^2 h(x) = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} f(x)$$

...

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} h(x))}{\partial x} f(x)$$

## 7.3 反馈线性化设计方法

基于微分几何理论的方法，利用李导数构造一个同胚变换，将非线性特性映射到等价的线性空间。于是非线性问题就转换为线性问题求解，而动力系统的拓扑结构不变。

### 7.3.1 输入—输出线性化

利用李导数可以构造同胚变换，将非线性函数变换到线性空间。即指 $y$ 和新输入 $v$ 之间成为线性关系。

如果选择状态反馈控制

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} & \mathbf{u} &= \frac{1}{L_g h(\mathbf{x})} \left[ -L_f h(\mathbf{x}) + v \right] \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

则建立了如下的线性关系  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v}$

类似地，如果选择状态反馈控制  $\mathbf{u} = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})} \left[ -L_f^r h(\mathbf{x}) + v \right]$

代入到 
$$\mathbf{y}^{(r)} = L_f^r h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (7.4)$$

非线性系统变换为简单的线性系统。

$$\mathbf{y}^{(r)} = \mathbf{v}$$

则把非线性系统变换为线性系统

上述过程中，阶数 $r$ 决定了线性化时输入变换的具体形式及最终的线性系统的阶数。

**定义1** (相对阶) 对于系统 (7.1), 对于  $x_0 \in Q$ , 如果存在  $x_0$  的领域  $U$  和正整数  $r$ , 使得

$$(1) \text{ 对于 } \forall x \in U, 0 \leq i < r-1, L_g L_f^i h(x) = 0;$$

$$(2) L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0;$$

则称系统在  $x_0$  点具有相对阶  $r$ .

下面举例说明线性化设计过程。

**例4**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 - x_1^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = h(x) = x_2$$

$$\text{解: } L_g h(x) = 1 \quad L_f h(x) = -x_2 - x_1^3$$

$$u = \frac{1}{L_g h(x)} (-L_f h(x) + v) = x_2 + x_1^3 + v$$

$$\dot{y} = v$$

## 7.3.2 非线性系统的标准型变换

**定理1** 对于系统 (7.1)，如果其在 $x_0$ 点的相对阶  $r \leq n$ ，则通过如下的非奇异坐标变换

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \xi(x)^T & \eta^T \end{bmatrix} \quad (7.5a)$$

其中  $\xi(x) = [\xi_1 \cdots \xi_r]^T = [h(x) \ L_f h(x) \ \cdots \ L_f^{r-1} h(x)]^T$ ， $\eta = [\eta_1 \ \eta_2 \ \cdots \ \eta_{n-r}]$

可将原来的系统变成如下系统

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2$$

...

$$\dot{\xi}_{r-1} = \xi_r$$

$$\dot{\xi}_r = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u$$

(7.5b)

$$\dot{\eta} = p(\eta, \xi)$$

$$y = \xi_1$$

$\eta$ 可通过求解如下约束得到  $L_g \eta(x) = 0$

因此通过坐标变换式 (7.5a) 可将非线性系统局部线性化。

### 7.3.3 输入-状态线性化条件

对于仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (7.6)$$

非线性函数 $f$ 、 $g$ 在定义域内足够光滑, 没有定义输出。如果通过反馈 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ , 存在一个同胚变换, 状态变换 $z = T(x)$ 将非线性系统转化为形如

$$\dot{z} = Az + Bv$$

其中,  $(A, B)$ 为可控的, 则称非线性系统是输入-状态线性化。

**引理1** 对于系统(7.6) 状态精确线性化有解的充分必要条件是: 存在合适输出函数 $y=h(x)$ , 使得

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

在 $x_0$ 点的相对阶为 $n$ .

上述条件需要寻找输出函数 $y=h(x)$ ，下面给出一种简化条件：

**引理1** 对于系统 (7.6), 在 $x_0$ 点附近处可状态精确线性化的充分必要条件是：

(1) 矩阵 $\begin{bmatrix} g(x_0) & ad_f g(x_0) & \cdots & ad_f^{n-1} g(x_0) \end{bmatrix}$  秩为 $n$ ：

(2) 分布  $D = span \begin{bmatrix} g & ad_f g & \cdots & ad_f^{n-2} g \end{bmatrix}$  在 $x_0$ 的一个邻域内是对合分布。即对任意  $\tau_1, \tau_2 \in D$  , 李括号运算  $[\tau_1, \tau_2] \in D$  。

说明：

$ad_f g$  表示李括号，定义为

若 $f(x)$  与  $g(x)$  为  $R^n$  上的两个向量场, 李括号运算定义为：

$$ad_f g = [f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot f - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g$$

具体线性化算法：

(1) 构造向量场  $g, ad_f g, \cdots, ad_f^{n-1} g$  ；

(2) 检验是否满足对合条件和满秩条件;

(3) 根据下列条件获得输出函数 $y=h(x)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} [g(x) \quad ad_f g \quad \cdots \quad ad_f^{n-2} g] = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} ad_f^{n-1} g \neq 0$$

(4) 计算状态变换  $z(x) = [h(x) \quad L_f h(x) \quad \cdots \quad L_f^{n-1} h(x)]^T$

输入变换

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}$$

**例5** 求解如下非线性系统在原点处的精确状态线性化问题

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

其中,  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3$  为系统的状态, 而向量场 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 定义

如下

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_2 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

**解：**先判断该系统能否实现精确线性化，先计算如下的向量场

$$ad_f g(x) = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot f - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_2 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & x_3 & 1+x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1+x_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ -(1+x_1)(1+2x_2) \end{bmatrix}$$

$$ad_f^2 g(x) = [f, ad_f g] = \frac{\partial(ad_f g)}{\partial x} \cdot f - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot ad_f g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1-2x_2 & -2-2x_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_2 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & x_3 & 1+x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1+x_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ -(1+x_1)(1+2x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+x_1)(1+x_2)(1+2x_2) - x_1 x_3 \\ x_3(1+x_2) \\ -x_3(1+x_2)(1+2x_2) - 3x_1(1+x_3) \end{bmatrix}$$

对于原点  $x_0 = 0$ ，矩阵

$$[g(x_0) \quad ad_f g(x_0) \quad ad_f^2 g(x_0)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

以上的秩为**3**，满足引理**1**的条件（**1**）。对于条件（**2**）进行判断

$$D = \text{span} \{ [g \quad ad_f g] \} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ -(1+x_1)(1+2x_2) \end{bmatrix} \right\}$$

的对合性。

$$\begin{aligned} [g(x) \quad ad_f g(x)] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ (1+2x_2) & -2(1+x_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ -(1+x_1)(1+2x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 \\ -(1+x_1)(3+4x_2) \end{bmatrix} \in D \end{aligned}$$

因此，分布**D**为对合分布，满足条件（**2**）。

为了确定输出函数  $y=h(x)$ ，需要求解一下得到微分方程

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1+x_2 & x_1 \\ -x_3 & -(1+x_3)(1+2x_2) \end{bmatrix} = 0$$

展开后得

$$\begin{cases} (1+x_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \\ x_1 \frac{\partial h}{\partial x_2} - (1+x_1)(1+2x_2) \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

显然， $h(\mathbf{x})=x_1$ 是微分方程组的一个解，因此 $y=x_1$ 。

$$L_f h(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_2 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix} = x_3(1+x_2)$$

$$L_f^2 h(x) = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & 1+x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_2 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix} = x_1 x_3 + x_2(1+x_1)(1+x_2)$$

定义如下的非线性变换

$$\begin{aligned} z(x) = \Phi(x) &= \begin{bmatrix} h(x) & L_f h(x) & L_f^2 h(x) \end{bmatrix}^T \\ &= [x_1 \quad x_3(1+x_2) \quad x_1 x_3 + x_2(1+x_1)(1+x_2)]^T \end{aligned}$$

该变换的雅克比矩阵为

$$\nabla \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 1+x_2 \\ x_3 + x_2(1+x_2) & (1+x_1)(1+2x_2) & x_1 \end{bmatrix}$$

因为  $\det(\nabla \Phi) \neq 0$ ，因此上述非线性坐标变换为微分同胚映射。

定义输入变换

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x) + \beta(x)v \\ \alpha(x) &= -\frac{L_f^3 h(x)}{L_g L_f^2 h(x)} \quad \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^2 h(x)} \end{aligned}$$

则可将原来的非线性系统转化为可控线性系统

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

知识点:

1.反馈线性化基本思路;

2.利用微分几何的李代数方法,对仿射非线性系统进行精确线性化的条件及算法。