文章编号：1000－7598 (2011)增刊 2－0666－07

基于统一强度理论的岩质边坡稳定动安全系数计算

刘建军[1]，李跃明[1]，车爱兰[2]

（1. 西安交通大学 强度与振动教育部重点实验室，西安 710049；
2. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院，上海 200240）

摘　要：岩质边坡稳定性分析中常用的Mohr-Coulomb、Drucker-Prager屈服准则，其未考虑中间主应力效应或拉压不等效应，较难反映三维复杂边坡空间应力状态。统一强度理论包含了一系列破坏准则，通过调整参数*b*可反映中间主应力或中间主切应力的影响程度。利用ABAQUS开发了基于统一强度理论材料子程序(UMAT)，首先以三维含结构面岩质边坡为例，采用强度折减法，分别计算 *b* 为0、0.25、0.5、0.75 与 1 共5种考虑中间主应力不同程度情况下三维含结构面岩质边坡动安全系数曲线。计算结果表明：不同 *b* 值情况下所得动安全系数数值不同，但曲线变化形状一样，最小安全系数均发生在相同时刻；另外，为更清晰地了解三维真实应力状态对安全系数的影响，从三维岩质边坡中抽取二维剖面进行了同样的计算。结果表明，在相同 *b* 值情况下，三维模型计算所得安全系数较二维模型大；随着 *b* 的增大，安全系数增大，说明不考虑中间主应力的二维计算结果低估了安全系数的大小，即三维真实应力状态下的边坡应具有更高的稳定性。

关　键　词：统一强度理论；岩质边坡；动安全系数；强度折减；地震载荷
中图分类号：TU 457　　**文献标识码：**A

Computation of dynamic safety factor of rock slope stability based on unified strength theory

LIU Jian-jun[1]，　LI Yue-ming[1]，　CHE Ai-lan[2]

（1. MOE Key Laboratory for Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;
2. School of Naval Architectural, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China）

Abstract: The Mohr-Coulomb and Drucker-Prager, yield criteria commonly used in slope stability analysis, which have not considered the intermediate principal stress effect or the differential effect of tension and compression, are difficultly to reflect the three dimensional stress state of rock slope. Unified strength theory contains a series of failure criteria; and the parameter *b* of this theory reflects the intermediate principal stress or the intermediate principal shear stress effect. This paper developed a user material subroutine (UMAT) based on unified strength theory using ABAQUS; taking a three-dimensional slope including discontinuities as a numerical example, and using strength reduction approach to calculate the dynamic safety factor curves for three-dimensional rock slope under five conditions (b = 0、0.25, 0.5, 0.75 and 1)with different intermediate principal stress extents. The results show that the safety factor varies with the *b*; but the curve shapes are similar; the smallest value occurs at same time. To understand the influence of intermediate principal stress on the safety factor clearly, a two-dimensional cross-section is extracted from the three-dimensional slope to carry out the calculation under same conditions. The results show that safety factor of three-dimensional model is larger than two-dimension's under the same parameter *b*. The safety factor is increasing with *b* increases. The two-dimensional results underestimate the safety factor magnitude; and the reality stress state of three-dimensional rock slope should be of higher stability.

Key words: unified strength theory; rock slope; dynamic safety factor; strength reduction; seismic load

1　引　言

对于岩质边坡在地震载荷下的稳定性分析，本文将动安全系数曲线计算方法应用到地震载荷下三维含结构面岩质边坡稳定性分析中。在岩质边坡稳定性分析数值计算[1–4]中，经常采用的是Drucker-

收稿日期：2011-04-21
基金项目：国家自然科学基金项目（No. 11072187）。
第一作者简介：刘建军，男，1984 年生，硕士研究生，主要从事岩土边坡稳定性方面的研究工作。
通讯作者简介：李跃明，男，1961 年生，教授，博士生导师，主要从事结构动力学响应、材料强度理论方面的研究工作。E-mail: liyueming@mail.xjtu.edu.cn

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Prager屈服准则或者Mohr-Coulomb屈服准则。Drucker-Prager准则不能体现岩土类材料拉压不等效应，计算结果与实际情况会有差异。Mohr-Coulomb准则简单实用，便于工程应用，但由于其不能反映中间主应力效应，且其在π平面极限线是所有外凸形极限轨迹的下限，计算结果偏于保守。1991年俞茂宏[5–7]提出统一强度理论，弥补了上述不足，它可以考虑材料的中间主应力效应、拉压不等效应与区间效应，在偏平面上几乎可以模拟各种材料，发挥材料的强度潜能。

ABAQUS有限元软件具有较为广泛的材料模拟特性，包含了岩土工程中常用的Mohr-Coulomb模型、Drucker-Prager模型与剑桥模型。它还提供了若干个用户子程序接口，用户可以代码的形式来扩展主程序的功能。

本文利用ABAQUS提供的二次开发用户子程序接口，开发了基于统一强度理论的用户材料模型的子程序。统一强度理论具有可反映各种载荷情况下复杂应力状态及中间主应力对材料强度影响的优势，利用其与强度折减法，对含结构面岩质边坡进行动载荷下安全系数曲线的计算，最后得到三维边坡复杂应力状态下不同屈服准则的动安全系数曲线，结果表明在压应力状态下考虑中主应力的安全系数在数值上较不考虑中主应力的安全系数高。

2　基本理论与计算方法

2.1　统一强度理论

强度理论的发展已有百多年历史，一般强度理论都只能适用于某一类特定的材料，如Tresca最大剪应力准则只适用于剪切屈服极限τ_s为拉伸屈服极限σ_s的一半的材料；Mises屈服准则（第四强度理论）只适用于$\tau_s=0.577\sigma_s$的材料；Mohr-Coulomb强度理论只适用于剪切强度极限τ_0、拉伸强度极限σ_t和压缩强度极限σ_c关系为$\tau_0=\dfrac{2\sigma_c\sigma_t}{2\sigma_c+\sigma_t}$的材料。因而它们都是一种只能适用于某一类材料的单一强度理论。

俞茂宏于1990年提出统一强度理论[5]，认为：当作用于双剪单元体上的两个较大剪应力及其面上的正应力影响函数到达某一极限值时，材料开始发生破坏。其数学表达式为

$$\left.\begin{aligned} F=\tau_{13}+b\tau_{12}+\beta(\sigma_{13}+b\sigma_{12})=c,\\ \tau_{12}+\beta\sigma_{12}\geqslant\tau_{23}+\beta\sigma_{23}\\ F'=\tau_{13}+b\tau_{23}+\beta(\sigma_{13}+b\sigma_{23})=c,\\ \tau_{12}+\beta\sigma_{12}\leqslant\tau_{23}+\beta\sigma_{23}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

式中：b为反映中间主剪应力作用的系数；β为反映正应力对材料破坏的影响系数；c为材料的强度参数。统一强度理论的π平面极限线如图1所示。

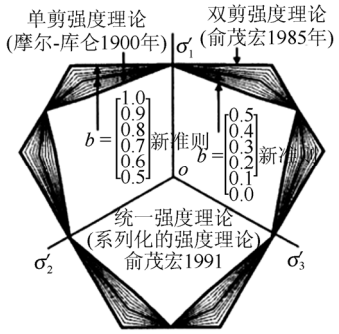


图 1　统一强度理论的π平面极限线

Fig.1　Limit lines of unified strength theory on π plane

采用压缩强度σ_c，则统一强度理论表达式（1）可表示为

$$\left.\begin{aligned} F=\frac{1}{\alpha}\sigma_1-\frac{1}{1+b}(b\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_c,\quad \sigma_2\leqslant\frac{\sigma_1+\alpha\sigma_3}{1+\alpha}\\ F'=\frac{1}{\alpha(1+b)}(b\sigma_2+\sigma_1)-\sigma_3=\sigma_c,\sigma_2\geqslant\frac{\sigma_1+\alpha\sigma_3}{1+\alpha}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

式中：α为材料拉压强度极限之比，$\alpha=\dfrac{\sigma_t}{\sigma_c}$。

参数b、α取不同的值，可获得现有的一些强度理论或屈服准则以及一些新的准则[6]，尤其当$b=0$、$\alpha=1$，双剪统一强度理论蜕化为Tresca准则；$\alpha=1$、$b=1/2$时为Mises准则的线性逼近；$b=0$时为Mohr-Coulomb理论，它在π平面极限线为内不等边六角形；$\alpha=1$、$b=1$时为双剪屈服准则；$b=1$时为广义双剪强度理论；在理论上，当$0\leqslant b\leqslant1$时统一强度理论可产生出一系列新的强度准则，这些准则可以适用于各种工程材料，且便于工程计算使用。

由于在岩土工程中通过试验直接得到材料剪切强度（黏聚力）c_0和正应力影响系数φ（摩擦角）两个参数，β和c与它们的关系如式（3）、（4）所示[8]，为下面的动安全系数曲线的计算做准备。

$$\beta=\sin\varphi\quad(3)$$

$$c=2c_0\cos\varphi\quad(4)$$

2.2　动安全系数计算方法

动安全系数即安全系数动态化，认为安全系数数是随时间变化的。应用有限元强度折减法，根据输入地震波载荷，按一定时间间隔计算各个时间节点上的安全系数值，最后由此一系列数值作出动安全系数曲线。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2.2.1 安全系数定义

有限元强度折减法中，安全系数定义为沿滑动面的抗剪强度与滑动面上实际剪力的比值[8–9]。根据统一强度理论数学表达式（1），本文的安全系数具体表达为

$$\left.\begin{aligned} w=\frac{\int_0^l\left[c-\beta\left(\sigma_{13}+b\sigma_{12}\right)\right]\mathrm{d}l}{\int_0^l\tau\,\mathrm{d}l},\\ \tau_{12}+\beta\sigma_{12}\geqslant\tau_{23}+\beta\sigma_{23}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} w'=\frac{\int_0^l\left[c-\beta\left(\sigma_{13}+b\sigma_{23}\right)\right]\mathrm{d}l}{\int_0^l\tau\,\mathrm{d}l},\\ \tau_{12}+\beta\sigma_{12}\leqslant\tau_{23}+\beta\sigma_{23}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

将式（5）两边同除以 w，则变为

$$\left.\begin{aligned} 1=\frac{\int_0^l\left[\frac{c}{w}-\frac{\beta}{w}\left(\sigma_{13}+b\sigma_{12}\right)\right]\mathrm{d}l}{\int_0^l\tau\,\mathrm{d}l},\\ \tau_{12}+\beta\sigma_{12}\geqslant\tau_{23}+\beta\sigma_{23}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 1=\frac{\int_0^l\left[\frac{c}{w}-\frac{\beta}{w}\left(\sigma_{13}+b\sigma_{23}\right)\right]\mathrm{d}l}{\int_0^l\tau\,\mathrm{d}l},\\ \tau_{12}+\beta\sigma_{12}\leqslant\tau_{23}+\beta\sigma_{23}\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

式中：$\frac{c}{w}$、$\frac{\beta}{w}$ 两者均为黏聚力 c_0 与内摩擦角 φ 的函数。

式（6）左边等于1，这表明：当强度折减 w 以后坡体达到极限状态，有限元强度折减法在本质上与传统极限平衡法一致。

2.2.2 有限元强度折减法与失稳判据

有限元强度折减法[10]可方便使用于非均质材料，能够直接求解出临界滑动面，同时可以考虑岩土体内部的应力-应变关系，反映出岩土结构变形破坏的全过程和局部变形对边坡稳定性的影响。所谓强度折减，就是在理想弹塑性有限元计算中将边坡岩土体抗剪切强度参数逐渐降低直至其达到破坏状态为止，程序可以自动根据弹塑性计算结果得到破坏滑动面（塑性应变和位移突变的地带），同时得到边坡的强度安全系数 w。于是，有：

$$c'=\frac{c_0}{w} \quad (7)$$

$$\tan\varphi'=\frac{\tan\varphi}{w} \quad (8)$$

式中：w 为强度折减系数。

有限元强度折减法分析边坡稳定性的一个关键问题是如何根据计算结果来判别边坡是否处于破坏状态。目前的失稳判据主要有3类：①在计算过程中以计算不收敛性作为边坡失稳的标志；②以广义塑性应变或等效塑性应变从坡脚贯通到坡顶作为边坡失稳的标志；③以关键点的力或位移突变作为边坡失稳的标志。本文经过大量计算，发现 3 种常用判据计算所得结果基本一致，故本次计算采用收敛性判据来确定最终安全系数。

3 基于统一强度理论的二次开发

3.1 用户子程序 UMAT 流程

UMAT子程序的核心就是给出定义材料本构模型的雅可比矩阵，即应力增量对应变增量的变化率 $\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}$。由于UMAT子程序在单元的积分点上调用，增量步开始时，主程序将通过接口路径进入UMAT，将当前单元积分点变量的初始值传递给UMAT的相应变量；在UMAT结束时，变量的更新值再通过接口返回主程序。

ABAQUS在求解的过程中，需记录与求解过程相关的变量，这些变量可以储存在子程序的STATEV数组中，同时可以定义储存的数量。本文所述的本构方程定义了13个与求解过程相关的变量，即6个弹性应变、6个塑性应变、1个塑性应变增量参数，材料常数为6个，它们的含义如表1所示。

表 1 UMAT材料常数和状态变量的含义

Table 1 Material parameters and state variable definition of UMAT

STATEV 数值			PROPS 数值					
1～6	7～12	13	1	2	3	4	5	6
弹性应变分量	塑性应变分量	等效塑性应变	弹性模量	泊松比	α	b	黏聚力c	硬化系数h

3.2 弹塑性状态的判断

弹塑性状态的计算在每一增量步或每次迭代求得位移增量或其修正量以后，需决定新的弹塑性状态，也就是判断材料是否进入塑性状态，基本步骤

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

如下[11]：

（1）计算应变增量

$$\{\Delta\varepsilon\}=[B]\{\Delta\delta\} \tag{9}$$

（2）计算当前增量步应力与应力增量

$$\{\Delta\sigma^{\mathrm{e}}\}=[D]\{\Delta\varepsilon\} \tag{10}$$

$$\{\sigma\}^{t+\Delta t}=\{\sigma\}^{t}+\{\Delta\sigma^{\mathrm{e}}\} \tag{11}$$

（3）对单元内各个积分点计算$[D^{\mathrm{ep}}]$值

①计算屈服函数$f(\{\sigma\}^{t}+\{\Delta\sigma^{\mathrm{e}}\})$的值

若$f(\{\sigma\}^{t}+\{\Delta\sigma^{\mathrm{e}}\})\leqslant 0$，则高斯点在给定应变增量下将保持弹性状态，由应力-应变关系知：

$$\{\Delta\sigma\}=\{\Delta\sigma^{\mathrm{e}}\} \tag{12}$$

若$f(\{\sigma\}^{t}+\{\Delta\sigma^{\mathrm{e}}\})>0$且$f(\{\sigma\}^{t})<0$，则高斯点在给定应变增量下将由弹性状态进入弹塑性状态，存在一个比例因子r，使得

$$f(\{\sigma\}^{t}+r\{\Delta\sigma^{\mathrm{e}}\})=0 \tag{13}$$

②计算弹塑性部分应力增量

$$\{\Delta\sigma^{\mathrm{p}}\}=\int_{t}^{t+\Delta t}\left[D^{\mathrm{ep}}\right]\{\mathrm{d}\varepsilon\} \tag{14}$$

③计算本增量步或迭代结束时刻的$\{\sigma\}^{t+\Delta t}$

$$\{\sigma\}^{t+\Delta t}=\{\sigma\}^{t}+r\{\Delta\sigma\}+\{\Delta\sigma^{\mathrm{p}}\} \tag{15}$$

4　岩质边坡动安全系数计算

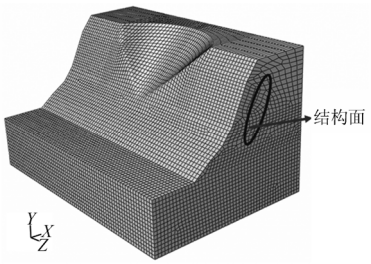
本节基于上述 UMAT 子程序，通过强度折减法，计算含结构面的三维岩质边坡在动载荷下安全系数-时程曲线，同时通过取不同的b参数，分析其对岩质边坡稳定性的影响。

4.1　复杂应力状态下边坡动安全系数计算

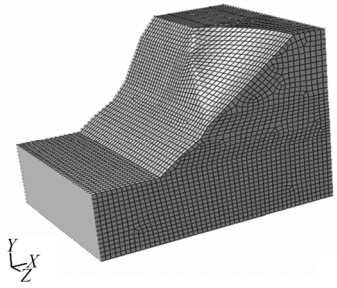
首先，建立三维含结构面岩质边坡，如图2所示，岩体与结构面物理力学参数取自某深基坑边坡的勘探资料，如表2所示。为讨论b参数对岩质边坡动安全系数曲线的影响，b分别取0、0.25、0.50、0.75、1.00。

在进行安全系数计算时，对模型顶面施加8.0×10^{6} N（依据某深基坑边坡稳定性计算条件）压力载荷并考虑自重，在模型底部节点施加地震波。对于无限大地基的变形与应力问题，可把有限元与无限元结合起来处理这类近、远场同时存在的问题，所以对三维有限元模型四周采用无限元约束，底面进行Y、Z方向约束。对于地震波，从模型底面沿X方向输入。该三维边坡有限元模型的约束与载荷分别如图 3 所示。

地震波选取中国上海地区 50 年超越概率 63%



(a) 岩质边坡有限元模型



(b) 结构面形状

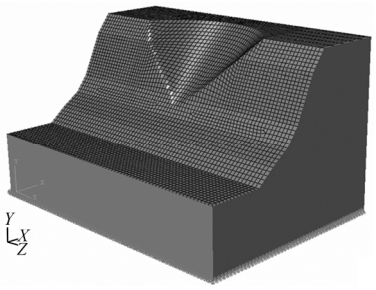
图 2　三维边坡有限元模型与结构面图

Fig.2　FEM model and structural plane of three-dimensional slope

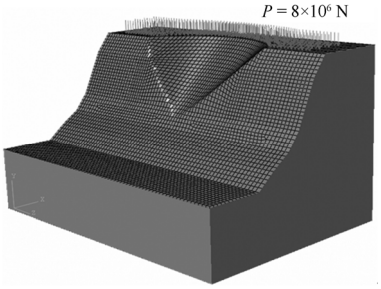
表 2　岩体与结构面的物理力学参数

Table 2　Rock mass and structural plane of physico-mechanical parameters

名称	密度 /(g/cm^3)	弹性模量 /GPa	泊松比	黏聚力 /MPa	摩擦角 /(°)
岩体	2.80	5.5	0.32	5.0	31.4
结构面	2.56	0.5	0.30	0.8	35.0



(a) 约束示意图



(b) 载荷示意图

图 3　三维边坡有限模型约束与载荷图

Fig.3　Constraints and load of three-dimensional FEM slope model

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

人工合成基岩处时程曲线，其加速度-时程曲线以及地震波的频谱特性见图4、5所示。

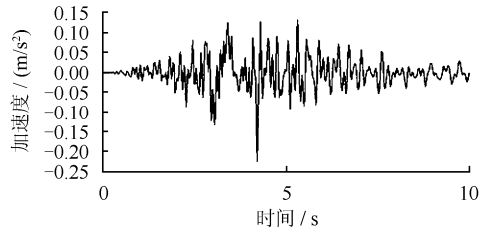


图 4 水平向加速度-时程曲线

Fig.4 Horizontal acceleration time curve

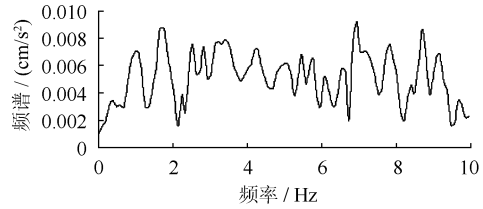


图 5 地震波的频谱特性

Fig.5 The spectral characteristics of seismic waves

动安全系数曲线具体计算过程如下：

（1）对模型进行平衡地应力的计算，这里只考虑由重力引起的初始应力场，使用 Geo 分析步进行求解；

（2）将地震波施加于模型底部节点，以 0.1 s 为间隔，提取各个时间节点的 Mises 应力值作为下一步强度折减的初始应力场；

（3）在边坡上表面施加压力载荷，应用强度折减法计算各时间节点的安全系数。

为检验程序的正确性，首先采用 ABAQUS 原有的 Mohr-Coulomb 准则进行各时刻安全系数计算，依此作出动安全系数曲线。然后使用本文开发的材料子程序 UMAT(令 b =0，此时统一强度理论退化为 Mohr-Coulomb 理论)，进行同样的安全系数计算，得到动安全系数曲线，将两者进行对比，两者完全重合，说明开发的材料子程序（UMAT）是正确的。

本文三维岩质边坡的动安全系数计算时程取 10s，时间间隔为 0.1 s，分别计算了不同 b 值 5 种情况下动安全系数，并作出时程曲线如图 6 所示。由图可知：

（1）不同 b 值情况下所求解的动安全系数曲线形状是一样的，且最小安全系数均发生在相同时刻。

（2）对于含结构面的岩质边坡，为计算不同时刻安全系数，需对岩体材料强度进行多次折减，当折减到一定数值后，会出现计算不收敛与关键点位移发生突变，同时在模型中出现了明显的塑性区（即 PEEQ），其中塑性区主要发生在模型中的结构面，如图 7 所示。

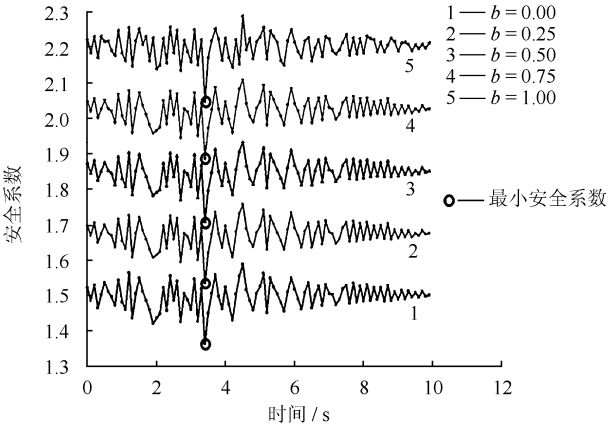
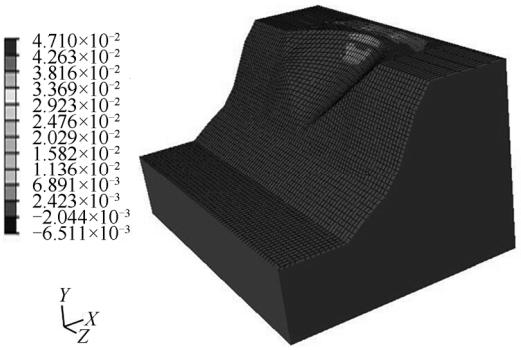
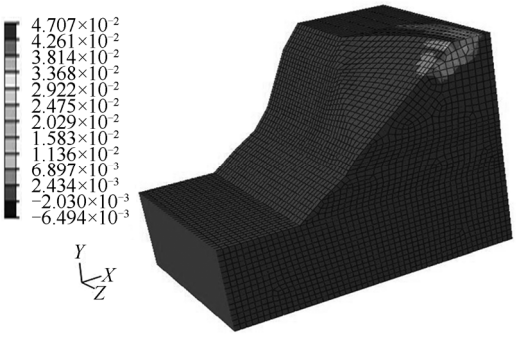


图 6 三维岩质边坡安全系数曲线

Fig.6 Safety factor curves of three-dimensional rock slope



(a) 整体PEEQ图



(b) 剖面PEEQ图

图 7 等效塑性应变PEEQ图

Fig.7 Equivalent plastic strains (PEEQ)

（3）相同的岩体边坡有限元模型，采用不同 b 值，对应着不同的强度屈服准则，将得到不同的安全系数，随着 b 值的增大，边坡所能承受的极限载荷也在增大，材料的强度可得到发挥。

（4）统一强度理论给出了动安全系数曲线的上下界（b = 0 和 1）。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

4.2　平面应变状态下边坡动安全系数计算

为反映三维真实应力状态与平面状态下安全系数计算的差别，下面特从该三维岩质边坡中抽取一剖面计算分析（如图 8 所示），相关物理参数与三维模型相同，边界约束方式与载荷大小也与三维模型相同，如图 9 所示。对二维岩质边坡的动安全系数计算结果如图 10 所示。

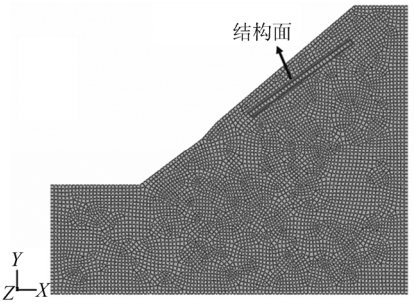


图 8　二维边坡有限模型
Fig.8　Two-dimensional FEM slope model

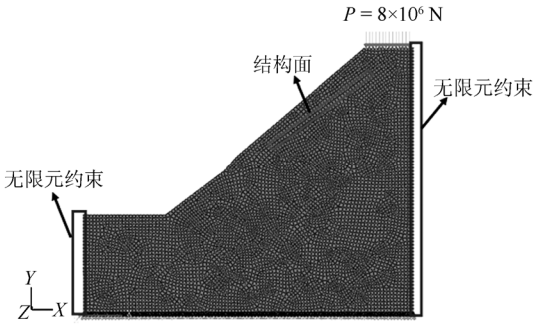


图 9　二维边坡有限模型约束与载荷图
Fig.9　Constraints and load of two-dimensional FEM slope model

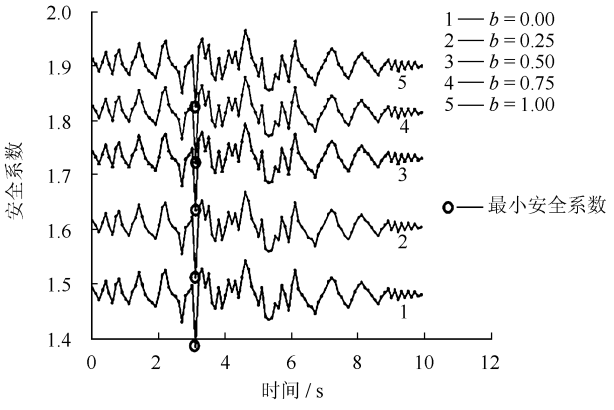


图 10　二维岩质边坡安全系数曲线
Fig.10　Safety factor curves of two-dimensional rock slope

三维复杂应力状态下与平面应变状态下动安全系数计算所得结果（图 6 与图 10）对比可见，当 $b=0$ 时，则统一强度理论退化为 Mohr-Coulomb 理论，即不考虑中间主应力的影响，三维计算结果与二维计算结果很接近。随 b 值的增大，中间主应力效应逐步加重，所以二维与三维计算结果的差别也越来越大。当 $b=0.50$ 时，三维情况下最小安全系数较二维情况下最小安全系数大 6%；而当 $b=1.00$ 时，三维较二维最小安全系数大 14%。

依据二维与三维岩质边坡在各种 b 值情况下计算所得最小安全系数值作出该值与 b 值之间关系曲线，如图11所示。可以看出，三维最小安全系数曲线斜率较二维大，且随着 b 值增大，三维模型与二维模型最小安全系数间差异越大，说明中间主应力的效应在三维模型中的作用。

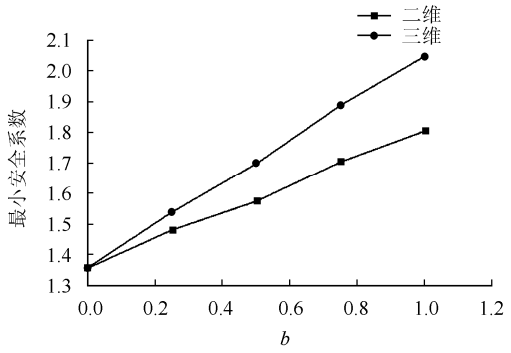


图 11　最小安全系数与*b*值之间关系曲线
Fig.11　The relation curves between smallest safety factor and value of *b*

5　结　论

岩质边坡稳定性分析中常用的Mohr-Coulomb和Drucker-Prager屈服准则，未考虑中间主应力效应或拉压不等效应。为反映边坡三维复杂应力状态，利用ABAQUS软件提供的二次开发接口程序，本文开发了基于统一强度理论的材料子程序UMAT。针对地震载荷作用下的三维含结构面岩质边坡模型，通过采用有限元强度折减法与开发的子程序，计算获得了复杂应力状态下其动安全系数曲线。在此基础之上，为讨论不同准则对岩质边坡动安全系数曲线的影响，计算 b 分别取 0.00、0.25、0.50、0.75、1.00时的动安全系数曲线。为说明三维状态中间主应力存在的效应，从该三维模型中抽取其二维剖面，进行平面应变下动安全系数曲线计算。经上述分析与计算之后，得如下结论：

（1）在相同 b 值情况下，三维计算所得安全系数值较二维计算所得的值不同，说明中间主应力的效应需要在计算中予以考虑。三维计算所得安全系数值大，说明不考虑中主应力的安全系数偏于保守。

（2）在三维岩质边坡模型计算中，不同 b 值情况下所得动安全系数数值不同。且随着 b 增大，二者差异越来越大，说明不同准则所反映出的中主应

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

力效应的程度也不同。统一强度理论可以方便地用于不同b值下的安全系数预测，且给出了动安全系数的上下界。

参 考 文 献

[1] 陈祖煜. 土质边坡稳定性分析-原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.

[2] 刘华丽, 朱大勇, 刘德富. 边坡安全系数的多解性讨论[J]. 岩土力学, 2007, 28(8): 1661－1664.
LIU Hua-li, ZHU Da-yong, LIU De-fu. Discussion on multiple solution of safety factor of a slope[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2007, 28(2): 1661－1664.

[3] 李海波, 肖克强, 刘亚群. 地震载荷作用下顺层岩质边坡安全系数分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(12): 2385－2394.
LI Hai-bo, XIAO Ke-qiang, LIU Ya-qun. Factor of safety analysis of bedding rock slope under seismic load[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2007, 26(12): 2385－2394.

[4] 马芳芳. 基于地震动力时程反应的有限元边坡稳定性分析[D]. 大连: 大连理工大学, 2005.

[5] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1－9.
YU Mao-hong. Unified strength theory for geomaterials and its applications[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1994, 16(2): 1－9.

[6] 俞茂宏, 杨松岩, 范寿昌, 等. 双剪统一弹塑性本构模型及其工程应用[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(6): 2－10.
YU Mao-hong, YANG Song-yan, FAN Shou-chang, et a1. Twin shear unified elastoplastic constitutive model and its applications[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1997, 19(6): 2－10.

[7] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

[8] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3): 343－346.
ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min, et al. Analysis of safety factor of slope by strength reduction FEM[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(3): 343－346.

[9] 栾茂田, 武亚军, 年廷凯. 强度折减有限元法中边坡失稳的塑性区判据及其应用[J]. 防灾减灾工程学报, 2008, 23(3): 1－8.
LUAN Mao-tian, WU Ya-jun, NIAN Ting-kai. A criterion for evaluating slope stability based on development of plastic zone by strength reduction FEM[J]. **Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering**, 2003, 23(3): 1－8.

[10] 张鲁渝, 郑颖人, 赵尚毅. 有限元强度折减系数法计算土坡稳定安全系数的精度研究[J]. 水利学报, 2003, (1): 21－27.
ZHANG Lu-yu, ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi, et al. The feasibility study of strength-reduction method with FEM for calculating safety factors of soil slope stability[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2003, 20(1): 21－27.

[11] 杨曼娟. ABAQUS用户材料子程序开发及应用[D]. 武汉: 华中科技大学, 2005.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net