

中国科学院研究生院
研究生专业基础课程

量子场论简明教程

乔从丰¹

中国科学院研究生院
物理科学学院

草起于戊子金鼠年八月 中关村新科祥园三人居，辛卯年三校

¹通讯地址:北京市 玉泉路甲19号, 邮编: 100049; Email: qiaocf@gucas.ac.cn

Elementary Courses for Theoretical Physics
Chinese Academy of Science

Introduction to Quantum Field Theory

Cong-Feng Qiao

College of Physical Sciences
Graduate University, Chinese Academy of Science

August, 2008

Draft Prepared in the Middle of Chinese Golden Rat Year

at

XinKeXiang Garden, SanRen Suite

前言

量子场论是二十世纪人类认识世界的最高理论成就之一，她是在量子力学和经典场论基础之上，结合一些基本假设建立起来的公理化体系。量子场论描述的是微观高能系统，其正确性已为大量的实验所证实，并正在进一步得到应用和验证。本简明教程阐述量子场论的基本理论框架，在正则量子化框架下对标量场、旋量场和矢量场（电磁场）进行量子化。主要关心的是量子场论的建立及应用，因此更多的篇幅将放在理论对实验可测的微观过程的描述上，对很多有关量子场的深刻性质方面的内容会一带而过，甚至不去提及。对这方面有需求和感兴趣的读者，应当不难找到合适的参考书加以补充。

量子场论发展近百年，其内容之丰富、思想和技巧之深刻远非一本简明教程所能涵盖，更别说作者本身水平有限，因此不到之处还望读者见谅。文中有些公式的推导只给出了一个大致的线索，详细的过程要靠读者自己补充完整。

关键词：量子场，量子化，微扰论，可重整性，散射截面，衰变宽度

PREFACE

Quantum Field Theory(QFT) is one of the most extraordinary achievements of mankind accomplished in exploring the natural in Twentieth Century.

Key words: Quantization

目 录
--

- 1 序论** **1**
 - 1.1 单位制、度规及常用符号 2
 - 1.2 广义坐标、相互作用原理、共轭动量及运动方程 5
 - 1.3 谐振子量子化 7

- 2 场及对称性** **11**
 - 2.1 定域场及其运动方程 11
 - 2.2 诺特定理与守恒定律 (Noether's Theorem and Conservation Laws) . . . 14
 - 2.3 场的哈密顿形式 (The Hamilton Formalism) 20

- 3 场的正则量子化** **23**
 - 3.1 克莱茵-戈登 (Klein-Gorden) 场及其量子化 23
 - 3.1.1 实标量场 23
 - 3.1.2 复标量场 31
 - 3.2 狄拉克场 35
 - 3.2.1 狄拉克方程(Dirac Equation)的建立 36
 - 3.2.2 负能解与狄拉克空穴理论 (Dirac hole) 45
 - 3.2.3 自由粒子的平面波解和投影算符 46
 - 3.2.4 旋量场的量子化 51
 - 3.2.5 外尔旋量 (Weyl Spinors) 55
 - 3.3 电磁场及其量子化 57
 - 3.3.1 麦克斯韦方程组 58
 - 3.3.2 电磁场的量子化 60

3.3.3	电磁场在动表象中的展开	62
3.4	C,P,T 变换与 CPT 定理	67
3.4.1	宇称变换	68
3.4.2	电荷共轭变换	69
3.4.3	时间反演	71
3.4.4	CPT定理	72
4	相互作用场和微扰论	73
4.1	粒子场的电磁相互作用	73
4.2	时间演化算符与微扰展开 (perturbative expansion)	75
4.3	威克定理 (Wick's Theorem)	80
4.4	费曼图 (Feynman Diagram) 与费曼规则 (Feynman Rules)	82
5	散射截面与衰变宽度	
	(Scattering Cross Section & Decay Width)	91
5.1	散射截面与宽度的基本公式	91
5.2	电磁散射过程 (Electromagnetic Scattering Processes)	95
5.3	衰变过程举例	100
5.4	法雷 (Furry) 定理	102
6	辐射修正 (Radiative Corrections) 和重整化理论简介 (General Introduction to Renormalization)	105
6.1	真空极化 (Vacuum Polarization)	105
6.2	二阶电子自能和三阶电磁顶角	111
6.3	Ward Identity 和 QED 单圈重整化	115
6.4	QED 发散图形的一般分析	118
A	附录	121
A.1	符号和约定	121
A.2	γ 矩阵的性质	122
A.3	常用的求迹公式	123
A.4	旋量公式	124
A.5	标量场的三动量	125
A.6	旋量场部分公式推导	126

插

图

目

录

表

格

目

录

量子场论是在量子力学和经典场论基础上发展起来的，用于描述高能微观粒子运动及相互作用动的理论，已被广泛地应用于粒子物理和凝聚态物理研究之中。量子场论为描述多粒子系统，尤其是包含粒子产生和湮灭过程的系统，提供了有效的理论框架。非相对论性的量子场论主要被应用于凝聚态物理学，比如描述超导性的BCS理论。而相对论性的量子场论则是当前粒子物理学研究中不可或缺的组成部分。人类目前所认识的自然界有四种基本相互作用，即：强相互作用，电磁相互作用，弱相互作用及万有引力。除引力之外，其它三种相互作用业已证明都可纳入到满足特定对称性的量子场论框架之中。其中，描述电磁相互作用的理论框架，量子电动力学，建立于1920到1950年间，主要的贡献者有保罗·狄拉克（Dirac），弗拉迪米尔·福克(Fock)，沃尔夫冈·泡利(Pauli)，朝永振一郎(Tomonaga)，施温格(Schwinger)，理查德·费曼(Feynman)和戴森(Dyson)等。早期描述弱作用较成功的理论有费米点相互作用理论。后来弱作用和电磁相互作用实现了形式上的统一，通过希格斯机制产生质量，建立了弱电统一的量子规范理论，即GWS（Glashow, Weinberg, Salam）模型。描述强相互作用的理论，即量子色动力学，发端于上世纪六十年代，在七、八十年代得到完善并为实验所肯定。时至今日，量子场论已成为现代理论物理学研究的主流方法和工具。

量子场论发轫于对量子跃迁所发出的光谱强度的计算。1925年马克思·玻恩(Born)和帕斯卡·约当(Pascual Jordan)首先考虑了这个问题。1926年，玻恩、沃纳·海森堡(Heisenber)和帕斯卡·约当运用正则量子化的方法，获得了忽略极化和源项的自由电磁场的量子理论。1927年，狄拉克给出了这个问题的第一个自洽的解决方案。对当时人们唯一知道的经典场——电磁场——的量子化，不可避免地导致了量子场论的出现，因为理论必须处理粒子数改变的情况，例如体系从只包含一个原子的初态变为包

含一个原子和一个光子的终态。

显然，对电磁场的量子化需要符合狭义相对论的要求。1928年约当和泡利证明，场算符的对易关系是洛仑兹不变的。1933年，尼尔斯·玻尔和Leon Rosenfeld将这些对易关系与测量对类空间隔下的场的限制联系起来。狄拉克方程和空穴理论的发展促使人们将相对论中的因果性关系应用到量子场论中，并在福克（Vladimir Fock）工作的基础上由法雷（Wendell Furry）和罗伯特·奥本海默完成了这一工作。将量子力学和狭义相对论结合起来是促使量子场论发展的第二个动机。这条线索对于粒子物理及标准模型的发展很是关键。

1927年，约当将对场的正则量子化方法推广到量子力学中的波函数，并称之为二次量子化。1928年约当和Eugene Wigner发现Pauli不相容原理要求对电子场的量子化需要采用反对易的产生和湮灭算符。自洽而且方便地处理多粒子系统的统计，是促使量子场论发展的第三个动机。这条线索进一步发展为量子多体理论，并对凝聚态物理和核物理产生了重要的影响。

场的正则量子化方法是质点力学中的正则量子化方法向无穷多自由度系统的推广。正则量子化是针对经典场而言的。首先将经典场纳入正则形式（即哈密顿形式），并得到其共轭场。量子化就是将经典场及其共轭场看作希尔伯特空间中的算符，并假设其满足一定的对易或者反对易关系式。

1.1 单位制、度规及常用符号

在量子场论中，一个便于计算的单位制是所谓“自然”单位制（Natural Units）。在这个单位制中取速度[V]、作用量[S]、能量[E]为量纲，并以真空中的光速 c 、约化的普朗克常数（Reduced Plank Constant） $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 、 10^9 电子伏特(GeV)为基本单位。另外，为了计算方便，把描述微观高速现象中频繁出现的常数 c 和 \hbar 隐去，令

$$\hbar = c = 1. \quad (1.1)$$

在厘米、克、秒制（CGS），或国际单位制(SI)中，基本单位是长度[L](厘米)，质量[M](克)，还有时间[T](秒)。这样CGS（或SI）和NU单位制量纲间转换关系为CGS单位制和自然单位制量纲间的转换关系如下：

$$[L] = [V][S][E]^{-1}; [T] = [S][E]^{-1}; [M] = [V]^{-2}[E]. \quad (1.2)$$

$$[V] = [L][T]^{-1}; [S] = [M][L]^2[T]^{-1}; [E] = [M][L]^2[T]^{-2}. \quad (1.3)$$

在自然单位制中，由于

$$[V](c) = 1 = [L]/[T]; [S](\hbar) = 1 = [E][T]; [E](GeV) = [M][c]^2 = [M] \quad (1.4)$$

时间和位移具有相同的量纲；能量和时间的量纲互逆；能量与质量的量纲相同。

CGS制中基本单位换算到自然单位制时，换算关系如下：

$$1cm = (c)^{-1}(\hbar)^{-1}(\epsilon)GeV^{-1} \cdot c \cdot \hbar = 5.05 \times 10^{13}GeV^{-1} \cdot c \cdot \hbar. \quad (1.5)$$

$$1sec = (\hbar)^{-1}(\epsilon)GeV^{-1} \cdot \hbar = 1.52 \times 10^{24}GeV^{-1} \cdot \hbar. \quad (1.6)$$

$$1g = (c)^2(\epsilon)^{-1}GeV \cdot c^{-2} = 0.562 \times 10^{24}GeV \cdot c^{-2}. \quad (1.7)$$

其中，在保留三位有效数字时 $(c) = 3.00 \times 10^{10}$ ， $(\hbar) = 1.05 \times 10^{-27}$ ， $(\epsilon) = 1.60 \times 10^{-3}$ 。例如按照(1.5)在计算中得到 $5.05 \times 10^{13}GeV^{-1}$ 的位移，实际就是一厘米。

反之，自然单位制中基本单位换算到CGS制时，换算关系如下：

$$1GeV^{-1} \cdot c \cdot \hbar = (c)(\hbar)(\epsilon)^{-1}cm = 0.198 \times 10^{-13}cm. \quad (1.8)$$

$$1GeV^{-1} \cdot \hbar = (\hbar)(\epsilon)^{-1}sec = 0.658 \times 10^{-24}sec. \quad (1.9)$$

$$1GeV \cdot c^{-2} = (c)^{-2}(\epsilon)g = 1.78 \times 10^{-24}g. \quad (1.10)$$

按照(1.10)也就是说，在自然单位制下计算中得到质量为 $1GeV$ 就等于 $1.78 \times 10^{-24}g$ ($1eV = 1.6 \times 10^{-19}J$, $1N = 10^5dn$, $1J = 10^7erg$)。在如上(1.5)-(1.7)等式的右面，以及(1.8)-(1.10)等式的左面， c 和 \hbar 可以隐去不写。

在本教材中，我们选取目前高能物理理论计算中使用较多的，闵科夫斯基(Minkowski)空间的度规张量(Metric Tensor)的定义：

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

其中，希腊字母取0, 1, 2, 3, 代表t, x, y, z。相同的指标出现两次表示对该指标的求和（爱因斯坦约定），这样逆变(Contravariant)和协变(Covariant)位置矢量可以表

达为

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}); \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0, -\vec{x}). \quad (1.12)$$

一般地，我们将上指标称为逆变指标，下指标称为协变指标。相应地可以定义逆变张量和协变张量。两矢量的标量积为

$$p \cdot x = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}. \quad (1.13)$$

对于有质量的粒子

$$p^2 = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = p^\mu p_\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2. \quad (1.14)$$

动量算符

$$p^\mu = i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = ig^{\mu\nu}\partial_\nu = (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla}) = (p^0, p^i). \quad (1.15)$$

根据度规张量的定义，

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\rho} = g_\rho^\nu = \delta_\rho^\nu. \quad (1.16)$$

δ_ρ^ν 是克罗内克符号 (Kronecker symbol),

$$\delta_\rho^\nu = \begin{cases} 1 & (\nu = \rho) \\ 0 & (\nu \neq \rho) \end{cases}. \quad (1.17)$$

在量子场论中还会常用到列维·奇维塔 (Levi-civita) 全反对称张量

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = \begin{cases} 1 & (0, 1, 2, 3) \text{ and its even times of permutation} \\ -1 & \text{Odd times of permutation of indices } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{Others} \end{cases}. \quad (1.18)$$

和达朗贝尔算符(d'Alembertian)

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2. \quad (1.19)$$

练习:

- 1) 根据定义求 ϵ_{0123} 的值。
- 2) 证明: $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\mu'\nu'\lambda\rho} = 2(\delta_{\nu'}^\mu \delta_{\mu'}^\nu - \delta_{\mu'}^\mu \delta_{\nu'}^\nu)$ 。

1.2 广义坐标、相互作用原理、共轭动量及运动方程

在经典力学中，力学体系的运动变化可用拉格朗日量(Lagrangian)来描述，而拉格朗日量是由广义坐标和广义速度所决定的。对于一个有 n 个自由度的动力系统，可以找到 n 个相互独立广义坐标(Generalized Coordinate) q_i ，和与之相联系的广义速度 $\dot{q}_i = dq_i/dt$ 。广义坐标可以是一般的直角坐标，也可以是球坐标或其它一些坐标。

按照相互作用的哈密顿(Hamilton)原理，力学体系的运动变化满足作用量(Action)的极值条件

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) = 0. \quad (1.20)$$

对单自由度体系，根据变分原理(Variational Principles) 并利用分部积分(Integration by Parts)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt. \end{aligned} \quad (1.21)$$

考虑到变分 δq 的任意性，按照相互作用的哈密顿原理(1.20)和式(1.21)，可得单自由度体系的拉格朗日运动方程，或称欧拉-拉格朗日方程 (Euler-Lagrange Equation)

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (1.22)$$

类似地，可得 n 个自由度体系的拉格朗日运动方程为

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (1.23)$$

由拉氏量 L 可以定义经典动力系统的共轭或正则 (Canonical) 动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (1.24)$$

这样，系统的哈密顿量 H (Hamiltonian) 就是

$$H = \sum_i^n p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i). \quad (1.25)$$

需要注意的是，在拉氏量中独立变量是广义坐标和速度，而在哈密顿量中则是广义坐标及其共轭动量。由拉格朗日运动方程和哈密顿量的定义可以得到动力系统的正则运动方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (1.26)$$

对于动力系统中的一个物理量 $G(p, q)$ ，由(1.26)可得其对时间的微商是

$$\dot{G} = \sum_i^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right). \quad (1.27)$$

由是可知，哈密顿量 H 不随时间的变化，亦即能量是守恒的。

在量子力学中，坐标 q_i 和动量 p_i 都不再视为经典量（c数），而是希尔伯特空间(Hilbert Space)中的算符(q数)，满足对易关系

$$\begin{aligned} [q_i, p_j] &= i\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n, \\ [q_i, q_j] &= [p_i, p_j] = 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

这里 $[X, Y] = XY - YX$ ，称为算符 X 和 Y 的对易子(Commutator)。(1.28)是动力系统正则量子化的基本关系式。在量子力学中假定，物理量相对应的算符也满足哈密顿正则运动方程(1.26)。结合对易关系，可得量子力学海森堡绘景(Heisenber Picture)中的正则运动方程

$$\dot{q}_i = i[H, q_i], \quad \dot{p}_i = i[H, p_i], \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (1.29)$$

物理量 $G(p, q)$ 在量子力学中也是算符，满足

$$\dot{G} = i[H, G]. \quad (1.30)$$

当算符 G 与哈密顿量算符 H 对易时， $[H, G] = 0$ ， G 是一个守恒量。

练习：

- 1) 根据相互作用的哈密顿原理，推导多自由度体系的拉格朗日方程(1.23)。
- 2) 由拉格朗日运动方程和哈密顿量的定义，推导经典动力系统的哈密顿正则运动方程(1.29)。
- 3) 推导公式(1.27)。
- 4) 由力学量的经典哈密顿正则运动方程推导量子力学的正则运动方程(1.29)。
- 5) 推导公式(1.30)。

1.3 谐振子量子化

了解简谐振子的量子化非常有助于理解量子力学的基本原理。简谐振子也是处理许多实际问题中常用的简化模型，因而掌握简谐振子的量子化程序，可作为学习量子场论的有益基础。

一维简谐振子的拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\kappa q^2. \quad (1.31)$$

其中， κ 是弹性系数。由拉格朗日运动方程可以得到简谐振子的运动方程是

$$m\ddot{q} = -\kappa q. \quad (1.32)$$

从拉格朗日量 (1.31) 可以得到正则动量为

$$p = m\dot{q}. \quad (1.33)$$

相应哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}. \quad (1.34)$$

在量子力学中，坐标 q 和动量 p 是厄米算符，满足对易关系

$$[q, p] = i. \quad (1.35)$$

为求解谐振子的能量本征态，一个方便的做法是定义两个非厄米算符

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(p - im\omega q), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(p + im\omega q), \quad (1.36)$$

分别称为湮灭(annihilation)和产生(creation)算符。利用正则对易关系(1.35)可得

$$[a, a^+] = \frac{1}{2}(i[q, p] + i[p, q]) = 1. \quad (1.37)$$

现在哈密顿量可以用产生和湮灭算符来表达

$$H = \frac{\omega}{2}[aa^+ + a^+a] = \omega(N + \frac{1}{2}). \quad (1.38)$$

其中

$$N = a^+a. \quad (1.39)$$

称为粒子数算符(Number Operator)。由于哈密顿算符和粒子数算符呈线性关系，所以N在能量本征态下也可以对角化。设N的本征态为 $|n\rangle$ ，相应的本征值为n，则本征方程为

$$N|n\rangle = n|n\rangle . \quad (1.40)$$

因为N是厄米算符，所以其本征值一定为实数。按照如上定义，哈密顿算符的本征方程和本征值就是

$$H|n\rangle = (n + \frac{1}{2})\omega|n\rangle \quad (1.41)$$

和

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\omega . \quad (1.42)$$

可以证明，产生和湮灭算符与粒子数算符之间满足如下的对易关系

$$[N, a] = [a^+a, a] = [a^+, a]a = -a . \quad (1.43)$$

及

$$[N, a^+] = a^+ , \quad [N, a^m] = -ma^m , \quad [N, a^{+m}] = ma^{+m} . \quad (1.44)$$

这样

$$Na^+|n\rangle = ([N, a^+] + a^+N)|n\rangle = (n+1)a^+|n\rangle , \quad (1.45)$$

$$Na|n\rangle = ([N, a] + aN)|n\rangle = (n-1)a|n\rangle . \quad (1.46)$$

如上(1.45)和(1.46)表明， $a^+|n\rangle$ 和 $a|n\rangle$ 仍然是粒子数算符N的本征态，只是但所对应的本征值分别增加和减少了1，相应能量本征值分别增加和减少了一个能量单位 ω 。这也就是为什么 a^+ 和 a 被称为产生和湮灭算符的原因。

方程(1.45)表明，

$$a|n\rangle = c|n-1\rangle . \quad (1.47)$$

其中c是一个比例系数，可通过本征态的归一化条件确定，如

$$\langle n|a^+a|n\rangle = n = |c|^2 . \quad (1.48)$$

这样一来我们就能够得到

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (1.49)$$

由湮灭算符，我们可以得到一系列递减的能量本征态。因为

$$n = \langle n|N|n\rangle = (\langle n|a^+ a|n\rangle) \geq 0, \quad (1.50)$$

所以

$$a|0\rangle = 0. \quad (1.51)$$

这样，谐振子的基态能量为

$$E_0 = \frac{1}{2}\omega. \quad (1.52)$$

本征态为 $|0\rangle$ 。

练习：

由简谐振子的拉格朗日量，推导其运动方程（1.32）。

本章主要讲述经典场论中基本要点，讨论场论中一般满足的基本对称性，及由对称性的限制而引申出来的物理结果，为进一步对场量子化奠定必要的基础。

2.1 定域场及其运动方程

在场论中，与质点力学中的广义坐标 q_i 相类似的广义坐标是定域场(Local Field) $\phi(\vec{x}, t)$ 。前者标记维数的分立指标 i ，现在变成了位置矢量 \vec{x} 。由于场指标的连续性，每个场原则上场都是无穷维度的。需要注意，场论中的广义坐标是场量，位置矢量只是参数。当在同一时空点上有多个场时，不同的场量可以用另外一个分立指标区分，如 $\phi_i(\vec{x}, t)$ 。

对定域场论，拉格朗日量是场的泛函（functional）

$$L(t) = L[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}, t)]. \quad (2.1)$$

与质点力学中情形相同，此处泛函 $L[t]$ 只是时间的函数，与参数 x 无关，并且假定只依赖于 ϕ 和 $\dot{\phi}$ （场论中的 x 相当于质点力学中的分离指标，在质点力学中的 $L[q_i, \dot{q}_i]$ 隐含着对指标 i 的求和）。注意，泛函通常用方括号表示。作用量因此也是 ϕ 和 $\dot{\phi}$ 的泛函，其变分为

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}, t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\delta L}{\delta \phi(\vec{x}, t)} \delta \phi(\vec{x}, t) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\vec{x}, t)} \delta \dot{\phi}(\vec{x}, t) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\delta L}{\delta \phi(\vec{x}, t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\vec{x}, t)} \right) \delta \phi(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

由哈密顿原理，结合边界条件

$$\delta\phi(\vec{x}, t_1) = \delta\phi(\vec{x}, t_2) = 0 \quad (2.3)$$

可得场的拉格朗日运动方程

$$\frac{\delta L}{\delta\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}} = 0. \quad (2.4)$$

为了能更清晰地看出场方程的相对论协变性，数学上可以先把空间离散化，最后再取极限。设空间小体积元 Δv_i 的场量可以用体积元中场量 $\phi(\vec{x}, t)$ 的平均值

$$\phi_i(t) = \frac{1}{\Delta v_i} \int_{\Delta v_i} \phi(\vec{x}, t) d^3x \quad (2.5)$$

表示。由于对连续分布的场

$$\phi(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t) \cdot \Delta\vec{x}, \quad (2.6)$$

对分立的相邻体积元中场量的平均值

$$\phi_{i+1}(t) = \phi_i(t) + \vec{\nabla}\phi_i(t) \cdot \Delta\vec{x}. \quad (2.7)$$

由此可以看出，相邻体积元场量的平均值互相依赖。注意，这并不意味着此时场是非定域（nonlocal）的，正如一个普通连续函数 $f(x)$ 也有同样的性质。因此，

$$L_i(t) = \mathcal{L}_i(t)\Delta v_i = \mathcal{L}_i[\phi_i(t); \dot{\phi}_i(t), \vec{\nabla}\phi_i(t)]\Delta v_i. \quad (2.8)$$

取连续极限 $\Delta v_i \rightarrow 0$ 后

$$\mathcal{L}(x) = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} \mathcal{L}_i(t) = \mathcal{L}[\phi(\vec{x}, t); \dot{\phi}(\vec{x}, t), \vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t)]. \quad (2.9)$$

同时

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}[\phi(\vec{x}, t); \dot{\phi}(\vec{x}, t), \vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t)]. \quad (2.10)$$

由于作用量 S 是洛伦兹标量（Lorentz Scalar）， d^4x 是洛伦兹变换不变的时空体积元，描述量子场的拉格朗日密度应当满足物理场所具有的性质，对相对论性的场满足洛伦兹不变性（Lorentz Invariance），亦即拉格朗日密度应当是洛伦兹标量。

按照相互作用（哈密顿）原理（Action Principle）

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int dt \delta L(t) \\
 &= \int dt d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(\vec{x}, t)} \delta \phi(\vec{x}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t)} \delta \vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{x}, t)} \delta \dot{\phi}(\vec{x}, t) \right) \\
 &= \int dt d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(\vec{x}, t)} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{x}, t)} \right) \delta \phi(\vec{x}, t) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

可以得到按照哈密顿量密度表示的欧拉—拉格朗日运动方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(\vec{x}, t)} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{x}, t)} = 0. \tag{2.12}$$

亦即

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(\vec{x}, t)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(\vec{x}, t))} = 0. \tag{2.13}$$

从上式可以看出，场的拉格朗日量(2.10)可以通过拉格朗日密度表达为场及其一阶导数的泛函

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\vec{x}, t) = \int d^3x \mathcal{L}[\phi(\vec{x}, t), \partial_\mu \phi(\vec{x}, t)]. \tag{2.14}$$

此处场的一阶导数不仅是对时间的导数，而是对时空各分量的导数。在推导(2.13)时同样使用了分部积分和时空边界场的变分为零的条件。由于我们假定拉氏量或拉氏密度仅依赖于场参数的一阶微分，由拉氏方程得出的运动方程至多是二阶微分方程。

对于时空中同时存在多个场的情形，对(2.14)作合理地推广可得到多分量场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}[\cdots \phi_a(x) \cdots, \cdots \partial_\mu \phi_a(x) \cdots]. \tag{2.15}$$

其中 $a = 1, 2, \dots, n$ 分量指标。由(2.15)可以通过场的哈密顿原理直接得到分量场的运动方程为

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} = 0. \tag{2.16}$$

练习：

由最小相互作用原理推导场的运动方程(2.16)。

2.2 诺特定理与守恒定律 (Noether's Theorem and Conservation Laws)

自然界中存在着许多不随时间演化, 或称守恒的量, 这是为大量实验所证实了的。因此, 在以场为出发点构造描述物理体系的拉格朗日量时, 要能正确地反映出体系的守恒律。二十世纪初德国女数学家诺特发现了连续的对称变换和守恒律之间的关系, 使得通过相互作用的拉格朗日形式能很方便地找到一个物理体系的守恒律。

假设体系的相互作用量 S 在场的时空参数作连续变换下保持不变, 那么在参数的无穷小变换

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu. \quad (2.17)$$

同样成立。这时场量 $\phi_a(x)$ 和拉格朗日量密度 $\mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x)/\partial x_\mu)$ 也会有相应的无穷小变化

$$\phi'_a(x') = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x). \quad (2.18)$$

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x). \quad (2.19)$$

在上式中, 为使得表达式简洁, 拉氏密度对场量的依赖性被隐去。按(2.18)定义的场量的变分为

$$\begin{aligned} \delta\phi_a(x) &= \phi'_a(x') - \phi_a(x) \\ &= \phi'_a(x') - \phi'_a(x) + \phi'_a(x) - \phi_a(x) \\ &= \delta_x\phi'_a + \delta_\phi\phi_a \\ &= \frac{\partial\phi_a}{\partial x_\mu}\delta x_\mu + \delta_\phi\phi_a. \end{aligned} \quad (2.20)$$

在上式中, 二阶小量被略去。假定系统(作用量)在(2.17)变换下保持不变, 亦即

$$\delta S = \int_{R'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_R d^4x \mathcal{L}(x) = 0, \quad (2.21)$$

我们会得到一个重要的结论, 即诺特定理。在上式中, R' 和 R 分别是 x' 和 x 的积分区域。按照(2.19)作用量的变化可以表达为

$$\delta S = \int_{R'} d^4x' \mathcal{L}(x) + \int_{R'} d^4x' \delta\mathcal{L}(x) - \int_R d^4x \mathcal{L}(x). \quad (2.22)$$

对上式的积分元作替换

$$d^4x' = J \left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)} \right) d^4x = \text{Det} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) d^4x \approx \left(1 + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \right) d^4x. \quad (2.23)$$

其中J为雅可比行列式(Jacobian–Jacobi Determinant)。这样在略去二阶小量后 (2.22) 就可变为

$$\delta S = \int_R d^4x \delta \mathcal{L}(x) + \int_R d^4x \mathcal{L}(x) \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}. \quad (2.24)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}(\phi'_a(x'), \partial'_\mu \phi'_a(x')) - \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) \\ &= \delta_\phi \mathcal{L} + \delta_x \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\delta_x \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a(x'), \partial'_\mu \phi_a(x')) - \mathcal{L}(\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu}. \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \delta_\phi \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\phi'_a(x'), \partial'_\mu \phi'_a(x')) - \mathcal{L}(\phi_a(x'), \partial'_\mu \phi_a(x')) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_a} \delta_\phi \phi_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} \delta_\phi \left(\frac{\partial \phi_a(x)}{\partial x^\mu} \right) \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_a} \delta_\phi \phi_a(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} \right) \delta_\phi \phi_a(x) \right] + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} \delta_\phi \phi_a(x) \right] \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_a} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} \right) \right] \delta_\phi \phi_a(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} \delta_\phi \phi_a(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

注意，在如上表达式中重复的洛伦兹指标和场指标均求和。把(2.27)代入(2.24)可得

$$\int_R d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_a} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} \right) \right] \delta_\phi \phi_a(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} \delta_\phi \phi_a(x) + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \right] \right\} = 0. \quad (2.28)$$

(2.28) 的第一部分按照场的拉格朗日方程应当为零。第二部分由于体积区域R的任意性可知被积函数恒为零。结合(2.20)可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} \delta_\phi \phi_a(x) + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} (\delta \phi_a(x) - \frac{\partial \phi_a}{\partial x^\nu} \delta x^\nu) + \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} \delta \phi_a(x) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_a)} \frac{\partial \phi_a}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x) \right) \delta x^\nu \right] \\ &\equiv \frac{\partial J_\mu}{\partial x^\mu} = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

上式表明：对应于一个连续的对称性变换，系统存在相应的守恒流。这个流可由场的拉格朗日密度定出。

按照(2.29)和高斯（Gauss）定理

$$\begin{aligned}\int d^3x \partial_\mu J^\mu &= \int d^3x \partial_0 J^0 + \int d^3x \partial_i J^i = \frac{d}{dt} \int d^3x J^0 + \int d\sigma_i J^i \\ &= \frac{d}{dt} Q + \text{surface term} .\end{aligned}\quad (2.30)$$

假设场在无穷远处很快消失时，上式中最后一项，面积分项趋于零。这时由流守恒(2.29)就得到了荷（charge）守恒

$$\frac{d}{dt} Q = 0 .\quad (2.31)$$

时空平移不变性和能动量守恒

时空的无穷小变化可表示为

$$x'^\nu = x^\nu + \epsilon^\nu ,\quad (2.32)$$

则

$$\delta x^\nu = \epsilon^\nu = g^{\mu\nu} \epsilon_\mu .\quad (2.33)$$

考虑到空间的均匀性有

$$\delta\phi_a = \phi'_a(x') - \phi_a(x) = 0 .\quad (2.34)$$

此时由守恒的诺特流可得正则能-动量张量（Canonical energy-momentum tensor）

$$J^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\phi_a)} \frac{\partial\phi_a}{\partial x_\nu} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}(x) .\quad (2.35)$$

相应的诺特守恒荷为

$$P^\nu = \int T^{0\nu} d^3x = \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\dot{\phi}_a} \frac{\partial\phi_a}{\partial x_\nu} - g^{0\nu}\mathcal{L}(x) \right) d^3x .\quad (2.36)$$

其中

$$P^0 = \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_a} \dot{\phi}_a - \mathcal{L} \right) d^3x = \int \mathcal{H} d^3x ,\quad (2.37)$$

$$P^i = \int T^{0i} d^3x = - \int \pi_a \partial_i \phi_a d^3x . \quad (2.38)$$

正则动量密度 π 定义为

$$\pi_a(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a(x)} . \quad (2.39)$$

(2.38)的物理意义在场量子化后将更加明显。按照 (2.31)，能动量守恒可以表示为

$$\frac{dP^\mu}{dt} = 0 . \quad (2.40)$$

由 (2.36) 可以看出，时间变换的不变性导致能量守恒；空间平移的不变性导致动量守恒。

第一类规范变换不变性和荷守恒

对于物理体系的整体内部变换，一般也称作第一类规范变换，变换形式可以表示为

$$\phi'_a(x') = e^{i\epsilon\lambda_{ab}} \phi_b(x) \doteq \phi_a(x) + i\epsilon\lambda_{ab}\phi_b(x) . \quad (2.41)$$

ϵ 是一个与时空坐标无关的小量。 λ_{ab} 是一个导致场混合的矩阵。由于已经假定变换与时空无关，因此

$$\delta x_\nu = 0 ; \quad \delta \phi_a = i\epsilon\lambda_{ab}\phi_b . \quad (2.42)$$

假如物理体系在如 (2.41) 的变换下保持不变，根据诺特定理有相应的守恒流

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu \phi_a)} \frac{\delta \phi_a(x)}{\epsilon} = i \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu \phi_a)} \lambda_{ab} \phi_b(x) . \quad (2.43)$$

进而可以得到守恒荷

$$Q = i \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \dot{\phi}_a} \lambda_{ab} \phi_b(x) = i \int d^3x \pi_a(x) \lambda_{ab} \phi_b(x) . \quad (2.44)$$

在量子场论中，如上内部变换不变性所对应的守恒荷可以是粒子的电荷、重子数、同位旋等内部量子数。

洛伦兹不变性 (Lorentz Invariance)

闵科夫斯基空间中洛伦兹变换保持空间中两点之间的距离在变换下保持不变。人们一般认为，时空不仅是均匀的，而且是各向同性的。亦即物理体系具有洛伦兹变换下的不变性。设为

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x^\nu. \quad (2.45)$$

则由 $x'^2 = x^2$ 可以得到实变换矩阵 $\Lambda_{\mu\nu}$ 所满足的正交性条件

$$\Lambda_{\mu\nu} \Lambda^{\mu\rho} = g_\nu^\rho. \quad (2.46)$$

正规 (proper) 洛伦兹变换 (数学上, 变换矩阵行列式为正; 物理上, 在向前光锥中类时矢量变换后仍在此光锥中) 包含空间的转动和速度变换 (Lorentz Boosts) (表现为四维时空的转动), 它的一般无穷小变换形式为

$$x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu} x^\nu. \quad (2.47)$$

由正交性条件(2.46)可得

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (2.48)$$

因而 $\omega_{\mu\nu}$ 有六个独立的参数, 表示在 x_μ, x_ν 平面的无穷小转动。

在无穷小洛伦兹变换 (2.47) 下, 场量的变换形式可一般地写为

$$\phi'_a(x') = L(\omega)_{ab} \phi_b(x). \quad (2.49)$$

其中

$$L(\omega)_{ab} = \delta_{ab} + \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} (I^{\mu\nu})_{ab}. \quad (2.50)$$

$(I^{\mu\nu})_{ab}$ 称为洛伦兹变换的无穷小生成元 (infinitesimal generators)。同样生成元也是洛伦兹指标反对称的, 因而也有六个独立的生成元。

如果物理系统在正规洛伦兹变换下保持不变, 那么按照诺特定理就存在相应的守恒定律。按照(2.29), 诺特流为

$$f_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_a)} \frac{1}{2} \omega_{\nu\rho} (I^{\nu\rho})_{ab} \phi_b(x) - T_{\mu\nu} \omega^{\nu\rho} x_\rho. \quad (2.51)$$

其中能-动量张量取 (2.35) 的形式。利用 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性质, 上式中的最后一项可以改写为

$$T_{\mu\nu} \omega^{\nu\rho} x_\rho = \frac{1}{2} \omega^{\nu\rho} (T_{\mu\nu} x_\rho - T_{\mu\rho} x_\nu). \quad (2.52)$$

这样诺特流 (2.51) 就可表达为

$$f_\mu(x) = \frac{1}{2} M_{\mu\nu\rho}(x) \omega^{\nu\rho}. \quad (2.53)$$

其中,

$$M_{\mu\nu\rho}(x) = T_{\mu\rho}x_\nu - T_{\mu\nu}x_\rho + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_a)}(I_{\nu\rho})_{ab}\phi_b(x). \quad (2.54)$$

诺特定理告诉我们

$$\partial^\mu f_\mu = \partial^\mu M_{\mu\nu\rho}(x) = 0. \quad (2.55)$$

这样反对称张量

$$M_{\nu\rho} = \int d^3x \left[T_{0\rho}x_\nu - T_{0\nu}x_\rho + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi_a)}(I_{\nu\rho})_{ab}\phi_b(x) \right]. \quad (2.56)$$

是不随时间变化的常量。 $M_{\nu\rho}$ 称作角动量张量, 可以分为两部分

$$M_{\nu\rho} = L_{\nu\rho} + S_{\nu\rho}. \quad (2.57)$$

其中当取洛伦兹指标 ν 个 ρ 的空间分量时 (如设为 i 和 j) 有

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \int d^3x (x_i T_{0j} - x_j T_{0i}) \\ &= \int d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi_a)} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x^j} - x_j \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \phi_a(x) \\ &= \int d^3x \pi_a(x) \left(x_i \frac{\partial}{\partial x^j} - x_j \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \phi_a(x), \end{aligned} \quad (2.58)$$

是场的空间角动量, 而

$$S_{ij} = \int d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi_a)}(I_{ij})_{ab}\phi_b(x) = \int d^3x \pi_a(x)(I_{ij})_{ab}\phi_b(x). \quad (2.59)$$

涉及场的内部变换性质, 表示场的自旋角动量。

练习:

阅读文献中有关庞加莱 (Poincaré) 变换与相应的守恒量部分。

2.3 场的哈密顿形式 (The Hamilton Formalism)

为将哈密顿形式施用于场论中，我们需要首先定义广义坐标（场量）的正则共轭“动量”（Canonically conjugate field）

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\delta L(t)}{\delta \dot{\phi}(\vec{x}, t)}. \quad (2.60)$$

已经知道可以定义与空间坐标相关的拉氏量密度，因此可以通过先将空间先离散化，再求极限的方式把变分化为一般的微分

$$\pi(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v_i} \frac{\delta L(t)}{\delta \dot{\phi}_i(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{x}, t)}. \quad (2.61)$$

（第一个等式由(2.5)可以看出）。这样，由拉格朗日方程可以得到共轭动量对时间的导数

$$\dot{\pi}(\vec{x}, t) = \frac{\delta L(t)}{\delta \phi(\vec{x}, t)}. \quad (2.62)$$

场的哈密顿量（Hamiltonian）由如下勒让德（Legendre）变换而定义

$$H(t) = \int d^3x \pi(\vec{x}, t) \dot{\phi}(\vec{x}, t) - L(t) \equiv \int d^3x \mathcal{H}(\vec{x}, t). \quad (2.63)$$

其中 \mathcal{H} 称为哈密顿量密度。由于

$$\delta H(t) = \int d^3x (\dot{\phi} \delta \pi + \pi \delta \dot{\phi}) - \delta L = \int d^3x (\dot{\phi} \delta \pi - \dot{\pi} \delta \phi), \quad (2.64)$$

可得哈密顿方程（Hamilton's equations of motion）

$$\dot{\phi} = \frac{\delta H}{\delta \pi}; \quad \dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta \phi}. \quad (2.65)$$

由哈密顿量密度的定义(2.63)及拉格朗日运动方程可以得到场的正则运动方程

$$\dot{\phi}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a}; \quad \dot{\pi}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_a} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\vec{\nabla} \phi_a)}, \quad (2.66)$$

这里我们引入场量 ϕ 的指标 a 表示不同的场。上式中第一个可以由哈密顿量密度的定义很容易地得到

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} = \dot{\phi}_a + \pi_a \frac{\partial \dot{\phi}_a}{\partial \pi_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} \frac{\partial \dot{\phi}_a}{\partial \pi_a} = \dot{\phi}_a. \quad (2.67)$$

练习:

结合拉格朗日运动方程与哈密顿量密度的定义, 推导(2.66)中第二个方程。

附: 泛函导数常用公式

定义泛函 $F[\Phi]$ 为函数空间 $M = \{\Phi(x) : x \in \mathbb{R}\}$ 到实数或复数的映射。

1. 按照泛函导数的定义有

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} = \delta(x - y)$$

2. 给定

$$F[\phi] = \int dx (\phi(x))^n$$

按照泛函导数的定义有

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)} = n(\phi(y))^{n-1}$$

3. 给定

$$F[\phi] = \int dx \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^n$$

按照泛函导数的定义有

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)} = -n \frac{d}{dx} \left(\frac{\phi}{dx} \right)^{n-1} \Big|_y$$

此外, 变分运算是一个线性操作。假设有 $F[\phi] = G[\phi] H[\phi]$, 则有

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi} = \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi} H[\phi] + G[\phi] \frac{\delta H[\phi]}{\delta\phi}$$

场的正则量子化

场的概念由法拉利提出后，已作为物质存在及相互作用传递的一种基本形式为大量实验所证实，并在从经典物理到量子理论研究的广泛领域内得到应用。涉及高能量子现象的场论称为量子场论，是目前描述微观粒子体系动力学最为成功的模型。

在量子场论的框架下，要描述不同量子体系通常需要引入一定的假设，因而实际的量子场论严格说来也是模型依赖的。模型的正确与否最终还得要靠实验来检验。量子场论的具体形式虽然模型相关，但作为其理论基础的一些基本原理，一般认为是普遍成立的。如相对论协变性，可重整性，等。

场可以通过多种途径量子化，其中路径积分量子化和正则量子化是使用较多，物理意义明确的量子化方式。路径积分量子化在处理规范场时相对较为便捷，而正则量子化方法由于更接近于传统的非相对论量子力学中的步骤，因此有便于理解和物理意义比较明显等特点。

3.1 克莱茵-戈登（Klein-Gorden）场及其量子化

克莱茵-戈登场方程是第一个相对论性的微观量子场方程，始建于1926年。它描述自旋为零的场。如下我们就克莱茵-戈登方程分为中性和带电场两部分展开讨论。

3.1.1 实标量场

由狭义相对论中能量-动量-质量的关系

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (3.1)$$

按照量子力学中的处理方法，将能量和动量分别用算符

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}; \quad \vec{p} \rightarrow -i \vec{\nabla}. \quad (3.2)$$

来替代，并作用到波函数上就可得到一个满足相对论协变性要求的运动方程

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x) = -\nabla^2 \phi(x) + m^2 \phi(x), \quad (3.3)$$

即克莱茵-戈登方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(x) = 0. \quad (3.4)$$

其中 $\phi(x)$ 代表实标量或赝标量场。有时克莱茵-戈登方程也被表达成如下不同的形式

$$\begin{aligned} (\partial^2 + m^2)\phi(x) &= 0, \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) &= 0, \\ (\square + m^2)\phi(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

作为一个动力学系统，克莱茵-戈登场有相应的拉格朗日量（密度）

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2). \quad (3.6)$$

此处，拉格朗日密度(3.6)可从拉格朗日运动方程结合克莱茵-戈登方程反推得到。按照定义，共轭场“动量”为

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x). \quad (3.7)$$

相应地，哈密顿量密度为

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} (\pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2). \quad (3.8)$$

将场看作一个具有无穷多自由度的系统，按照与量子力学中一样的方式，可以对场量子化。亦即，我们将场量 $\phi(\vec{x}, t)$ 及其共轭量 $\pi(\vec{x}, t)$ 视作算符 $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ 和 $\hat{\pi}(\vec{x}, t)$ ，并满足等时对易关系

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] &= i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{x}')] &= [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

对易关系表明，克莱茵-戈登场满足玻色-爱因斯坦统计。量子化后的哈密顿量也成为了算符

$$\hat{H}(x) = \int d^3x \frac{1}{2} \left(\hat{\pi}^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right). \quad (3.10)$$

因为在动量表象能更清晰地表现场的粒子性，我们将场算符换到动量表象。显然克莱茵-戈登场有平面波解，即 $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ 的傅立叶展开形式

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \int d^3p N_p \left(\hat{a}_p e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega_p t)} + \hat{a}_p^+ e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega_p t)} \right). \quad (3.11)$$

其中 N_p 是归一化常数， $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ 。由于有 $\hat{\pi}(t, \vec{x}) = \dot{\hat{\phi}}(t, \vec{x})$,

$$\hat{\pi}(t, \vec{x}) = \int d^3p N_p (-i\omega_p) \left(\hat{a}_p e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega_p t)} - \hat{a}_p^+ e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega_p t)} \right). \quad (3.12)$$

由上面两个表达式，利用 $\delta(p)$ 函数的定义

$$\delta^3(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{\pm i\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x \quad (3.13)$$

可得算符 \hat{a}_p 和 \hat{a}_p^+ 的表达式如下

$$\hat{a}_p = N_p \int d^3x e^{ip\cdot x} [\omega_p \hat{\phi}(x) + i\hat{\pi}(x)], \quad (3.14)$$

$$\hat{a}_p^+ = N_p \int d^3x e^{-ip\cdot x} [\omega_p \hat{\phi}(x) - i\hat{\pi}(x)]. \quad (3.15)$$

其中归一化常数 $N_p = 1/\sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}$ ， $p \cdot x \equiv \omega_p t - \vec{p} \cdot \vec{x}$ 。利用(3.14)，(3.15)和场算符在坐标表象的对易关系，可得动量表象算符 \hat{a}_p 和 \hat{a}_p^+ 的对易关系如下

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^+] = \delta^{(3)}(p - p'), \quad (3.16)$$

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] = [\hat{a}_p^+, \hat{a}_{p'}^+] = 0. \quad (3.17)$$

为方便计，在后面的表达式中，算符符号“ \wedge ”将略去。

练习：

试推导 \hat{a}_p 和 \hat{a}_p^+ 算符的对易关系(3.16)和(3.17)。

由(3.10)、(3.11)和(3.12)可以得到实标量场的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{1}{2} (\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2) d^3x \\ &= \int d^3p \frac{\omega_p}{2} [a_p^+ a_p + a_p a_p^+]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

由场的能动量表达式(2.36)可得

$$\begin{aligned} P^i &= \int T^{0i} d^3x = - \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \\ &= - \int d^3x \pi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= \int d^3p \frac{p^i}{2} [a_p^+ a_p + a_p a_p^+]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

练习:

试推导(3.19)式。

场的粒子性:

由标量场方程的一般平面波解有

$$(m^2 - p^2)\phi(x) = 0, \quad (3.20)$$

意味着

$$p^2 - m^2 = E^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0. \quad (3.21)$$

其中 $E = \pm\omega$, $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, 似乎有负能困难, $\phi(x)$ 场也不宜在作为单粒子波函数看待。在对场量子化后, 能动量如(3.18)和(3.19), 将不再有此负能问题。

定义动量空间算符

$$N_p \equiv a_p^+ a_p. \quad (3.22)$$

容易证明有

$$[N_p, N_{p'}] = 0, \quad (3.23)$$

故

$$[H, N_p] = 0; [P, N_p] = 0. \quad (3.24)$$

亦即粒子数算符与能动量算符有共同的本征态。设 $|n_p\rangle$ 为 N_p 的本征态，本征值为 n_p

$$N_p |n_p\rangle = n_p |n_p\rangle. \quad (3.25)$$

可以证明（注：在对 p' 的积分意义下）

$$[N_{p'}, a_p] = -a_p, [N_{p'}, a_p^+] = a_p^+. \quad (3.26)$$

同简谐振子类似，因而 N_p 可视为能量为 ω_p ，动量为 \vec{p} 的粒子数（密度）算符，其本征值 n_p 可取非负整数。而 a_p^+ 和 a_p 则分别视为能量为 ω_p ，动量为 \vec{p} 的产生和湮灭算符。由此可以看出，量子场所描述的物理过程涉及粒子的产生和湮灭。

场零点能（Zero-point Energies）的去除：

由于量子场是一个无限自由度系统，场的能量动量就是粒子各种能量动量的和。如能量为

$$H = \int d^3p \omega_p [N_p + \frac{1}{2}\delta^3(0)]. \quad (3.27)$$

而第二项正比与 $\delta^3(0)$ ，亦即相应的能量为无穷大。在实标量场中，类似于简谐振子情形，真空定义为

$$a_p |0\rangle = 0. \quad (3.28)$$

这样，通过求哈密顿量算符的真空期待值可以看出，零点能来源于所谓真空能量的无穷大。这个无穷大在实际物理讨论中并不带来实质性的困难，原因是我们感兴趣的实际只是能量差，而不是绝对能量。

一个有效的去除零点发散的办法是对场算符采用正规乘积（Normal Ordering）。将量子场 $\phi(x) \equiv \phi(\vec{x}, t)$ 作如下分解

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x), \quad (3.29)$$

其中

$$\phi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} e^{-ip \cdot x} a_p, \quad (3.30)$$

称为场算符的正频 (positive frequency) 部分 (注: 对应于正能解), 它是在 x 时空点湮灭一个粒子的算符;

$$\phi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} e^{ip \cdot x} a_p^+, \quad (3.31)$$

称为场算符的负频 (negative frequency) 部分 (注: 对应于正能解), 它是在时空点 x 处产生一个粒子的算符。

正规乘积是指, 在有多个场算符乘积时, 将产生算符放到湮灭算符的左边。如 $\phi_1 \phi_2$ 的正规乘积为

$$:\phi_1 \phi_2: \equiv \phi_1^{(+)} \phi_2^{(+)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(+)} + \phi_1^{(-)} \phi_2^{(-)} + \phi_2^{(-)} \phi_1^{(+)} . \quad (3.32)$$

显然, 在采用正规乘积后, 哈密顿量算符的真空期望值将不再有无穷大真空能。

$$:H: = \int d^3p \omega_p N_p . \quad (3.33)$$

以后在遇到场算符的乘积时, 除非特别说明, 将默认采用正规乘积。任一算符 \mathcal{O} 在取正规乘积后, 其基态的期望值为零

$$\langle 0 | : \mathcal{O} : | 0 \rangle = 0 . \quad (3.34)$$

自旋与统计:

由于标量场为零阶张量 (只有一个分量), 在空间转动中表现为标量或赝标量, 相应于(2.59)的守恒量自旋为零。对一般多粒子态体系, 定义一个总粒子数算符为

$$N = \int d^3p N_p = \int d^3p a_p^+ a_p , \quad (3.35)$$

任何动量的粒子都不存在的态作为真空态

$$|0\rangle \equiv |0, 0, \dots, 0, \dots\rangle , \quad (3.36)$$

且满足归一化

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1 . \quad (3.37)$$

将满足运动方程的场量视为算符时, 有时也称为二次量子化 (second quantization), 可用粒子数表象 (particle-number representation) 的态矢量 $|n_{p_1}, n_{p_2}, \dots, n_{p_i}, \dots\rangle$

作为希尔伯特空间的基，这时也称为福克空间（Fock Space）。显然地，福克空间的态矢量可由真空态和一定数目的产生算符来构造

$$|n_{p_1}, n_{p_2}, \dots, n_{p_i}, \dots, n_{p_m}\rangle = \prod_i^m \frac{(a_{p_i}^+)^{n_{p_i}}}{\sqrt{n_{p_i}!}} |0\rangle. \quad (3.38)$$

可以证明，当粒子数算符（3.35）作用在如上态后就得到总粒子数

$$N|n_{p_1}, n_{p_2}, \dots, n_{p_i}, \dots, n_{p_m}\rangle = \left(\sum_{i=1}^m n_{p_i} \right) |n_{p_1}, n_{p_2}, \dots, n_{p_i}, \dots, n_{p_m}\rangle. \quad (3.39)$$

量子标量场 m 个粒子的，动量空间的正交归一态矢量可以表达为

$$|p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger \dots a_{p_i}^\dagger \dots a_{p_m}^\dagger |0\rangle, \quad (3.40)$$

其中 $m!$ 来自全同粒子的对称交换。又，对任一物理态 ψ ，可以通过的完备性关系

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \dots \sum_{p_m} |p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m\rangle \langle p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m| = 1 \quad (3.41)$$

展开，

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \dots \sum_{p_m} |p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m\rangle \langle p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m| \psi\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \dots \sum_{p_m} \Phi_\psi^{(m)}(p_1, p_2, \dots, p_m) \frac{1}{\sqrt{m!}} a_{p_1}^+ a_{p_2}^+ \dots a_{p_m}^+ |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.42)$$

其中，

$$\Phi_\psi^{(m)}(p_1, p_2, \dots, p_m) = \langle p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m | \psi \rangle \quad (3.43)$$

是物理态 ψ 在 m 个粒子动量空间的波函数。

由于对实标量场，任意两个产生算符，如 a_p^+ 和 a_q^+ ，是可以对易的，粒子态 $a_p^+ a_q^+ |0\rangle$ 和 $a_q^+ a_p^+ |0\rangle$ 没有区别，亦即两粒子交换粒子态不变。也正是由于对易关系有合适的符号（或曰对易关系次序得当），物理态 $\langle p' | p \rangle = +\delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$ 有非负（合理）的归一化；另外，同一能动量也可以有任意多个粒子同时存在。这说明，克莱茵-戈登粒子（中性标量或赝标介子），满足玻色-爱因斯坦统计。

协变对易关系与微观因果性（microcausality）：

玻色场的正则量子化采取的是等时对易关系(3.9)

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}_a(\vec{x}, t), \hat{\pi}_b(\vec{x}', t)] &= i\delta_{ab}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [\hat{\phi}_a(\vec{x}, t), \hat{\phi}_b(\vec{x}', t)] &= [\hat{\pi}_a(\vec{x}, t), \hat{\pi}_b(\vec{x}', t)] = 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

显然是非相对论协变的，其中下指标 a, b 等用来标志独立的标量场。利用 (3.11), (3.16) 和 (3.17) 我们可以把四维时空对易子 $[\phi(x), \phi(y)]$ 表达为

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \int d^3p d^3p' N_p N_{p'} ([a_p, a_{p'}^+] e^{-ip \cdot x} e^{ip' \cdot y} + [a_p^+, a_{p'}] e^{ip \cdot x} e^{-ip' \cdot y}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{2\omega_p} [e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}] \\ &\equiv i\Delta(x-y). \end{aligned} \quad (3.45)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta(x-y) &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{2\omega_p} [e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}] \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{2\omega_p} [e^{-i\omega_p(t_{x_0} - t_{y_0})} - e^{i\omega_p(t_{x_0} - t_{y_0})}] \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \epsilon(p_0) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} e^{-ip_0(t_{x_0} - t_{y_0})} \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \epsilon(p_0) e^{-ip \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

其中 $\epsilon(p_0) = \frac{p_0}{|p_0|} = \theta(p_0) - \theta(-p_0)$ ，而 $\theta(p_0)$ 为阶跃函数 (step function)，满足

$$\begin{cases} \theta(p_0) = +1, & \text{if } p_0 > 0 \\ \theta(p_0) = 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.47)$$

并有 $\int \frac{d^3p}{2\omega_p} = \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0)$ 。上式显示 $\Delta(x)$ 是洛伦兹不变的(体积元在洛伦兹变换下不变, p_0 不变号)。

从定义可以看出 $\Delta(x)$ 是奇函数，并且满足

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \Delta(x_0, \vec{x}) \Big|_{x_0=0} = -\delta^3(\vec{x}). \quad (3.48)$$

$$\Delta(0, \vec{x}) = 0. \quad (3.49)$$

由于式 (3.49) 是类空空间的结论, 而 $\Delta(x)$ 本身是洛伦兹不变量, 洛伦兹变换也不会改变空间中类空 (类时) 的性质, 所以 (3.49) 事实上对所有类空矢量 $x-y$ 都应当成立

$$\Delta(x-y) = 0 \quad \text{for } (x-y)^2 < 0, \quad (3.50)$$

也就是

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{for } (x-y)^2 < 0. \quad (3.51)$$

如上对易结果表明, 在量子世界, 类空间隔的两事件是可以独立测量而彼此没有影响的, 亦即没有因果关系。这个结论不仅在宏观, 而且在微观, 也为目前的实验所肯定, 称为微观因果性。

练习:

- 1) 求证式(3.39)。
- 2) 证明(3.48)。

3.1.2 复标量场

克莱茵-戈登方程的解并不限于实函数, 也可以是复数。当 $\phi(x)$ 是复数时其实可以由两个实标量场构成 (不是一个场的两个分量)

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)). \quad (3.52)$$

当我们将场的独立变量取为 $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 时, 能够正确给出克莱茵-戈登方程的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi. \quad (3.53)$$

由上拉格朗日密度, 可由拉哥朗日运动方程得

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0; \quad (\square + m^2)\phi^\dagger(x) = 0. \quad (3.54)$$

按照定义, $\phi(x)$ 和 $\phi^\dagger(x)$ 场的共轭场分别为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger; \quad \pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}. \quad (3.55)$$

正则量子化的对易关系为

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = [\phi^\dagger(\vec{x}, t), \pi^\dagger(\vec{x}', t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') . \quad (3.56)$$

场算符的其它对易子均为零。

容易验证，复标量场的拉氏密度在如下内部对称性变换下保持不变

$$\phi(\vec{x}, t) \rightarrow \phi'(\vec{x}, t) = e^{+i\epsilon q} \phi(\vec{x}, t) ; \quad \phi^\dagger(\vec{x}, t) \rightarrow \phi'^\dagger(\vec{x}, t) = e^{-i\epsilon q} \phi^\dagger(\vec{x}, t) . \quad (3.57)$$

其中 q 为一时空无关的常数。这样，对应于诺特守恒流和荷(2.43)和(2.44)为

$$J^\mu = iq(\phi \partial^\mu \phi^\dagger - \phi^\dagger \partial^\mu \phi) ; \quad (3.58)$$

$$Q = iq \int d^3x (\pi \phi - \pi^\dagger \phi^\dagger) . \quad (3.59)$$

q 可以是电荷 (e)，奇异数 (S)，等，上式表明复标量场是带电场，电流与电荷是守恒量。注意，在非相对论量子力学中， J^0 为 $\rho = \phi^*(x)\phi(x)$ ，即单粒子态的几率密度；而克莱茵-戈登方程给出的守恒荷 (3.59) 是非正定的，显然不能作单粒子几率密度解释，因而克莱茵-戈登方程不能作为单粒子运动方程。

与实标量场情形类似，我们可以对满足运动方程(3.54)的场量做傅立叶（平面波）展开

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} (a_p e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega_p t)} + b_p^\dagger e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega_p t)}) . \quad (3.60)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} (b_p e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega_p t)} + a_p^\dagger e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega_p t)}) . \quad (3.61)$$

在如上平面波展开中，正频和负频部分的产生湮灭算符没有必要像实标量场中那样互为复共轭。根据复标量场场量的对易关系，可以得到动量表象产生湮灭算符之间的对易关系

$$\begin{cases} [a_p, a_{p'}^\dagger] = [b_p, b_{p'}^\dagger] = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') ; \\ 0 \text{ other commutators} . \end{cases}$$

根据(2.36)可得复标量场的能动量及守恒荷为

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x (\pi^+ \pi + \vec{\nabla} \phi^+ \cdot \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^+ \phi) \quad (3.62)$$

$$= \int d^3p \omega_p (N_a + N_b) . \quad (3.63)$$

$$\vec{P} = \int d^3x (\pi \vec{\nabla} \phi + \pi^+ \vec{\nabla} \phi^+) \quad (3.64)$$

$$= \int d^3p \vec{p} (N_a + N_b) . \quad (3.65)$$

$$Q = \int d^3p q (N_a - N_b) . \quad (3.66)$$

其中

$$N_a = a_p^\dagger a_p, \quad N_b = b_p^\dagger b_p . \quad (3.67)$$

是粒子数密度算符。(3.66)告诉我们 a_p^\dagger, a_p 是带电荷为 q 的粒子的产生和湮灭算符；而 b_p^\dagger, b_p 是带电荷为 $-q$ 的粒子的产生和湮灭算符。

坐标空间中带正负电粒子的产生湮灭算符可以表达为

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) \\ \phi^\dagger(x) &= \phi^{\dagger(+)}(x) + \phi^{\dagger(-)}(x) . \end{aligned} \quad (3.68)$$

此处

$$\phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} a_p e^{-ip \cdot x} , \quad (3.69)$$

表示在时空点 (\vec{x}, t) 的单位体积内，湮灭一个带正电的标量粒子的场算符。

$$\phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} b_p^\dagger e^{+ip \cdot x} , \quad (3.70)$$

表示在时空点 (\vec{x}, t) 的单位体积内，产生一个带负电的标量粒子的场算符。

$$\phi^{\dagger(+)}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} b_p e^{-ip \cdot x} , \quad (3.71)$$

表示在时空点 (\vec{x}, t) 的单位体积内, 湮灭一个带负电的标量粒子的场算符。

$$\phi^{\dagger(+)}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}} a_p^\dagger e^{+ip \cdot x}, \quad (3.72)$$

表示在时空点 (\vec{x}, t) 的单位体积内, 产生一个带正电的标量粒子的场算符。

复标量场的相对论协变的对易关系为

$$\begin{cases} [\phi(x), \phi^\dagger(y)] = i\Delta(x-y); \\ [\phi(x), \phi(y)] = [\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)] = 0. \end{cases} \quad (3.73)$$

练习:

- 1) 推导(3.65)式。
- 2) 推导 $[Q, \Phi]$; $[Q, \Phi^+]$ 。

标量场的费曼传播子 (Feynman Propagator) :

费曼传播子定义为两场算符时序乘积 (time-ordered product) 的真空期望值

$$i\Delta_F(x-y) \equiv \langle 0|T(\phi(x)\phi^+(y))|0\rangle. \quad (3.74)$$

其中T表示时序符号。时序符号的作用定义为

$$T(\phi(x)\phi(y)) = \phi(x)\phi(y)\theta(x_0 - y_0) \pm \phi(y)\phi(x)\theta(y_0 - x_0). \quad (3.75)$$

其中第二项前的正负号分别对应玻色子和费米子情形。对于等时的情形, 尽管时序操作并没有很好地定义, 但由于此时不同空间点的场算符彼此可以对易, 因而也没有问题。

对标量场当 $x_0 > y_0$ 时:

$$\langle 0|T(\phi(x)\phi^\dagger(y))|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle = \langle 0|\phi^{(+)}(x)\phi^{\dagger(-)}(y)|0\rangle. \quad (3.76)$$

其中 (+), (-) 分别表示场的傅立叶(平面波)展开中的正频和负频部分。这样, 当 $x_0 > y_0$ 时费曼传播子为

$$i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \equiv -i\Delta_F^{(+)}(x-y). \quad (3.77)$$

类似地, 当 $y_0 > x_0$ 时费曼传播子为

$$i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{+ip \cdot (x-y)} \equiv -i\Delta_F^{(-)}(x-y). \quad (3.78)$$

将上述两种情况一起考虑有

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x-y) &= \theta(x_0 - y_0) i\Delta_F^{(+)}(x-y) + \theta(y_0 - x_0) i\Delta_F^{(-)}(x-y) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} [\theta(x_0 - y_0) e^{-ip \cdot (x-y)} + \theta(y_0 - x_0) e^{+ip \cdot (x-y)}] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{2\omega_p} [\theta(x_0 - y_0) e^{-i\omega_p(x_0 - y_0)} + \theta(y_0 - x_0) e^{+i\omega_p(x_0 - y_0)}] \\ &= - \int d^3p \frac{e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{(2\pi)^3} \int_{C_F} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{e^{-ip_0(x_0 - y_0)}}{(p_0 - \omega_p)(p_0 + \omega_p)}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

其中 C_F 从 p^0 实轴左下过原点到实轴上。当 $x_0 < y_0$ 时迴路走无穷大上半平面; 当 $y_0 < x_0$ 时迴路走无穷大下半平面。这样我们有

$$\Delta_F(x-y) = \int_{C_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2}. \quad (3.80)$$

或者可以表示为

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \Delta_F(p) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.81)$$

练习:

证明(3.81), 并说明积分迴路的选择如何。

3.2 狄拉克场

洛伦兹群的有限维表示可以是单值的也可以是双值的, 后者称为旋量表示。满足洛伦兹群旋量表示的场, 所对应的是自旋为半整数的粒子, 其中最为重要的是自旋为二分之一的费米子, 相应的场称为狄拉克场。

3.2.1 狄拉克方程(Dirac Equation)的建立

在上世纪二十年代,人们发现相对论协变的克莱茵-戈登方程有负能解,会导致负几率的出现。薛定谔方程含有对时间的一次微商,没有负几率的问题。狄拉克就试图构造一个含有对时间一次偏微分,同时是相对论协变的粒子运动方程。

从粒子的质壳(mass-shell)条件

$$p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (3.82)$$

出发,假定能、动量和质量之间有线性关系

$$E = \alpha^i p_i + \beta m. \quad (3.83)$$

此处, α_i 和 β 为关系比例系数。将上式中能动量换为量子力学中相应的算符,即

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad p^i \rightarrow -i \nabla^i \quad (3.84)$$

并作用到波函数上即得到狄拉克方程

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi. \quad (3.85)$$

对上方程左右两端的算符部分平方,应当能够回到克莱茵-戈登方程

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-i \alpha_i \nabla^i + \beta m)^2 \psi = (-\vec{\nabla}^2 + m^2) \psi. \quad (3.86)$$

这要求 α_i, β 应满足如下关系:

$$\begin{cases} \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \\ \{\alpha_i, \beta\} = 0 \\ \alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \end{cases}. \quad (3.87)$$

为把方程(3.85)表示成显示的时空协变形式,定义

$$\gamma^0 = \beta; \quad \gamma^i = \beta \alpha^i. \quad (3.88)$$

显然

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (3.89)$$

这样狄拉克方程就可以表示成

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (3.90)$$

或

$$(i \not{\partial} - m)\psi(x) = 0. \quad (3.91)$$

γ 代数:

由 (3.89) 知

$$(\gamma^0)^2 = 1; (\gamma^i)^2 = -1. \quad (3.92)$$

由于哈密顿算符是厄米算符, 可以证明

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0; \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i, \quad (3.93)$$

即 γ^0 是厄米的, 而 γ^i 是反厄米的(anti-Hermitian)。协变的 γ 矩阵定义为

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu, \quad (3.94)$$

另外, 还可以证明, γ^μ 矩阵应当是无迹的, 如

$$\text{Tr} \gamma^i = 0, \quad (3.95)$$

因为如:

$$\text{Tr} \gamma^i = \text{Tr}(\gamma^i (\gamma^0)^2) = -\text{Tr}(\gamma^0 \gamma^i \gamma^0) = -\text{Tr} \gamma^i. \quad (3.96)$$

而 γ^0 可由与 α_i 的关系而证明迹也为零。由于 $\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$, 它们的本征值只能为 ± 1 , 而同时 $\text{Tr} \alpha_i = \text{Tr} \beta = 0$, 所以 α_i, β 一定为偶数阶矩阵, 这样 γ^μ 矩阵也就只能是偶数阶矩阵。但 γ^μ 不可能是二阶矩阵, 因为这样的二阶矩阵无法由2x2矩阵的完全集, 即泡利矩阵 (Pauli Matrices) 加单位矩阵, 构造出来; 如含有单位矩阵的任意线性组合无法得到迹为零的矩阵, 这样 γ 矩阵的最低阶就只能是四阶, 即四阶矩阵。原则上可以构造任意多个满足反对易关系 (3.89) 的4x4矩阵, 其中使用方便和较多的是所谓狄拉克表象形式 (Dirac Representaion)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \text{I} & 0 \\ 0 & -\text{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

这样，狄拉克场就应当是四分量的

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T. \quad (3.98)$$

其中T表示转置。

定义狄拉克场 ψ 的共轭场 $\bar{\psi}$ 为

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0. \quad (3.99)$$

对狄拉克方程(3.90)取厄米共轭后再右乘 γ^0 后得

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0. \quad (3.100)$$

由方程(3.90)和(3.100)我们可以构造出洛伦兹协变的，和狄拉克方程相容的拉氏密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (3.101)$$

狄拉克粒子的自旋:

由(3.83)可知，狄拉克方程所描述的，自由粒子的哈密顿算符可以表示为

$$H = \alpha^i p_i + \beta m. \quad (3.102)$$

其中 α^i 可以表示为

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.103)$$

按照经典力学中的定义，角动量算符为

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = \epsilon_{ijk} x_j p_k. \quad (3.104)$$

过度到量子力学，角动量算符在坐标表象的形式为将动量换为算符，即 $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$ 。由坐标和动量的对易关系很容易得到

$$[H, p_i] = 0; [H, L_i] = -i\epsilon_{ijk}\alpha_j p_k \neq 0. \quad (3.105)$$

表明自由的狄拉克粒子能量动量是守恒量，而（轨道）角动量不是。由于空间转动不变性和诺特定理告诉我们，角动量应该是守恒量，所以经典角动量的定义对狄拉克粒子是不够的。定义一个新的算符

$$\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

由于

$$[\alpha_i, \Sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\alpha_k; [\beta, \Sigma_i] = 0. \quad (3.107)$$

所以

$$[H, \frac{1}{2}\Sigma_j] = [\alpha_i p_i + \beta m, \frac{1}{2}\Sigma_j] = \frac{1}{2}p_i [\alpha_i, \Sigma_j] + \frac{1}{2}m[\beta, \Sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\alpha_j p_k. \quad (3.108)$$

结合(3.105)和(3.105)可知

$$[H, L_j + \frac{1}{2}\Sigma_j] = 0, \quad (3.109)$$

亦即 $\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$ 为守恒量。其中后一部分 $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}$ 所对应的角动量部分称为粒子的自旋（角动量）。

由于

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\right)^2 &= \frac{1}{4} \left\{ \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{3}{4} \mathbf{I} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

其中I是2x2的单位矩阵。上式表明，狄拉克方程所描述的粒子自旋为1/2。

洛伦兹变换的旋量表示：

由于洛伦兹变换 Λ 满足

$$(\Lambda\Lambda)^\lambda{}_\nu = g^\lambda{}_\nu = \delta^\lambda{}_\nu \quad (3.111)$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x'^\mu = \Lambda^{\mu\nu} x_\nu \\ \partial_\mu &\rightarrow \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \Lambda^{\mu\nu} x_\nu} = (\Lambda^{-1})^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \Lambda_{\mu\nu} \partial^\nu \end{aligned} \quad (3.112)$$

已知无穷小洛伦兹变换下 $\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu\nu}$ 为一无穷小二阶反对称张量。设在洛伦兹变换下狄拉克场的变化为

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x') = L(\Lambda)\Psi(x), \quad (3.113)$$

所有 $L(\Lambda)$ 的集合构成洛伦兹群的旋量表示。由于狄拉克方程是相对论性的方程，因而在Lorentz变换下应当保持不变

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) &= 0 \\ \Rightarrow \\ (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\Psi'(x') &= 0 \\ \Rightarrow \\ (i\gamma^\mu \Lambda_{\mu\nu} \partial^\nu - m)L(\Lambda)\Psi(x) &= 0 \\ \Rightarrow \\ L^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu \Lambda_{\mu\nu} L(\Lambda) &= \gamma_\nu \\ \Rightarrow \\ L^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu L(\Lambda)\Lambda_{\mu\nu} &= \gamma_\nu \end{aligned} \quad (3.114)$$

引入矩阵

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (3.115)$$

有

$$\begin{aligned}
 [\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] &= \sigma^{\mu\nu} \gamma^\lambda - \gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu} \\
 &= \frac{i}{2} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda - \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu] \\
 &= \frac{i}{2} [\gamma^\mu [2g^{\nu\lambda} - \gamma^\lambda \gamma^\nu] - \gamma^\nu [2g^{\mu\lambda} - \gamma^\lambda \gamma^\mu] - \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu] \\
 &= \frac{i}{2} [2\gamma^\mu g^{\nu\lambda} - 2\gamma^\nu g^{\mu\lambda} - 2g^{\mu\lambda} \gamma^\nu + 2g^{\nu\lambda} \gamma^\mu] \\
 &= 2i[\gamma^\mu g^{\nu\lambda} - \gamma^\nu g^{\mu\lambda}]
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

利用算符恒等式

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots \tag{3.117}$$

令 $A = \frac{i}{4} \sigma^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}$, $B = \gamma^\mu$, 精确到 ω 的一次幂

$$\begin{aligned}
 &e^{\frac{i}{4} \sigma^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}} \gamma^\mu e^{-\frac{i}{4} \sigma^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}} \\
 &= \gamma^\mu + \frac{i}{4} [\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] \omega_{\alpha\beta} \\
 &= \gamma^\mu - \frac{1}{2} (g^{\mu\beta} \gamma^\alpha - g^{\alpha\mu} \gamma^\beta) \omega_{\alpha\beta} \\
 &= \gamma^\mu - \frac{1}{2} \omega_\alpha^\mu \gamma^\alpha + \frac{1}{2} \omega^\mu_\beta \gamma^\beta \\
 &= \gamma^\mu + \omega^\mu_\beta \gamma^\beta \\
 &= (g^\mu_\beta + \omega^\mu_\beta) \gamma^\beta \\
 &= (\Lambda)^\mu_\beta \gamma^\beta .
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

由上, 并考虑到 $\Lambda^\mu_\beta \Lambda_{\mu\nu} \gamma^\beta = g_{\beta\nu} \gamma^\beta = \gamma_\nu$ 后 (3.114) 得证。其中从

$$\begin{aligned}
 x^\mu x_\mu &= x'^\mu x'_\mu \\
 &\Rightarrow \Lambda^\mu_\rho \Lambda_{\mu\alpha} x^\rho x^\alpha \\
 &\Rightarrow \Lambda^\mu_\rho \Lambda_{\mu\alpha} = g_{\rho\alpha} \\
 (x'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu) .
 \end{aligned}$$

这样我们找到了狄拉克旋量场洛伦兹变换群的一个表示

$$L(\omega) = \exp(-\frac{i}{4} \sigma^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}) \approx I - \frac{i}{4} \sigma^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} ; \tag{3.119}$$

反过来也可以认为，按如上洛伦兹变换的四分量场为狄拉克旋量。

以直截的做法，洛伦兹标量似乎可以构造为 $\Psi^+\Psi$ ，但 $\Psi'^+\Psi' = \Psi^+L^+L\Psi$ 。但 $L^+ \neq L^{-1}$ ，所以 $\Psi^+\Psi$ 并不是洛伦兹标量。

练习：

证明 $\bar{\Psi}\Psi$ 是洛伦兹标量（提示： $\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\rho = -2\gamma^\mu$ ）。

注意： $\bar{\Psi}\Psi$ 是一标量，而 $\Psi_\alpha\bar{\Psi}_\beta = A_{\alpha\beta}$ 为一矩阵。

洛伦兹变换(3.119)相应的生成元 $\sigma^{\alpha\beta}$ 是反对称矩阵，有六个独立的矩阵元，其中 $\sigma^{0i}/2$ 对应洛伦兹Boost； $\sigma^{ij}/2 = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = \frac{1}{2}\sum^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Sigma^k$ 对应洛伦兹转动，与自旋角动量相关。由此也可以看出，狄拉克旋量场描述自旋为1/2的粒子体系。

由于旋量有双值表示，物理量应该由旋量双线性形式(bilinears)来描述。已知在洛伦兹变换下

$$1) \quad \bar{\Psi}'(x')\Psi'(x') = \bar{\Psi}(x)\Psi(x), \quad \text{是标量, 只有一个。} \quad (3.120)$$

$$2) \quad \bar{\Psi}'(x')\gamma^\mu\Psi'(x') = \bar{\Psi}(x)L^{-1}\gamma^\mu L\Psi(x) \\ = \Lambda^\mu{}_\beta\bar{\Psi}(x)\gamma^\beta\Psi(x) \text{是线性矢量, 有四个。} \quad (3.121)$$

$$3) \quad \bar{\Psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\Psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\Psi}(x)\sigma^{\rho\sigma}\Psi(x), \quad \text{是二阶张量, 有六个。} \quad (3.122)$$

另外再引入一个新的 γ 矩阵

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho, \quad (3.123)$$

其中 $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ 为四阶全反对称张量(Tensor)。注意，由于有些文献中 $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ 没有逆变形式的定义，(3.123)中后一个等式会差一负号。由如上定义可知 γ_5 矩阵的形式为

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.124)$$

可以证明 $\gamma_5^2 = \mathbf{I}$ ； $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$

$$\gamma_5^2 = \mathbf{I} \quad ; \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (3.125)$$

练习：证明(3.125)式成立。

$$4) \quad \bar{\Psi}\gamma_5\gamma^\mu\Psi \quad (3.126)$$

为赝矢量(Pseudo-vector)，共有四个。

$$5) \quad \bar{\Psi}\gamma_5\Psi \quad (3.127)$$

为赝标量(Pseudo-scalar)，只有一个。

下面说明 (3.126) 和 (3.127) 在洛伦兹变换下的矢量和标量性 (赝矢和赝标性质后面再讲)

$$\begin{aligned} L^{-1}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3L &= L^{-1}\frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho L \\ &= \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\Lambda^\mu_{\mu'}\gamma^{\mu'}\Lambda^\nu_{\nu'}\gamma^{\nu'}\Lambda^\sigma_{\sigma'}\gamma^{\sigma'}\Lambda^\rho_{\rho'}\gamma^{\rho'} \\ &= \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\Lambda^\mu_{\mu'}\Lambda^\nu_{\nu'}\Lambda^\sigma_{\sigma'}\Lambda^\rho_{\rho'}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\sigma'}\gamma^{\rho'} \\ &= \frac{1}{4!}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\sigma'}\gamma^{\rho'} \begin{vmatrix} \Lambda^0_{\mu'} & \Lambda^0_{\nu'} & \Lambda^0_{\sigma'} & \Lambda^0_{\rho'} \\ \Lambda^1_{\mu'} & \Lambda^1_{\nu'} & \dots & \dots \\ \Lambda^2_{\mu'} & \Lambda^2_{\nu'} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (\text{从行列式可以看出}\mu' \neq \nu' \neq \sigma' \neq \rho') \\ &= \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \begin{vmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{vmatrix} \quad (\gamma^\mu\gamma^\nu\text{的反对易与矩阵中换行反对易相消}) \\ &= \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \text{Det}|\Lambda| \end{aligned} \quad (3.128)$$

因而对于洛伦兹变换， $\text{Det}|\Lambda| = +1$ ，

$$L^{-1}\gamma_5L = \gamma_5. \quad (3.129)$$

由于 γ 矩阵是 4×4 矩阵，而任一 4×4 矩阵有16个矩阵元，亦即线性独立的 4×4 矩阵最多为十六个，可以证明如下十六个矩阵

$$\Gamma^i = [\Gamma^S = I ; \Gamma_\mu^V = \gamma_\mu ; \Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu} ; \Gamma_\mu^A = \gamma_5 \gamma_\mu ; \Gamma^P = i\gamma_5] \quad (3.130)$$

是一组线性独立的 4×4 矩阵，构成了一个完备集，任一 4×4 矩阵可以由它们来展开。如是，则双线性型旋量的独立形式也只有十六个，可以一般地表示为 $\bar{\psi}\Gamma^i\psi$ 。 Γ^i 矩阵有如下基本性质

性质1: 对任一 Γ^i 有 $(\Gamma^i)^2 = \Gamma^i\Gamma^i = \pm I$ 。

性质2: Γ^i 中除 Γ^S 外的任一矩阵 Γ^a ，存在一个 Γ^b 与其反对易，即 $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 0$ 。

性质3: 除 Γ^S 外， Γ^i 中任一 Γ 矩阵均无迹，即 $\text{Tr}[\gamma^i] = 0$ 。

性质4: Γ^i 中任何两个 Γ 矩阵相乘，在准确到一常数情形下等于 Γ^i 的某一个矩阵。

性质5: Γ^i 中矩阵是线性独立的，亦即

$$\sum_i C_i \Gamma^i = 0 \quad (3.131)$$

只有在 $C_i = 0$ 时才成立，其中 C_i 为常系数。

如上结论可用每个 Γ^i 与(3.131)相乘后再求迹证明。如，用 Γ^S 相乘求迹后得 $C_S = 0$ ；再用任一 Γ^j 与(3.131)相乘再求迹得

$$\text{Tr} \left[\sum_i C_i \Gamma^i \Gamma^j \right] = \text{Tr} \left[\sum_{i \neq j} C_i \Gamma^i \Gamma^j + C_j (\Gamma^j)^2 \right] \sim C_j$$

由(3.131) $\Rightarrow C_j = 0$ 。

Γ 矩阵的一些简单性质

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= 4, \\ \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\rho &= -2\gamma^\mu, \\ \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\rho &= 4g^{\mu\nu}, \\ \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma_\rho &= -2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\mu. \end{aligned} \quad (3.132)$$

γ 矩阵求迹

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu] &= \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu] = \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] = 0, \\
 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= 4g^{\mu\nu}, \\
 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}), \\
 \text{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho] &= 4i\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}.
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

练习:

$$\text{求证 } \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}).$$

3.2.2 负能解与狄拉克空穴理论 (Dirac hole)

将平面波 $\Psi(x) \sim e^{-ip \cdot x}$ 代入狄拉克方程

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi(x) = 0,$$

得

$$(\not{p} - m)\Psi(x) = 0.$$

左乘 $(\not{p} + m)$ 得

$$\begin{aligned}
 p^2 - m^2 &= 0 \\
 \Rightarrow E &= \pm\omega_p = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2},
 \end{aligned}$$

即狄拉克方程也有负能解。狄拉克利用泡利不相容原理解决了这个问题，他认为真空为所有负能态都被负能粒子填满，而所有正能态均空着的态。由于泡利不相容，这样就不会出现正能粒子向负能的塌缩，这中与实际不相符的情况发生，保证了物理态的稳定性。当负能海中缺少粒子时就形成了空穴态。

按照狄拉克空穴理论，一旦负能粒子，如电子，被激发出来以后，负能海中将会留下一个能量为 $-E$ 的空穴，这个空穴的宏观表现就相当于存在一个电量为 $-e$ ，能量为 $+E$ 的粒子，即反粒子。狄拉克空穴理论表明应当存在正反粒子对出现的过程

$$\text{能量} \rightarrow \text{电子} + \text{空穴}。 \tag{3.134}$$

不久，实验上果然找到了正电子，验证了狄拉克的假设。

空穴理论虽然巧妙地克服了狄拉克方程负能解困难，但这种解释看起来还是略显牵强，并且它也无助于解决克莱茵-戈登方程存在的同样问题。合理的解释是波函数 $\Psi(x)$ 为粒子构成场， $|\Psi(x)|^2$ 表示在时空点 x 的粒子数密度。狄拉克方程既描述粒子，又描述反粒子，因此不再是单粒子运动方程，而成为了场的运动方程。这样，正-反粒子的对产生在场二次量子化后可以很自然地得到解释。

3.2.3 自由粒子的平面波解和投影算符

按照空穴理论，狄拉克方程既可以描述粒子，同时也可以描述反粒子的状态，因此狄拉克方程的平面波解中应该包含正负能解两部分。在静止系中狄拉克方程的平面波解显然为

$$\Psi(x) = \Psi^{(+)}(x) + \Psi^{(-)}(x), \quad (3.135)$$

$$\Psi^{(+)}(x) = u(0)e^{-imt}; \quad \Psi^{(-)} = v(0)e^{+imt}. \quad (3.136)$$

其中，动量空间中的旋量波函数 $u_i(0)$ 和 $v_i(0)$ 可取为

$$u_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.137)$$

可以证明，经洛伦兹速迁 (Lorentz Boost)

$$u_i(p) = L_{\text{Boost}}(\beta)u_i(0), \quad (3.138)$$

$$v_i(p) = L_{\text{Boost}}(\beta)v_i(0) \quad (3.139)$$

后 $u_i(p)$, $v_i(p)$ 仍满足狄拉克方程。上式中洛伦兹速迁 L_{Boost} 可以通过如下方式表达为一个简洁的形式。

定义：

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \cosh \Phi; \quad \gamma\beta = \sinh \Phi.$$

其中双曲函数为

$$\begin{aligned}\sinh \Phi &= \frac{e^\Phi - e^{-\Phi}}{2}; \quad \cosh \Phi = \frac{e^\Phi + e^{-\Phi}}{2}, \\ \sinh \Phi &= \sqrt{\cosh^2 \Phi - 1} = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2} - 1} = \gamma\beta.\end{aligned}$$

则boost变换关系为

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Phi & \sinh \Phi & 0 & 0 \\ \sinh \Phi & \cosh \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (3.140)$$

这里粒子速度 $\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{E}$, 是由 x 系 boost 到相对速度都为 β 的 x' 系。

由 $\cosh \frac{\Phi}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$ 得:

$$\cosh \frac{\Phi}{2} = \left[\frac{1}{2m}(E + m) \right]^{\frac{1}{2}}; \quad \sinh \frac{\Phi}{2} = \left[\frac{1}{2m}(E - m) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

一般洛伦兹速迁因此可以证明形式为

$$L_{\text{Boost}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\Phi}{2} & \sigma \cdot \hat{\beta} \sinh \frac{\Phi}{2} \\ \sigma \cdot \hat{\beta} \sinh \frac{\Phi}{2} & \cosh \frac{\Phi}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma \cdot p}{E + m} \\ \frac{\sigma \cdot p}{E + m} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.141)$$

这样, 结合 (3.137) 和 (3.141) 可以把旋量 $u(p, s)$ 和 $v(p, s)$ 的四分量表达式

些出来

$$\begin{aligned}
 u_1(p) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix}; \quad u_2(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \\
 v_1(p) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_2(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.142)
 \end{aligned}$$

其中 $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$ 。

定义静止系中的三维自旋矢量为 \vec{s} ，这样可以形式地引入四维自旋矢量 $s_{\mu} = (0, \vec{s})$ 。由

$$\vec{s}^2 = 1, \quad p_{\mu} = (m, 0) \quad (3.143)$$

我们可以得到四维自旋矢量 s_{μ} 所满足的、洛伦兹不变的关系：

$$s_{\mu}^2 = -1, \quad p_{\mu} s^{\mu} = 0. \quad (3.144)$$

我们很容易发现，在粒子的静止系中，算符 $\vec{\sigma} \cdot \vec{s}$ 可以作为粒子的自旋算符，而其本征函数即为(3.137)中的 $u_i(0)$ 和 $v_i(0)$ ，满足

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{s} u_i(0) = u_i(0), \quad (3.145)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{s} v_i(0) = -v_i(0). \quad (3.146)$$

对自旋为1/2的粒子场因此可以定义静止系中的自旋投影算符为：

$$P(\vec{s}) = \frac{1 \pm \vec{\sigma} \cdot \vec{s}}{2}, \quad (3.147)$$

其中“+”和“-”分别对应旋量 u_i 和 v_i 。这样我们可以找到如下洛伦兹不变的投影算符

$$P(\vec{s}) = \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} \quad (3.148)$$

可作为旋量场静止系速迁后的自旋投影算符。进而可以证明 $u_1(p)$, $v_1(p)$ 为描述运动系中自旋沿动量方向的粒子； $u_2(p)$, $v_2(p)$ 表示自旋沿动量相反方向的粒子。这样，我们就得到了标志自旋取向为“s” (± 1) 的粒子的旋量波函数 $u(p, s)$ 和 $v(p, s)$ ，它们可以进一步表达为

$$\begin{aligned} u(p, s) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \xi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \xi_s \end{pmatrix} = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(E+m)}} u_s(0), \\ v(p, s) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix} = \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2m(E+m)}} v_s(0), \end{aligned} \quad (3.149)$$

其中 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ；当然它们也满足狄拉克方程，

$$\begin{cases} (\not{p} - m)u(p, s) = 0 \\ (\not{p} + m)v(p, s) = 0 \end{cases}. \quad (3.150)$$

由于 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ 可得 $u(p, s)$ 与 $v(p, s)$ 的共轭旋量为

$$\bar{u}(p, s) = u^\dagger(p, s) \gamma^0; \quad \bar{v}(p, s) = v^\dagger(p, s) \gamma^0. \quad (3.151)$$

相应地它们满足的方程为

$$\begin{cases} \bar{u}(p, s)(\not{p} - m) = 0 \\ \bar{v}(p, s)(\not{p} + m) = 0 \end{cases}. \quad (3.152)$$

对 $u(p, s), v(p, s), \bar{u}(p, s), \bar{v}(p, s)$ 取如下形式的归一化

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, s)u(p, r) &= \delta_{rs}, \\ \bar{v}(p, s)v(p, r) &= -\delta_{rs}, \\ \bar{u}(p, s)v(p, r) &= \bar{v}(p, s)u(p, r) = 0. \end{aligned} \quad (3.153)$$

由如上定义的正交归一关系(3.153)可以证明有如下完备性关系

$$\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) - v(p, s)\bar{v}(p, s) = I. \quad (3.154)$$

其中I为 4×4 单位矩阵。提示，为简便计经常人们也将 $u(p, s)$ 和 $v(p, s)$ 表示成 u_s 和 v_s 。

利用动量空间中的狄拉克方程 (3.150) 和 (3.152) 可以证明

$$\begin{aligned} m\bar{u}_s(p)\gamma^\mu u_r(p) &= p^\mu \bar{u}_s(p)u_r(p), \\ m\bar{v}_s(p)\gamma^\mu v_r(p) &= -p^\mu \bar{v}_s(p)v_r(p). \end{aligned} \quad (3.155)$$

∴

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(p)(\gamma^\mu p_\mu - m) &= 0 \\ \Rightarrow \bar{u}_r(p)\gamma^\mu p_\mu &= m\bar{u}_r(p) \\ \Rightarrow \bar{u}_r(p)\gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu u_s(p) &= m\bar{u}_r(p)\gamma^\nu u_s(p) \\ \Rightarrow \bar{u}_r(p)(2g^{\mu\nu} p_\mu - \gamma^\nu \not{p})u_s(p) &= m\bar{u}_r(p)\gamma^\nu u_s(p) \\ \Rightarrow 2\bar{u}_r(p)p^\nu u_s(p) &= 2m\bar{u}_r(p)\gamma^\nu u_s(p) \end{aligned}$$

取上式中 $\mu = 0$ 可得正交关系的另外一种表达形式

$$\begin{aligned} u_r^+(p)u_s(p) &= v_r^+(p)v_s(p) = \frac{E}{m}\delta_{rs}, \\ u_r^+(p)v_s(\tilde{p}) &= v_r^+(p)u_s(\tilde{p}) = 0. \end{aligned} \quad (3.156)$$

此处， \tilde{p} 表示 $(p^0, -\vec{p})$ 。

练习:

- 1) 证明狄拉克方程(3.150)成立。
- 2) 推导正交关系 $u_r^\dagger(p)v_s(\tilde{p}) = v_r^\dagger(p)u_s(\tilde{p}) = 0$ 。

定义旋量场的正负能解投影算符 (projection operator)

$$\Lambda_+(p) = \sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s); \quad \Lambda_- = -\sum_s v(p, s)\bar{v}(p, s). \quad (3.157)$$

利用旋量的正交性条件 (??) 可得

$$\begin{aligned}\Lambda_+ u(p, s) &= u(p, s); \Lambda_+ v(p, s) = 0, \\ \Lambda_- v(p, s) &= v(p, s); \Lambda_- u(p, s) = 0.\end{aligned}\quad (3.158)$$

从上面 (3.158) 可以明显看出 Λ_+ 和 Λ_- 的物理含义。

另外, 可以证明投影算符满足

$$\Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}; \Lambda_+ \Lambda_- = 0; \Lambda_+ + \Lambda_- = I. \quad (3.159)$$

由 (3.149) 式

$$\begin{aligned}\Lambda_+(p) &= \sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \frac{1}{2m(E+m)} (\not{p} + m) \frac{1 + \gamma^0}{2} (\not{p} + m) \\ &= \frac{\not{p} + m}{2m}.\end{aligned}\quad (3.160)$$

类似可以证明

$$\Lambda_-(p) = - \sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \frac{-\not{p} + m}{2m}. \quad (3.161)$$

练习:

证明式(3.161)。

3.2.4 旋量场的量子化

为二次量子化狄拉克场, 先由拉氏密度算出旋量场的正则共轭动量

$$\Pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\Psi}(x)} = i\Psi^\dagger. \quad (3.162)$$

将坐标空间中的旋量场作傅里叶展开

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \int d^3p \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\omega_p (2\pi)^3}} \sum_s [c_s(p) u(p, s) e^{-ip \cdot x} + d_s^\dagger(p) v(p, s) e^{ip \cdot x}], \\ \bar{\Psi}(x) &= \int d^3p \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\omega_p (2\pi)^3}} \sum_s [c_s^\dagger(p) \bar{u}(p, s) e^{ip \cdot x} + d_s(p) \bar{v}(p, s) e^{-ip \cdot x}].\end{aligned}\quad (3.163)$$

按照如上分解，场的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3x (\Pi\dot{\Psi} - \mathcal{L}) \\
 &= \int d^3x (i\Psi^+\dot{\Psi} - \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi) \\
 &= \int d^3x \bar{\Psi}(i\gamma^i\partial^i + m)\Psi \\
 &= \int d^3x \bar{\Psi}i\gamma^0\partial^0\Psi \\
 &= \int d^3p p_0 \sum_s [c_s^\dagger(p)c_s(p) - d_s(p)d_s^\dagger(p)]. \quad (3.164)
 \end{aligned}$$

如上，则场的哈密顿能量可能为负。为避免这个困难可以采用两个措施，一个是要求费米子场反对易关系

$$\{\Psi_\alpha(t, \vec{x}), \Pi_\beta(t, \vec{x}')\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\delta_{\alpha\beta}, \quad (3.165)$$

或

$$\begin{aligned}
 \{\Psi_\alpha(t, \vec{x}), \Psi_\beta^\dagger(t, \vec{x}')\} &= \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \\
 \{\Psi_\alpha(t, \vec{x}), \Psi_\beta(t, \vec{x}')\} &= \{\Psi_\alpha^\dagger(t, \vec{x}), \Psi_\beta^\dagger(t, \vec{x}')\} \\
 &= \{\Pi_\alpha^\dagger(t, \vec{x}), \Pi_\beta^\dagger(t, \vec{x}')\} = 0. \quad (3.166)
 \end{aligned}$$

对应动量空间算符的反对易关系为

$$\begin{aligned}
 \{c_s(p), c_{s'}^\dagger(p')\} &= \delta_{ss'}\delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \\
 \{d_s(p), d_{s'}^\dagger(p')\} &= \delta_{ss'}\delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \\
 &\text{其余为零.} \quad (3.167)
 \end{aligned}$$

其二是算符序列满足正规乘积，这样

$$: H : = \int d^3p p_0 \sum_s [c_s^\dagger(p)c_s(p) + d_s^\dagger(p)d_s(p)]. \quad (3.168)$$

练习：

由哈密顿量的定义，和狄拉克场的平面波展开证明式 (3.168)

从诺特定理出发我们还可以计算狄拉克场的能动量张量

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial^\nu\Psi. \quad (3.169)$$

将场的平面波展开式代入上式可得动量算符

$$:\vec{P}: = \int d^3p \vec{p} \sum_s [c_s^\dagger(p)c_s(p) + d_s^\dagger(p)d_s(p)]. \quad (3.170)$$

由于狄拉克场的拉格朗日密度是第一类规范变换

$$\Psi \rightarrow e^{i\alpha}\Psi; \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}e^{-i\alpha} \quad (3.171)$$

下不变的，相应的守恒流为

$$J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad (3.172)$$

满足

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (3.173)$$

相应的守恒荷为

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x J^0 = \int d^3x : \Psi^\dagger\Psi : \\ &= \int d^3p \sum_s [c_s^\dagger(p)c_s(p) - d_s^\dagger(p)d_s(p)], \end{aligned} \quad (3.174)$$

可以为负。如 Q 视为总电荷，积分内括号前，亦即 J^μ 前，可加一单粒子荷电荷量 e 。

由能动量和电荷的表达式可以看出， d_s^\dagger 是反物质（antimatter）的产生算符（或负能粒子的湮灭算符），对电子来讲，反粒子就是正电子（positron）。

由动量空间的算符之间的反对易关系

$$\begin{aligned} \{c_s^\dagger(p), c_s^\dagger(p)\} &= \{c_r(p), c_r(p)\} = 0, \\ \{d_s^\dagger(p), d_s^\dagger(p)\} &= \{d_r(p), d_r(p)\} = 0, \end{aligned} \quad (3.175)$$

可知

$$\begin{aligned} c_s^\dagger(p)c_s^\dagger(p) &= 0; c_r(p)c_r(p) = 0, \\ d_s^\dagger(p)d_s^\dagger(p) &= 0; d_r(p)d_r(p) = 0. \end{aligned} \quad (3.176)$$

表明不能有两个及以上的粒子处于相同的量子态，即狄拉克场满足费米-狄拉克统计。这样

$c_s^\dagger(p)$	-----	产生一个动量为 p ，极化为 s ，电荷为 q 的粒子算符
$c_s(p)$	-----	湮灭一个动量为 p ，极化为 s ，电荷为 q 的粒子算符
$d_s^\dagger(p)$	-----	产生一个动量为 p ，极化为 s ，电荷为 $-q$ 的粒子算符
$d_s(p)$	-----	湮灭一个动量为 p ，极化为 s ，电荷为 $-q$ 的粒子算符

狄拉克场的协变费曼传播子:

旋量场的传播子定义为

$$iS_{F\alpha\beta}(x-y) \equiv \langle 0 | T \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) | 0 \rangle, \quad (3.177)$$

其中

$$T \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) = \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) \theta(x_0 - y_0) - \bar{\Psi}_\beta(y) \Psi_\alpha(x) \theta(y_0 - x_0). \quad (3.178)$$

这样

$$iS_{F\alpha\beta}(x-y) = \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) | 0 \rangle - \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \bar{\Psi}_\beta(y) \Psi_\alpha(x) | 0 \rangle. \quad (3.179)$$

将旋量场的平面波展开式 (3.163) 代入上式

$$\begin{aligned} iS_{F\alpha\beta}(x-y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_p} (\theta(x_0 - y_0) e^{-ip \cdot (x-y)} \sum_s u_\alpha(p, s) \bar{u}_\beta(p, s) \\ &\quad - \theta(y_0 - x_0) e^{ip \cdot (x-y)} \sum_s v_\alpha(p, s) \bar{v}_\beta(p, s)) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} (\theta(x_0 - y_0) e^{-ip \cdot (x-y)} (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \\ &\quad - \theta(y_0 - x_0) e^{ip \cdot (x-y)} (\not{p} - m)_{\alpha\beta}) \\ &= \theta(x_0 - y_0) (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &\quad - \theta(y_0 - x_0) (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{ip \cdot (x-y)} \\ &\stackrel{(3.79)}{=} (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} i \Delta_F(x-y). \end{aligned} \quad (3.180)$$

在上面的计算中用到了产生湮灭算符作用在真空上的性质，及

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \theta(x^0 - y^0) = \delta(x^0 - y^0). \quad (3.181)$$

由 (3.81) 和 (3.180)

$$\begin{aligned}
 iS_F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} \\
 &= \begin{cases} \langle 0 | \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle & \text{对 } x^0 > y^0 \text{ 迴路走下半面} \\ -\langle 0 | \bar{\Psi}(y) \Psi(x) | 0 \rangle & \text{对 } y^0 > x^0 \text{ 迴路走上半面} \end{cases} . \quad (3.182)
 \end{aligned}$$

这样, 在动量空间中费米子的传播子为

$$iS_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} . \quad (3.183)$$

由 (3.182)

$$(i\not{\partial} - m)S_F(x-y) = \delta^4(x-y) , \quad (3.184)$$

说明 S_F 是狄拉克算符的格林函数。

3.2.5 外尔旋量 (Weyl Spinors)

由洛伦兹群生成元的表示

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\sigma^{0i} &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} , \\
 \frac{1}{2}\sigma^{ij} &= \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^j] = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} , \quad (3.185)
 \end{aligned}$$

可知洛伦兹群在狄拉克表象中是可约的。引入手征算符 (chiral operators)

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) ; P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) , \quad (3.186)$$

显然有

$$P_L^2 = P_L ; P_R^2 = P_R ; P_L P_R = P_R P_L = 0 , P_L + P_R = 1 . \quad (3.187)$$

因此手征算符具有投影算符的性质。定义左、右手旋量场为

$$\Psi_L = P_L \Psi ; \Psi_R = P_R \Psi . \quad (3.188)$$

由 γ_5 的 (3.124) 表示

$$\begin{aligned}\Psi_L &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Psi_1 - \Psi_3 \\ \Psi_2 - \Psi_4 \\ -\Psi_1 + \Psi_3 \\ -\Psi_2 + \Psi_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varphi_L \\ -\varphi_L \end{pmatrix}, \\ \Psi_R &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Psi_1 + \Psi_3 \\ \Psi_2 + \Psi_4 \\ \Psi_1 + \Psi_3 \\ \Psi_2 + \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_R \\ \varphi_R \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.189)$$

当费米子质量 $m = 0$ 时，狄拉克方程变为

$$i\not{\partial}\Psi = 0. \quad (3.190)$$

由上式可得

$$i\not{\partial}\Psi_L = 0; \quad i\not{\partial}\Psi_R = 0. \quad (3.191)$$

显然，如 $m \neq 0$ 则 Ψ_L 和 Ψ_R 在狄拉克方程中将混合。由 γ 矩阵的 Dirac 表示，(3.191) 变为外尔方程

$$(\partial_0 - \vec{\sigma} \cdot \nabla)\varphi_L = 0; \quad (\partial_0 + \vec{\sigma} \cdot \nabla)\varphi_R = 0. \quad (3.192)$$

由于 \mathcal{L} 中的质量项

$$\bar{\Psi}\Psi = \bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L \quad (3.193)$$

在手征变换 (chiral transformation) 下

$$\Psi \rightarrow e^{i\gamma_5\theta}\Psi; \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}e^{i\gamma_5\theta} \quad (3.194)$$

不是不变的。因而只有当费米子质量为零时，拉格朗日才是手征变换下不变的。

将方程 (3.192) 变换到动量表象

$$\begin{aligned}(p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\tilde{\varphi}_L(p) &= 0, \\(p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\tilde{\varphi}_R(p) &= 0.\end{aligned}\tag{3.195}$$

由于 $p_0 = |\vec{p}|$ ，如上动量表象的外尔方程可以变为

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\tilde{\varphi}_L(p) &= -\tilde{\varphi}_L(p), \\ \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\tilde{\varphi}_R(p) &= \tilde{\varphi}_R(p).\end{aligned}\tag{3.196}$$

定义螺旋度算符 (helicity operator)

$$h \equiv \hat{p} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \hat{p}_i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}.\tag{3.197}$$

因此， $\tilde{\varphi}_L$ 和 $\tilde{\varphi}_R$ 是螺旋度算符的本征态，分别对应本征值为正负 $\frac{1}{2}$ 。

练习：

推导费米子传播子表达式 (3.180)。

3.3 电磁场及其量子化

十九世纪末，麦克斯韦在总结前人成果基础上，推广发展出了描述电磁场的麦克斯韦方程组。这是一组相对论性的运动方程，量子化后场量子是自旋为1，质量为零的光子。

3.3.1 麦克斯韦方程组

真空中，电场强度 $\vec{E}(t, \vec{x})$ 和磁感应强度 $\vec{B}(t, \vec{x})$ 满足的麦克斯韦方程（组）为

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0.\end{aligned}\quad (3.198)$$

引入电磁势四矢量-矢势（vector potential）

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}) \quad (3.199)$$

满足

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A^0. \quad (3.200)$$

定义

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}), \quad (3.201)$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (3.202)$$

其中 $F^{\mu\nu}$ 称为场强张量（field strength tensor）。按如上定义有

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.203)$$

即

$$F^{0i} = -E^i; \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k \quad (3.204)$$

这样麦克斯韦方程组就变为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (3.205)$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0. \quad (3.206)$$

定义 $F^{\mu\nu}$ 的对偶场强度张量 (dual field-strength tensor)

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.207)$$

这样 (3.206) 变为

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.208)$$

而从定义 (3.202), 上式自然成立。因此, 独立的麦克斯韦方程组只有 (3.205), 是相对论协变的。

练习: 从场强张量的定义, 证明有 (3.208) 式成立。

对 (3.205) 作微分得

$$\partial_\nu j^\nu = 0, \quad (3.209)$$

即流守恒方程。

由 (3.205) 出发, 可得四矢量 A^μ 所满足的运动方程

$$\square A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu. \quad (3.210)$$

或可表示成

$$\rho = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta A^0, \quad (3.211)$$

$$\vec{j} = \square \vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial t}A^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right). \quad (3.212)$$

此处 Δ 为拉普拉斯算符 (Laplacian), $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ 。尽管在量子场论中将 $A^\mu(t, \vec{x})$ 视作基本量, 但实际上它不是一个可观察量, 其定义有一定的不确定性。将 $A^\mu(x)$ 上加一个任意标量函数 $\phi(x)$ 的四维梯度项, 即

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \phi(x) \quad (3.213)$$

形式的定域规范变换 (local gauge transformation) 不改变场强张量 (3.202), 也不改变运动方程。规范的不定性表明运动方程与定义的物理量之间有冗余的自由度存在。

由于有规范的不定性, 实际物理计算会变得比较复杂, 通常总是选定一个给物理计算带来方便的规范进行, 最后的计算结果要保证是规范选择无关的。

常用的规范有洛伦兹规范 (Lorentz Gauge)

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.214)$$

这时自由电磁场四矢量 $A^\mu(x)$ 的运动方程变为

$$\square A^\mu = 0 \quad (3.215)$$

规范变换 (3.213) 中的标量函数将不再任意, 而应当满足

$$\square \phi = 0. \quad (3.216)$$

库伦规范 (Coulomb Gauge) 也是一个常用的规范

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (3.217)$$

(3.217) 表明 $\vec{A}(t, x)$ 是横场, 即极化方向与传播方向垂直。此时, 规范变换 (3.213) 中的标量函数满足条件

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \Delta \phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (3.218)$$

库伦规范下可以很清晰地看出电磁场的横向性质, 但不足之处是不具有相对论协变性。

3.3.2 电磁场的量子化

自由电磁场的拉格朗日密度函数显然可以表达为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \quad (3.219)$$

上式结合拉格朗日运动方程可得自由电磁场运动方程 (3.205)。然而由 (3.219) 出发定义 A^μ 场的共轭动量为

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -F^{0\mu}, \quad (3.220)$$

因此 $\Pi^0 = 0$ ，显然不能满足正则量子化对易关系

$$[A_\mu(t, \vec{x}), \Pi_\mu(t, \vec{x}')] = i\delta_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') , \quad (3.221)$$

原因是没有考虑规范条件。

在洛伦兹规范下，电磁场的拉格朗日密度可以选择为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) . \end{aligned} \quad (3.222)$$

从 (3.222) 出发，结合拉式运动方程可得洛伦兹规范条件下的矢势运动方程 (3.215)。

由 (3.222) 我们可得正则共轭动量为

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu . \quad (3.223)$$

将拉格朗日密度代入能动量张量密度表达式 (2.36) 得

$$\begin{aligned} H &= P^0 = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} \dot{A}_\mu - \mathcal{L} \right) d^3x \\ &= \int (-\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}) d^3x \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x (\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \vec{\nabla} A^\mu \cdot \vec{\nabla} A_\mu) \end{aligned} \quad (3.224)$$

$$\vec{P} = - \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} \vec{\nabla} A_\mu d^3x = \int d^3x \dot{A}^\mu \vec{\nabla} A_\mu . \quad (3.225)$$

正则量子化关系则为

$$\begin{aligned} [A_\mu(t, \vec{x}), \Pi_\nu(t, \vec{x}')] &= ig_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') , \\ [A_\mu(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{x}')] &= [\dot{A}_\mu(t, \vec{x}), \dot{A}_\nu(t, \vec{x}')] = 0 . \end{aligned} \quad (3.226)$$

然而如上正则量子化关系与洛伦兹规范不相容，因为

$$\begin{aligned} [\partial^\mu A_\mu(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{x}')] &= [\partial^0 A_0(t, \vec{x}) + \partial^i A_i(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{x}')] \\ &= -[\Pi_0(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{x}')] + \partial^i [A_i(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{x}')] \\ &= ig_{0\nu}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \neq 0 . \end{aligned} \quad (3.227)$$

与洛伦兹条件相矛盾。这个矛盾可以这样来解决，即认为洛伦兹规范条件是物理条件，只有作用在态矢量情形下方成立，

$$\langle \Phi | \partial_\mu A^\mu | \Phi \rangle = 0. \quad (3.228)$$

3.3.3 电磁场在动表象中的展开

光子的极化

在洛伦兹变换下， $A_\mu(x)$ 与 x_μ 一样是四矢量。设与 (2.50) 洛伦兹变换相应形式为

$$L(\Lambda)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} (S^{\alpha\beta})_{\mu\nu}, \quad (3.229)$$

其中形如 $(S^{\alpha\beta})_{\mu\nu}$ 的矩阵为洛伦兹群的生成元，是电磁场的自旋算符。为保证拉式密度在洛伦兹变换下保持不变

$$(S^{\alpha\beta})_{\mu\nu} = i(g_\mu^\alpha g_\nu^\beta - g_\nu^\alpha g_\mu^\beta). \quad (3.230)$$

$S^{\alpha\beta}$ 矩阵元的空间分量可以表示为

$$S^1 \equiv S^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}; \quad S^2 \equiv S_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad S^3 \equiv S^{12} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.231)$$

这样

$$\vec{S}^2 = (S^1)^2 + (S^2)^2 + (S^3)^2 = 1(1+1). \quad (3.232)$$

表明光子场是自旋为1的横场。由于光子的极化是相对于场的传播方向而言，可引入极化坐标系。即，以光子的运动方向 \vec{k}/ω 作为第3轴方向，与 \vec{k} 垂直的平面内，彼此相互正交的两个方向作为第1, 2轴方向，且三个方向构成右手系，时间轴与实验室系

相同。这样我们可以引入四维极化矢量 $\epsilon_\mu^\sigma(k)$ ，定义为

$$\begin{aligned}\epsilon^{(0)} &= (1, \vec{0}), \\ \epsilon^{(1)} &= (0, \vec{n}_1), \\ \epsilon^{(2)} &= (0, \vec{n}_2), \\ \epsilon^{(3)} &= (0, \frac{\vec{k}}{\omega}),\end{aligned}\quad (3.233)$$

其中 ϵ^0 称为标量极化； $\epsilon^{1,2}$ 为横向极化； ϵ^3 为纵向极化； \vec{n}_1, \vec{n}_2 是彼此垂直，且与 \vec{k} 相交的单位矢量

$$\vec{k} \cdot \vec{n}_i = 0; \quad \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = \delta_{ij} . \quad (3.234)$$

由上式可以验证 (3.233) 定义的极化矢量满足正交归一关系

$$\epsilon^{(\sigma)} \cdot \epsilon^{(\rho)} = g^{\sigma\rho} \quad (3.235)$$

且是完备的

$$\sum_{\sigma=1}^4 \epsilon_\mu^{(\sigma)} \epsilon_\nu^{(\sigma)} = \delta_{\mu\nu} . \quad (3.236)$$

这样，我们就可以把坐标空间的场 $A_\mu(x)$ 过渡到动量空间

$$\begin{aligned}A_\mu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} [a_\mu(k)e^{-ik \cdot x} + a_\mu^\dagger(k)e^{ik \cdot x}] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\sigma=1}^4 \epsilon_\mu^{(\sigma)}(k) [a_{(\sigma)}(k)e^{-ik \cdot x} + a_{(\sigma)}^\dagger(k)e^{ik \cdot x}]\end{aligned}\quad (3.237)$$

$$\Pi_\mu(x) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \sum_{\sigma=1}^4 \epsilon_\mu^{(\sigma)}(k) [a_{(\sigma)}(k)e^{-ik \cdot x} - a_{(\sigma)}^\dagger(k)e^{ik \cdot x}] \quad (3.238)$$

定义算符满足

$$A \overleftrightarrow{\partial}_\mu B \equiv A(\partial_\mu B) - (\partial_\mu A)B . \quad (3.239)$$

可以解出动量空间中的算符 $a_{(\sigma)}(k), a_{(\sigma)}^\dagger(k)$ 的场量子表示形式

$$\begin{aligned}a_{(\sigma)}(k) &= i \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \epsilon_{(\sigma)} \cdot A(x), \\ a_{(\sigma)}^\dagger(k) &= -i \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \epsilon_{(\sigma)} \cdot A(x).\end{aligned}\quad (3.240)$$

利用 (3.240) 和场量的正则对易关系 (3.226) 可得动量表象算符之间的对易关系

$$\begin{cases} [a_{(\sigma)}(k), a_{(\rho)}^\dagger(k')] = -g_{\sigma\rho}\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\ \text{其余为零} \end{cases} . \quad (3.241)$$

将场的平面波展开式 (3.237) 代入能动量表达式 (3.224) 和 (3.225) 得

$$\begin{aligned} :H: &= \int d^3k \omega_k \left(\sum_{\lambda}^3 a_{\lambda}^\dagger(k) a_{\lambda}(k) - a_0^\dagger(k) a_0(k) \right), \\ :P: &= \int d^3k \vec{k} \left(\sum_{\lambda}^3 a_{\lambda}^\dagger(k) a_{\lambda}(k) - a_0^\dagger(k) a_0(k) \right). \end{aligned} \quad (3.242)$$

上式显示, 将 $a_{\kappa}^\dagger(k)$ 和 $a_{\kappa}(k)$ 视作光子的产生湮灭算符对“标量光子”(scalar photon) 是不合适的。

考虑到

$$[a_{(0)}(k), a_{(0)}^\dagger(k')] = -\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.243)$$

定义粒子数密度算符为

$$N_{(\sigma)}(k) = \begin{cases} a_{(i)}^\dagger(k) a_{(i)}(k) \\ -a_{(0)}^\dagger(k) a_{(0)}(k) \end{cases} . \quad (3.244)$$

这样就有

$$[N_{(\sigma)}, a_{(\sigma)}^\dagger] = a_{(\sigma)}^\dagger; [N_{(\sigma)}, a_{(\sigma)}] = -a_{(\sigma)}. \quad (3.245)$$

避免了负能, 从而就可将 $a_{\sigma}^\dagger(k)$ 和 $a_{\sigma}(k)$ 视作相应极化光子的产生湮灭算符。

但由于标量光子算符的负对易子, 可以发现会带来所谓“不定度规”问题。由

$$|n_{(0)}(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{(0)}(k)!}} (a_{(0)}^\dagger(k))^{n_{(0)}(k)} |0\rangle, \quad (3.246)$$

可以发现在希尔伯特空间

$$\begin{aligned} \langle n_0 | n_0 \rangle &= \frac{1}{n_0!} \langle 0 | (a_{(0)}(k))^{n_0} (a_{(0)}^\dagger(k))^{n_0} | 0 \rangle \\ &= (-1)^{n_0}, \end{aligned} \quad (3.247)$$

可正可负，从而使得能量算符在粒子态间的平均值也可能是负的，

$$\begin{aligned}\langle n_0|H|n_0\rangle &= \omega_k n_0(k) \langle n_0(k)|n_0(k)\rangle \\ &= (-1)^{n_0(k)} \omega_k n_0(k) .\end{aligned}\quad (3.248)$$

进一步研究发现，“不定度规”问题的出现是由于没有考虑洛伦兹条件的限制

$$\begin{aligned}\partial_\mu A^\mu &= -i \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} k_\mu \epsilon^{(\sigma)\mu}(k) [a_{(\sigma)}(k) e^{-ik\cdot x} - a_{(\sigma)}^\dagger(k) e^{ik\cdot x}] \\ &\equiv (\partial_\mu A^\mu)^{(+)} + (\partial_\mu A^\mu)^{(-)} .\end{aligned}\quad (3.249)$$

显然

$$[(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}]^\dagger = (\partial_\mu A^\mu)^{(-)} .\quad (3.250)$$

于是 (3.228) 变为

$$\begin{aligned}\langle \Phi|\partial_\mu A^\mu|\Phi\rangle &= \langle \Phi|(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}|\Phi\rangle + \langle \Phi|(\partial_\mu A^\mu)^{(-)}|\Phi\rangle \\ &= \langle \Phi|(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}|\Phi\rangle + \langle \Phi|(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}|\Phi\rangle^* = 0 .\end{aligned}\quad (3.251)$$

(3.251) 在

$$\langle \Phi|(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}|\Phi\rangle = 0\quad (3.252)$$

成立时成立，因此可将 (3.252) 视作洛伦兹条件。

由 (3.249) 及光子场的横向条件，(3.252) 可表达为

$$[k_\mu \epsilon_{(0)}^\mu a_{(0)}(k) + k_\mu \epsilon_{(3)}^\mu a_{(3)}(k)]|\Phi\rangle = 0 .\quad (3.253)$$

由

$$k_\mu \epsilon_{(0)}^\mu = -k_\mu \epsilon_{(3)}^\mu$$

得

$$\begin{aligned}(a_{(0)}(k) - a_{(3)}(k))|\Phi\rangle &= 0 , \\ \langle \Phi|(a_{(0)}(k) - a_{(3)}(k))^\dagger &= 0 ,\end{aligned}\quad (3.254)$$

即

$$\begin{aligned}N_3 + N_0 &= a_{(3)}^\dagger a_{(3)} - a_{(0)}^\dagger a_{(0)} \\ &= \frac{1}{2}(a_{(3)}^\dagger - a_{(0)}^\dagger)(a_{(3)} + a_{(0)}) + \frac{1}{2}(a_{(3)}^\dagger + a_{(0)}^\dagger)(a_{(3)} - a_{(0)}) .\end{aligned}\quad (3.255)$$

从而

$$\langle \Phi | N_3 + N_0 | \Phi \rangle = 0. \quad (3.256)$$

这样标量光子和纵向光子将对场的能动量平均值没有贡献。进一步可以证明，纵光子和标量光子对态矢量的模也没有贡献，从而就避免了“不定度规”的困难。

练习：推导对易关系 (3.241)。

光子场的费曼传播子

自由光子场的传播子定义为

$$iD_{F\mu\nu}(x-y) = \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle \quad (3.257)$$

将光子场的平面波展开式代入上式得

$$\begin{aligned} \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle &= \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | A_\nu(y) A_\mu(x) | 0 \rangle \\ &= \theta(x_0 - y_0) \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}} \sum_{\sigma} \epsilon_{\mu}^{(\sigma)} \sum_{\rho} \epsilon_{\nu}^{(\rho)} \\ &\quad \langle 0 | (a_{(\sigma)}(k) e^{-ik \cdot x} + a_{(\sigma)}^+(k) e^{ik \cdot x}) (a_{(\rho)}(k') e^{-ik' \cdot y} + a_{(\rho)}^+(k') e^{ik' \cdot y}) | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(y_0 - x_0) \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}} \sum_{\sigma} \epsilon_{\mu}^{(\sigma)} \sum_{\rho} \epsilon_{\nu}^{(\rho)} \\ &\quad \langle 0 | (a_{(\rho)}(k') e^{-ik' \cdot y} + a_{(\rho)}^+(k') e^{ik' \cdot y}) (a_{(\sigma)}(k) e^{-ik \cdot x} + a_{(\sigma)}^+(k) e^{ik \cdot x}) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}} \sum_{\sigma} \epsilon_{\mu}^{(\sigma)} \sum_{\rho} \epsilon_{\nu}^{(\rho)} \\ &\quad [\langle 0 | a_{(\sigma)}(k) a_{(\rho)}^+(k') | 0 \rangle e^{-ik \cdot x + ik' \cdot y} \theta(x_0 - y_0) \\ &\quad \langle 0 | a_{(\rho)}(k') a_{(\sigma)}^+(k) | 0 \rangle e^{-ik' \cdot y + ik \cdot x} \theta(y_0 - x_0)] \\ &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}} \sum_{\rho, \sigma} \epsilon_{\mu}^{(\sigma)} \epsilon_{\nu}^{(\rho)} \\ &\quad [-g_{\sigma\rho} \delta^3(k - k') e^{-ik \cdot x + ik' \cdot y} \theta(x_0 - y_0) \\ &\quad + (-)g_{\sigma\rho} \delta^3(k - k') \theta(y_0 - x_0) e^{-ik' \cdot y + ik \cdot x}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\sigma,\rho} g_{\sigma\rho} \epsilon_\mu^{(\sigma)} \epsilon_\nu^{(\rho)} \\
 &\quad [e^{-ik(x-y)}\theta(x_0 - y_0) + e^{ik(x-y)}\theta(y_0 - x_0)] \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} [\theta(x_0 - y_0)e^{-i\omega_k(x_0-y_0)} \\
 &\quad + \theta(y_0 - x_0)e^{i\omega_k(x_0-y_0)}] \sum_{\sigma,\rho} \epsilon_\mu^{(\sigma)} \epsilon_\nu^{(\rho)} g_{\sigma\rho} \\
 &= -i\Delta_F(x-y) \sum_{\sigma,\rho} \epsilon_\mu^{(\sigma)} \epsilon_\nu^{(\rho)} g_{\sigma\rho} \\
 &= -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \sum_{\sigma} \frac{\epsilon_\mu^{(\sigma)} \epsilon_\nu^{(\sigma)}}{\epsilon^{(\sigma)} \cdot \epsilon^{(\sigma)}} \\
 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \tag{3.258}
 \end{aligned}$$

动量表象中

$$iD_{F\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \tag{3.259}$$

在 (3.258) 的倒数第二式中, 利用了

$$\sum_{\sigma} \frac{\epsilon_\mu^{(\sigma)} \epsilon_\nu^{(\sigma)}}{\epsilon^{(\sigma)} \cdot \epsilon^{(\sigma)}} = g_{\mu\nu} \tag{3.260}$$

或 $\sum_{\sigma\rho} \epsilon_\mu^{(\sigma)} \epsilon_\nu^{(\rho)} g^{\sigma\rho} = g_{\mu\nu}$; 注意, 此处 σ, ρ 并非通常逆协变收缩。

3.4 C,P,T 变换与 CPT 定理

在经典力学中, 我们知道物理规律在分离变换: 宇称 (parity), 电荷共轭 (charge conjugation) 和时间反演 (time reversal) 下是不变的。如牛顿第二定理 (方程) 与麦克斯韦方程均是如此。

$$\begin{aligned}
 C: & e \rightarrow -e \\
 P: & \vec{x} \rightarrow -\vec{x} \\
 T: & t \rightarrow -t
 \end{aligned} \tag{3.261}$$

如在宇称变换下

$$\mathcal{P}j^\mu\mathcal{P}^{-1} = j_\mu \quad (3.262)$$

(逆变变为协变)，因为 $\vec{j} \rightarrow -\vec{j}$ 。而电荷共轭变换下

$$\mathcal{C}j^\mu\mathcal{C}^{-1} = -j^\mu \quad (3.263)$$

在时间反演变换下

$$\mathcal{T}j^\mu\mathcal{T}^{-1} = j_\mu \quad (3.264)$$

由麦克斯韦方程

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

就可以确定 $A_\mu(x)$ 在 C, P, T 变换下的变换性质

	∂_μ	j^μ	A_μ	
P	∂^μ	j_μ	A^μ	(3.265)
C	∂_μ	$-j^\mu$	$-A_\mu$	
T	$-\partial^\mu$	j_μ	A^μ	

3.4.1 宇称变换

对标量场，不论实的或复的，假设在空间反射变换下

$$\Phi(t, \vec{x}) \rightarrow \Phi'(t, -\vec{x}) = \eta_p \Phi(t, \vec{x}) \quad (3.266)$$

拉格朗日密度在宇称变换下不变，即

$$\Phi'(t, -\vec{x})\Phi'(t, -\vec{x}) = \Phi(t, -\vec{x})\Phi(t, -\vec{x}) \quad (3.267)$$

导致

$$\eta_p^2 = 1; \eta_p = \pm 1 \quad (3.268)$$

η_p 分别对应正负宇称态。

对狄拉克场，在空间反射变换下拉氏密度的变换为

$$\begin{aligned}
 & \bar{\Psi}'(t, -\vec{x})(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial'_i - m)\Psi'(t, -\vec{x}) \\
 = & \bar{\Psi}'(t, -\vec{x})(i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^i\partial_i - m)\Psi'(t, -\vec{x}) \\
 = & \bar{\Psi}(t, \vec{x})\gamma^0 P^{-1}\gamma^0(i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^i\partial_i - m)P\Psi(t, \vec{x}) \\
 = & \bar{\Psi}(t, \vec{x})(i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^0 P^{-1}\gamma^0\gamma^i P\partial_i - m\gamma^0 P^{-1}\gamma^0 P)\Psi(t, \vec{x}) \\
 = & \bar{\Psi}(t, \vec{x})(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(t, \vec{x}) .
 \end{aligned}$$

倒数第二个等式要求有 $P^{-1}\gamma^0 P = \gamma^0$; $P^{-1}\gamma^i P = -\gamma^i$ 。显然，这样的 P 变换矩阵，在准确到一个时空无关的相因子可取

$$P = \gamma^0 . \quad (3.269)$$

3.4.2 电荷共轭变换

对克莱因-戈登场，电荷共轭变换定义为

$$\begin{aligned}
 \Phi(t, \vec{x}) & \rightarrow \Phi^c(t, \vec{x}) = \eta_c \Phi^*(t, \vec{x}) \\
 \Phi^*(t, \vec{x}) & \rightarrow \Phi^{*c}(t, \vec{x}) = \eta_c^* \Phi(t, \vec{x})
 \end{aligned} \quad (3.270)$$

拉格朗日密度不变要求

$$\eta_c^* \eta_c = 1 . \quad (3.271)$$

当取 $\eta_c = 1$ 时

$$\Phi^c(t, \vec{x}) = \Phi^*(t, \vec{x}) . \quad (3.272)$$

对狄拉克场，在考虑了带电粒子与电磁场的相互作用时，运动方程为

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\Psi = 0 . \quad (3.273)$$

令 Ψ_c 为与 Ψ 带相反电荷的旋量场，则

$$(i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m)\Psi_c = 0 . \quad (3.274)$$

下面讨论 Ψ 和 Ψ_c 之间的关系。将 (3.273) 取厄米共轭

$$\begin{aligned} & -i\Psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu - e\Psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}A_\mu - \Psi^\dagger m = 0 \\ \implies & \bar{\Psi}(i\partial + eA + m) = 0. \end{aligned} \quad (3.275)$$

由 Dirac 代数, 可以证明对任一 γ^μ 存在 C 矩阵满足

$$C\tilde{\gamma}_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu. \quad (3.276)$$

其中, \tilde{M} 表示矩阵 M 的转置。假定

$$\Psi_c = C\tilde{\Psi} \quad (3.277)$$

(3.274) 变为

$$\begin{aligned} & (i\partial + eA - m)C\tilde{\Psi} = 0 \\ \implies & \bar{\Psi}\tilde{C}(i\tilde{\gamma}^\mu\partial_\mu + e\tilde{\gamma}^\mu A_\mu - m) = 0. \end{aligned} \quad (3.278)$$

将上式右乘 C^{-1} , 如果

$$\tilde{C} = -C, \text{ 即 } \tilde{C}C^{-1} = -1 \quad (3.279)$$

这样

$$\bar{\Psi}(i\partial + eA + m) = 0$$

与 (3.275) 相同。这样说明 (3.274) 中的 Ψ_c 确是能找到的, 它是相对于 $\Psi(x)$ 的反粒子波函数

由 $\Psi \rightarrow \Psi_c$ 的逆变换

$$\Psi_c \rightarrow \Psi = C\tilde{\Psi}_c \quad (3.280)$$

及 (3.277) 还可以证明 C 矩阵满足

$$C^\dagger = C^{-1}. \quad (3.281)$$

在 Dirac 表象, 满足 (3.276) 和 (3.279) 和 (3.281) 的 C 变换矩阵可以找到, 为

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.282)$$

流密度 j^μ 在电荷共轭变换下

$$\begin{aligned} j_c^\mu &= \bar{\Psi}_c \gamma^\mu \Psi_c = -\tilde{\Psi} C^{-1} \gamma^\mu C \tilde{\Psi} = +\tilde{\Psi} \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\Psi} \\ &= -(\widetilde{\Psi \gamma^\mu \Psi}) = -\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \end{aligned}$$

变符号, 但流与场的相互作用 $j_\mu A^\mu$ 在电荷共轭下不变号。

3.4.3 时间反演

由于正则对易关系是等时对易关系, 而这种对易关系在时间反演时不能保持不变, 如对狄拉克场

$$\{\Psi_\alpha(t, \vec{x}), \Pi_\beta(t, \vec{x}')\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'),$$

而

$$\Pi_\beta(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}(t, \vec{x})}{\partial \dot{\Psi}_\beta}.$$

因为 \mathcal{L} 在时间反演下不变

$$\left\{ \Psi_\alpha(-t, \vec{x}), \frac{\partial \mathcal{L}(-t, \vec{x})}{\partial \left(\frac{\partial \Psi_\beta(-t, \vec{x})}{\partial t} \right)} \right\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.283)$$

$$\implies \left\{ \Psi_\alpha(-t, \vec{x}), \frac{\partial \mathcal{L}(-t, \vec{x})}{\partial \left(\frac{\partial \Psi_\beta(-t, \vec{x})}{\partial (-t)} \right)} \right\} = -i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (3.284)$$

因而对易关系不是时间反演不变的。为避免这个困难, 可以认为时间反演变换

$$\mathcal{T}\Psi(t, \vec{x})\mathcal{T}^{-1} = e^{i\Phi}\Psi'(-t, \vec{x}) = T\Psi(t, \vec{x})$$

还包含一个复共轭算符, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_I\mathcal{H}$ 。其中 $\mathcal{T}_I^+ = \mathcal{T}_I^{-1}$; $\mathcal{H}C\mathcal{H}^{-1} = C^*$ 。这时为保证正则对易关系仍然成立, \mathcal{T} 就需要是反么正算符。例如, 对狄拉克场拉氏密度的时间反演

为

$$\begin{aligned}
& \bar{\Psi}'(-t, \vec{x})(-i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)^*\Psi'(-t, \vec{x}) \\
= & \bar{\Psi}(t, \vec{x})\gamma^0T^\dagger\gamma^0(-i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)^*T\Psi(t, \vec{x}) \\
= & \bar{\Psi}(t, \vec{x})\gamma^0T^\dagger\gamma^0(i\tilde{\gamma}^0\partial_0 + i\tilde{\gamma}^i\partial_i - m)T\Psi(t, \vec{x}) .
\end{aligned} \tag{3.285}$$

如果有

$$\begin{aligned}
\gamma^0T^\dagger\gamma^0 &= T^{-1} , \\
T^{-1}\tilde{\gamma}^\mu T &= \gamma^\mu ,
\end{aligned} \tag{3.286}$$

则时间反演后的拉氏密度可以保持不变。在 Dirac 表象中，满足 (3.286) 的时间反演变换 T 矩阵在准确至一个时空无关的相因子时为

$$T = i\gamma^1\gamma^3 . \tag{3.287}$$

3.4.4 CPT 定理

尽管在自然界中电荷共轭，宇称和时间反演对称变换，单一的来讲并不严格守恒，但从公理化量子场论可以一般地证明：对任意的洛伦兹变换不变的定域场，只要按照整数自旋粒子满足对易关系，半整数自旋粒子满足反对易关系量子化，它就是 CPT 联合变换下严格不变的，这称为 CPT 定理。

前面介绍的场为自由场，实际物理场大多数情况下是相互作用的场。当考虑场的相互作用时，我们需要在拉氏量中引入一个相互作用拉氏密度项 \mathcal{L}_I ，它应当也是场量及其微商的函数。

对于四种基本相互作用，标准模型给出了满足目前试验已知的各种对称性的电磁、强、弱相互作用拉氏密度。对于引力相互作用，由于其量子化还没有完成，量子引力还没有一个成熟的理论。

本章将主要通过粒子场的电磁相互作用来讨论场相互作用的基本性质，即量子电动力学（Quantum Electrodynamics），简称 QED。其他更复杂的相互作用，其理论基础和形式与 QED 有许多类似之处。通过了解 QED 可为进一步学习标准模型和其他相互作用的理论打下一定的基础。

4.1 粒子场的电磁相互作用

狄拉克场与电磁场相互作用的拉氏密度为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QED}} &= \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_I \\ &= \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu\end{aligned}\quad (4.1)$$

其中

$$\mathcal{L}_I = -eJ^\mu A_\mu \quad (4.2)$$

为相互作用拉氏密度，称为旋量场的“最小”（minimal）相互作用。

已知旋量场在整体的 $U(1)$ 规范变换

$$\begin{cases} \Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{-i\alpha}\Psi(x) \\ \bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)e^{i\alpha} \end{cases}$$

下是不变的, 其中 α 与坐标无关。但如果 α 是坐标相关的, 则 \mathcal{L}_D 的 $U(1)$ 规范不变性将不再成立。又, 已知无质量的光子场具有定域规范不变性, 如

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x),$$

即拉氏密度 \mathcal{L}_E 在如上规范变换下保持不变。

将 (4.1) 重新表达为

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \quad (4.3)$$

形式, 其中 D_μ 称为协变导数 (covariant-derivative)

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x). \quad (4.4)$$

可以验证, (4.3) 在如下的规范变换

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\rightarrow \Psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\Psi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \quad (4.5)$$

下也保持不变, 即 $\Psi(x)$ 场在定域的 $U(1)$ 规范变换下也保持不变。由拉格朗日运动方程, 可得最小相互作用时的 Dirac 方程

$$(i\not{D} - m)\Psi(x) = 0. \quad (4.6)$$

其中, 电磁场强 $A_\mu(x)$ 满足的运动方程为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi = ej^\nu.$$

对标量场, 在将

$$\mathcal{L}_S = \partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi$$

中的导数变为如 (4.4) 的协变导数后, 拉氏量成为

$$\mathcal{L}_S = D_\mu^\dagger\Phi^\dagger D^\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi. \quad (4.7)$$

同样可以证明如上拉式密度在联合定域规范变换

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \\ \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\Phi(x), \\ \phi^\dagger(x) &\rightarrow \Phi'^\dagger(x) = e^{-i\alpha(x)}\Phi^\dagger(x) \end{aligned} \quad (4.8)$$

下保持不变。

4.2 时间演化算符与微扰展开 (pertubative expansion)

由前面的讨论知道，在自由场理论中两点关联函数或称两点格林函数就是自由场的费曼传播子，如对标量场

$$\langle 0|T\Phi(x)\Phi(y)|0\rangle_{\text{free}} = i\Delta_{\text{F}}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

对有相互作用的场，情况将变得比较复杂。以有自相互作用的 Φ^4 理论 (“Phi-fourth” theory) 为例，其拉氏密度为

$$\mathcal{L}_{\Phi^4} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\Phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 \quad (4.9)$$

其中 λ 是一无量纲的耦合常数。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Phi^4} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中 \mathcal{L}_0 即是自由标量场，克莱因-戈登场的拉氏密度； \mathcal{L}_1 为自相互作用拉氏密度。相应地 \mathcal{H}_0 为 KG 场的哈密顿量密度，而 \mathcal{H}_1 为相互作用的哈密顿量密度。相互作用的哈密顿为

$$H_1 = \int d^3x \mathcal{H}_1 = - \int d^3x \mathcal{L}_1 = \int \frac{\lambda}{4!} \Phi^4 d^3x. \quad (4.11)$$

在量子力学中，在薛定谔绘景中波函数是随时间变化的，而算符是时间的常数。在海森堡绘景中，波函数是不随时间变化的，而算符随时间演化

$$\hat{O}(t, \vec{x}) = e^{iHt} \hat{O}(x) e^{-iHt}. \quad (4.12)$$

在有相互作用的量子场论中，可定义相互作用（狄拉克）绘景（Interaction Picture）。假设存在一个由海森堡绘景到狄拉克绘景的变换 U ，即

$$| \rangle_{\text{I}} = U | \rangle_{\text{H}} ; \langle |_{\text{I}} = \langle |_{\text{H}} \langle U^\dagger . \quad (4.13)$$

态的正交归一性表明 U 是么正的，即

$$U^\dagger = U^{-1} . \quad (4.14)$$

两绘景中的算符关系为

$$\begin{aligned} \langle |_{\text{H}} \langle O_{\text{H}} | \rangle_{\text{H}} &= \langle |_{\text{I}} \langle U O_{\text{H}} U^{-1} | \rangle_{\text{I}} = \langle |_{\text{I}} \langle O_{\text{I}} | \rangle_{\text{I}} \\ \Rightarrow O_{\text{I}} &= U O_{\text{H}} U^{-1} , \end{aligned} \quad (4.15)$$

这样变换后波动方程为

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} | t \rangle_{\text{I}} &= i \frac{\partial}{\partial t} U | \rangle_{\text{H}} = i \dot{U}(t) | \rangle_{\text{H}} + i U(t) \frac{\partial}{\partial t} | \rangle_{\text{H}} \\ &= i \dot{U}(t) U^{-1} | t \rangle_{\text{I}} . \end{aligned} \quad (4.16)$$

假设相互作用表象中的哈密顿量可以分为自由的和相互作用的两部分

$$H_{\text{I}} = H_{\text{I0}} + H_{\text{I1}} , \quad (4.17)$$

并且波动方程满足

$$i \frac{\partial}{\partial t} | t \rangle_{\text{I}} = H_{\text{I1}} | t \rangle_{\text{I}} , \quad (4.18)$$

由（4.16）和（4.18）即

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t) = H_{\text{I1}} U(t) . \quad (4.19)$$

则可以证明

$$\dot{O}_{\text{I}} = i [H_{\text{I0}}, O_{\text{I}}] , \quad (4.20)$$

即在相互作用绘景中，波函数的演化由相互作用哈密顿量决定，而算符的演化由自由哈密顿量部分决定。

设在相互作用绘景中态的演化可以表示为

$$| t \rangle_{\text{I}} = U(t, t_0) | t_0 \rangle_{\text{I}} \quad (4.21)$$

显然 U 矩阵具有如下性质

$$\begin{aligned} U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) &= U(t_1, t_3), \\ U^{-1}(t_1, t_2) &= U(t_2, t_1), \\ U(t, t) &= 1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

又由 (4.18)

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle_{\text{I}} &= H_{\text{II}}|t\rangle_{\text{I}}; \quad -i\frac{\partial}{\partial t}{}_{\text{I}}\langle t| = {}_{\text{I}}\langle t|H_{\text{II}}; \\ i\frac{\partial}{\partial t}{}_{\text{I}}\langle t|t\rangle_{\text{I}} &= -{}_{\text{I}}\langle t|H_{\text{II}}|t\rangle_{\text{I}} + {}_{\text{I}}\langle t|H_{\text{II}}|t\rangle_{\text{I}} = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

这样可以证明 $U(t_1, t_2)$ 是幺正的

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_{\text{I}}\langle t|t\rangle_{\text{I}} = {}_{\text{H}}\langle t|\frac{\partial}{\partial t}(U^\dagger U)|t\rangle_{\text{H}} = 0, \quad (4.24)$$

\implies

$$U^\dagger(t_1, t_2) = U^{-1}(t_1, t_2). \quad (4.25)$$

在量子场论中，物理过程的初态是 $t = -\infty$ 时的态，而末态为 $t = +\infty$ 时的态

$$|\infty\rangle = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} U(t, t_0)|-\infty\rangle, \quad (4.26)$$

即

$$|\infty\rangle = S|-\infty\rangle.$$

S 称为散射矩阵，显然 S 也是幺正的。 $|\infty\rangle$ 和 $|-\infty\rangle$ 表示粒子间没有相互作用，或相互作用很小时的态。在实际测量或计算中，只要所考虑的时间远大于相互作用时间，即可认为粒子处于自由的初末态 $|-\infty\rangle$ 或 $|\infty\rangle$

由 (4.18) 和 (4.21) 可知

$$i\dot{U}(t, t_0) = H_{\text{II}}U(t, t_0) \quad (4.27)$$

\implies

$$U(t, t_0) = I - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{\text{I}}(t_1)U(t_1, t_0) \quad (4.28)$$

当相互作用 H_{II} 很小时 (4.28) 式可以迭代展开

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0), \quad U^0(t, t_0) = I. \quad (4.29)$$

其中,

$$U^{(n)}(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{\text{II}}(t_1) H_{\text{II}}(t_2) \cdots H_{\text{II}}(t_n), \quad (4.30)$$

式中 $n \geq 1$ 。考虑到

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\text{II}}(t_1) H_{\text{II}}(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T[H_{\text{II}}(t_1) H_{\text{II}}(t_2)]$$

和

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{\text{II}}(t_1) \cdots H_{\text{II}}(t_n) \\ &= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots dt_n T[H_{\text{II}}(t_1) \cdots H_{\text{II}}(t_n)] \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= I + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_{\text{II}}(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 T[H_{\text{II}}(t_1) H_{\text{II}}(t_2)] + \cdots \\ &= T \exp[-i \int_{t_0}^t dt' H_{\text{II}}(t')]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

由方程 (4.19) 和 (4.27)

$$U^{-1}(t) = U(t, -\infty) = T \exp[-i \int_{-\infty}^t dt_1 d^3x_1 \mathcal{H}_{\text{II}}(t_1, \vec{x}_1)]. \quad (4.32)$$

为将有相互作用的两点格林函数重新表达为自由态波函数的形式, 先假定

$x_{10} > x_{20}$:

$$\begin{aligned}
 & \langle 0|T\Psi(x_1)\Psi(x_2)|0\rangle = \langle 0|\Psi(x_1)\Psi(x_2)|0\rangle \\
 & = \langle 0|U(t_1)\Psi_{\text{in}}(x_1)U^{-1}(t_1)U(t_2)\Psi_{\text{in}}(x_2)U^{-1}(t_2)|0\rangle \\
 & = \langle 0|U(-\infty, t_1)\Psi_{\text{in}}(x_1)U(t_1, -\infty)U(-\infty, t_2)\Psi_{\text{in}}(x_2)U(t_2, -\infty)|0\rangle \\
 & = \langle 0|U(-\infty, t)U(t, t_1)\Psi_{\text{in}}(x_1)U(t_1, t_2)\Psi_{\text{in}}(x_2)U(t_2, -t)U(-t, -\infty)|0\rangle \\
 & \quad \because (t \gg t_1; -t \ll t_2) \\
 & = \langle 0|U(t)U(t, t_1)\Psi_{\text{in}}(x_1)U(t_1, t_2)\Psi_{\text{in}}(x_2)U(t_2, -t)U^{-1}(-t)|0\rangle \\
 & = \langle 0|U(t)\Psi_{\text{in}}(x_1)\Psi_{\text{in}}(x_2)U(t, -t)U^{-1}(-t)|0\rangle \\
 & \quad \text{由于 } t_2 > t_1 \text{ 只是波函数调换并不影响其他部分, } \Psi_{\text{in}} \text{ 是 } \infty \text{ 时间的态} \\
 & \quad U(t, t_1), U(t, t_2) \text{ 不对其造成影响, 所以} \\
 & = \langle 0|U(t)T[\Psi_{\text{in}}(x_1)\Psi_{\text{in}}(x_2)]U(t, -t)U^{-1}(-t)|0\rangle \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

其中 Ψ_{in} 为无相互作用的“in”自由态。

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 由于 $U(-\infty, -\infty) = 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U^{-1}(-t)|0\rangle = |0\rangle. \tag{4.34}$$

但真空从时间 $-\infty \rightarrow +\infty$ 可能会有相位差, 设

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U(-\infty, t) = \lambda \langle 0| \tag{4.35}$$

上式右乘 $|0\rangle$ 得

$$\begin{aligned}
 \lambda & = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0|U(-\infty, \infty)|0\rangle \\
 & = \langle 0|U(\infty, -\infty)|0\rangle^{-1} \\
 & = \langle 0|T \exp[-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{II}}(\Psi_{\text{in}})]|0\rangle^{-1}. \tag{4.36}
 \end{aligned}$$

这样由 (4.33) 和 (4.36)

$$G(x_1, x_2) = \frac{\langle 0|T(\Psi_{\text{in}}(x_1)\Psi_{\text{in}}(x_2)) \exp\{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{II}}(\Psi_{\text{in}})\}|0\rangle}{\langle 0|T \exp\{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{II}}(\Psi_{\text{in}})\}|0\rangle}. \tag{4.37}$$

还可以一般地证明

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\langle 0|T(\Psi_{\text{in}}(x_1)\Psi_{\text{in}}(x_2) \cdots \Psi_{\text{in}}(x_n)) \exp\{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{II}}(\Psi_{\text{in}})\}|0\rangle}{\langle 0|T \exp\{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{II}}(\Psi_{\text{in}})\}|0\rangle}. \tag{4.38}$$

4.3 威克定理 (Wick's Theorem)

自由场波函数可以分为正频和负频两个部分, 如 (3.29)

$$\Phi(x) = \Phi^{(+)}(x) + \Phi^{(-)}(x)$$

两个自由场的正规乘积可以表达为如下形式

$$\begin{aligned} : \Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2) : &= \Phi_A^{(-)}\Phi_B^{(-)} + \Phi_A^{(-)}\Phi_B^{(+)} + \Phi_A^{(+)}\Phi_B^{(+)} + \epsilon_{AB}\Phi_B^{(-)}\Phi_A^{(+)} \\ &= \epsilon_{AB} : \Phi_B\Phi_A : . \end{aligned} \quad (4.39)$$

其中当 Φ 为玻色场时 $\epsilon_{AB} = +1$; Φ 为费米场是 $\epsilon_{AB} = -1$ 。另一方面, 两自由场的时序乘积为

$$\begin{aligned} T(\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)) &\stackrel{x_1^0 > x_2^0}{=} \Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2) \\ &= \Phi_A^{(+)}(x_1)\Phi_B^{(+)}(x_2) + \Phi_A^{(-)}(x_1)\Phi_B^{(-)}(x_2) + \Phi_A^{(-)}(x_1)\Phi_B^{(+)}(x_2) + \Phi_A^{(+)}(x_1)\Phi_B^{(-)}(x_2) \\ &= \Phi_A^{(+)}(x_1)\Phi_B^{(+)}(x_2) + \Phi_A^{(-)}(x_1)\Phi_B^{(-)}(x_2) + \Phi_A^{(-)}(x_1)\Phi_B^{(+)}(x_2) \\ &\quad + \epsilon_{AB}\Phi_B^{(-)}(x_2)\Phi_A^{(+)}(x_1) + [\Phi_A^{(+)}(x_1), \Phi_B^{(-)}(x_2)]_{\mp} . \end{aligned} \quad (4.40)$$

$[\Phi_A^{(+)}(x_1), \Phi_B^{(-)}(x_2)]_{\mp}$ 分别代表玻色场的对易子和费米场的反对易子。

由于已知

$$\begin{aligned} \Phi^{(+)}|0\rangle &= \langle 0|\Phi^{(-)} = 0 , \\ [\Phi_A^{(+)}(x_1), \Phi_B^{(-)}(x_2)]_{\mp} &= \langle 0|[\Phi_A^{(+)}(x_1), \Phi_B^{(-)}(x_2)]_{\mp}|0\rangle \\ &= \langle 0|\Phi_A^{(+)}(x_1)\Phi_B^{(-)}(x_2)|0\rangle = \langle 0|\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)|0\rangle \\ &\stackrel{x_1^0 > x_2^0}{=} \langle 0|T[\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)]|0\rangle . \end{aligned} \quad (4.41)$$

这样, 由 (4.40) 和 (4.41)

$$T(\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)) = : \Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2) : + \langle 0|T(\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2))|0\rangle . \quad (4.42)$$

上式中如 $\Phi(x_1)$ 和 $\Phi(x_2)$ 交换位置不会变化, 因为每一项都会有相同的改变。所以 (4.42) 对 $x_2^0 > x_1^0$ 同样成立。显示就有

$$\begin{aligned} T(\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)) &\stackrel{x_2^0 > x_1^0}{=} \epsilon_{AB}\Phi_B(x_1)\Phi_A(x_2) \\ &= \epsilon_{AB} : \Phi_B(x_2)\Phi_A(x_1) : + \epsilon_{AB}\langle 0|\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)|0\rangle \\ &= : \Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2) : + \langle 0|T[\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)]|0\rangle . \end{aligned} \quad (4.43)$$

定义两个场的收缩为

$$\begin{aligned} \underbrace{\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)} &\equiv \langle 0|T(\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2))|0\rangle \\ &= \begin{cases} [\Phi_A^{(+)}(x_1), \Phi_B^{(-)}(x_2)], & x_1^0 > x_2^0 \\ [\Phi_B^{(+)}(x_2), \Phi_A^{(-)}(x_1)], & x_2^0 > x_1^0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.44)$$

即为自由场的两点格林函数，或费曼传播子。这样 (4.42) 可表达为

$$T(\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)) =: \Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2) : + : \underbrace{\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)} : . \quad (4.45)$$

其中，第二项中有无正规乘积标号没有关系，因为两场的收缩是一个 c 数。

一般正规乘积中有多个场存在时收缩表示为

$$: \Phi_A \Phi_B \underbrace{\Phi_C \Phi_D \Phi_E \cdots \Phi_K \Phi_L}_{\text{收缩}} \Phi_M \cdots := \epsilon_p : \Phi_A \Phi_B \Phi_F \cdots \Phi_K \Phi_M \cdots : \underbrace{\Phi_C \Phi_E}_{\text{收缩}} \underbrace{\Phi_D \Phi_L}_{\text{收缩}} . \quad (4.46)$$

其中 $\epsilon_p = \pm 1$ 取决于费米场交换次数。

对于三个场算符乘积的情况，设 $x_1^0, x_2^0 > x_3^0$ 则

$$\begin{aligned} T(\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)\Phi_C(x_3)) &= T(\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2))\Phi_C(x_3) \\ &= : \Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2) : \Phi_C(x_3) + \underbrace{\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)}\Phi_C(x_3) \end{aligned} \quad (4.47)$$

其中

$$\begin{aligned} &: \Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2) : \Phi_C(x_3) \\ &= (\Phi_A^{(-)}\Phi_B^{(-)} + \Phi_A^{(-)}\Phi_B^{(+)} + \Phi_A^{(+)}\Phi_B^{(+)} + \epsilon_{AB}\Phi_B^{(-)}\Phi_A^{(+)})(\Phi_C^{(-)} + \Phi_C^{(+)}) \\ &= \underbrace{(\Phi_A^{(-)}\Phi_B^{(-)} + \Phi_A^{(-)}\Phi_B^{(+)} + \Phi_A^{(+)}\Phi_B^{(+)} + \epsilon_{AB}\Phi_B^{(-)}\Phi_A^{(+)})}_{\text{I}}\Phi_C^{(+)} \\ &\quad + \Phi_A^{(-)}\Phi_B^{(-)}\Phi_C^{(-)} + \Phi_A^{(-)}\Phi_B^{(+)}\Phi_C^{(-)} + \Phi_A^{(+)}\Phi_B^{(+)}\Phi_C^{(-)} + \epsilon_{AB}\Phi_B^{(-)}\Phi_A^{(+)}\Phi_C^{(-)} \\ &= \text{I} + \Phi_A^{(-)}\Phi_B^{(-)}\Phi_C^{(-)} + \epsilon_{BC}\Phi_A^{(-)}\Phi_C^{(-)}\Phi_B^{(+)} + \underbrace{\Phi_A^{(-)}[\Phi_B^{(+)}\Phi_C^{(-)}]_{\mp}} \\ &\quad + \epsilon_{BC}\epsilon_{AC}\Phi_C^{(-)}\Phi_A^{(+)}\Phi_B^{(+)} + \epsilon_{BC}[\Phi_A^{(+)}\Phi_C^{(-)}]_{\mp}\Phi_B^{(+)} + \underbrace{\Phi_A^{(+)}[\Phi_B^{(+)}\Phi_C^{(-)}]_{\mp}} \\ &\quad + \epsilon_{AB}\epsilon_{AC}\Phi_B^{(-)}\Phi_C^{(-)}\Phi_A^{(+)} + \epsilon_{AB}\Phi_B^{(-)}[\Phi_A^{(+)}\Phi_C^{(-)}]_{\mp} \\ &= : \Phi_A\Phi_B\Phi_C : + \Phi_A[\Phi_B^{(+)}\Phi_C^{(-)}]_{\mp} + \epsilon_{AB}\Phi_B[\Phi_A^{(+)}\Phi_C^{(-)}]_{\mp} \\ &= : \Phi_A\Phi_B\Phi_C : + \Phi_A\langle 0|T(\Phi_B\Phi_C)|0\rangle + \epsilon_{AB}\Phi_B\langle 0|T(\Phi_A\Phi_C)|0\rangle . \end{aligned} \quad (4.48)$$

将 (4.48) 代入 (4.47) 得

$$\begin{aligned}
 T(\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)\Phi_C(x_3)) &\stackrel{x_1^0, x_2^0 > x_3^0}{=} : \Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)\Phi_C(x_3) : \\
 &+ \underbrace{\Phi_A(x_1)\Phi_B(x_2)} + \underbrace{\Phi_A(x_1)\Phi_C(x_3)} \\
 &+ \epsilon_{AB}\underbrace{\Phi_B(x_2)\Phi_A(x_1)}\Phi_C(x_3) .
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

上式对 Φ_A, Φ_B, Φ_C 轮换成立(如设 $x_1^0, x_3^0 > x_2^0$, 上式 $\Phi_B(x_2), \Phi_C(x_3)$ 交换后不变), 因此对一般时间顺序成立。

可以一般地证明有如下威克定理成立

$$T[\Phi_A\Phi_B\cdots\Phi_X\Phi_Y\cdots] = : \Phi_A\Phi_A\cdots\Phi_X\Phi_Y\cdots : + : \text{各种可能的收缩} : .$$

如对有四个标量场的情形

$$\begin{aligned}
 T[\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4] &= : \Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4 : + : \underbrace{\Phi_1\Phi_2}\Phi_3\Phi_4 : + : \underbrace{\Phi_1\Phi_3}\Phi_2\Phi_4 : \\
 &+ : \underbrace{\Phi_1\Phi_4}\Phi_2\Phi_3 : + : \underbrace{\Phi_2\Phi_3}\Phi_1\Phi_4 : + : \underbrace{\Phi_2\Phi_4}\Phi_1\Phi_3 : + : \underbrace{\Phi_3\Phi_4}\Phi_1\Phi_2 : \\
 &+ : \underbrace{\Phi_1\Phi_2}\underbrace{\Phi_3\Phi_4} : + : \underbrace{\Phi_1\Phi_3}\underbrace{\Phi_2\Phi_4} : + : \underbrace{\Phi_1\Phi_4}\underbrace{\Phi_2\Phi_3} : .
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

上式的真空期望值为

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T[\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4]|0\rangle &= -\Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(x_3-x_4) \\
 &\quad -\Delta_F(x_1-x_3)\Delta_F(x_2-x_4) \\
 &\quad -\Delta_F(x_1-x_4)\Delta_F(x_2-x_3) ,
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

其中, $i\Delta_F$ 为标量场的费曼传播子。

4.4 费曼图 (Feynman Diagram) 与费曼规则 (Feynman Rules)

由 Wick 定理知道, 算符的编时乘积等于含有各种可能收缩的正规乘积之和。以量子电动力学为例, 相互作用的哈密顿量为

$$\mathcal{H}_i(x) = e\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)A^\mu(x) . \tag{4.52}$$

这时, 一阶散射矩阵

$$S^{(1)} = -i \int d^4x eT[\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)A^\mu(x)] . \tag{4.53}$$

按照 Wick 定理

$$\begin{aligned}
 T\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)A^\mu(x) &= : \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)A^\mu(x) : + : \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)\underline{A^\mu(x)} : \\
 &\quad + : \underline{\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)}A^\mu(x) : + : \underline{\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)}A^\mu(x) : \quad . \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
 \underline{\Psi A} &= \langle 0|T\Psi A|0\rangle = \langle 0|T(\Psi^+ + \Psi^-)(A^+ + A^-)|0\rangle = 0, \\
 \underline{\bar{\Psi} A} &= 0, \\
 : \underline{\Psi(x)\bar{\Psi}(x)} : &= - : \underline{\bar{\Psi}(x)\Psi(x)} : = \langle 0|T\Psi(x)\bar{\Psi}(x)|0\rangle \\
 &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m} e^{-ip\cdot(x-x)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m}.
 \end{aligned}$$

上面最后一个收缩会在对 d^4x 积分时带来无穷大发散。如同在消除零点能时情形，取

$$\mathcal{H}_i(x) = e : \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)A^\mu(x) :$$

则由

$$T : \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)A^\mu(x) := : \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)A^\mu(x) :$$

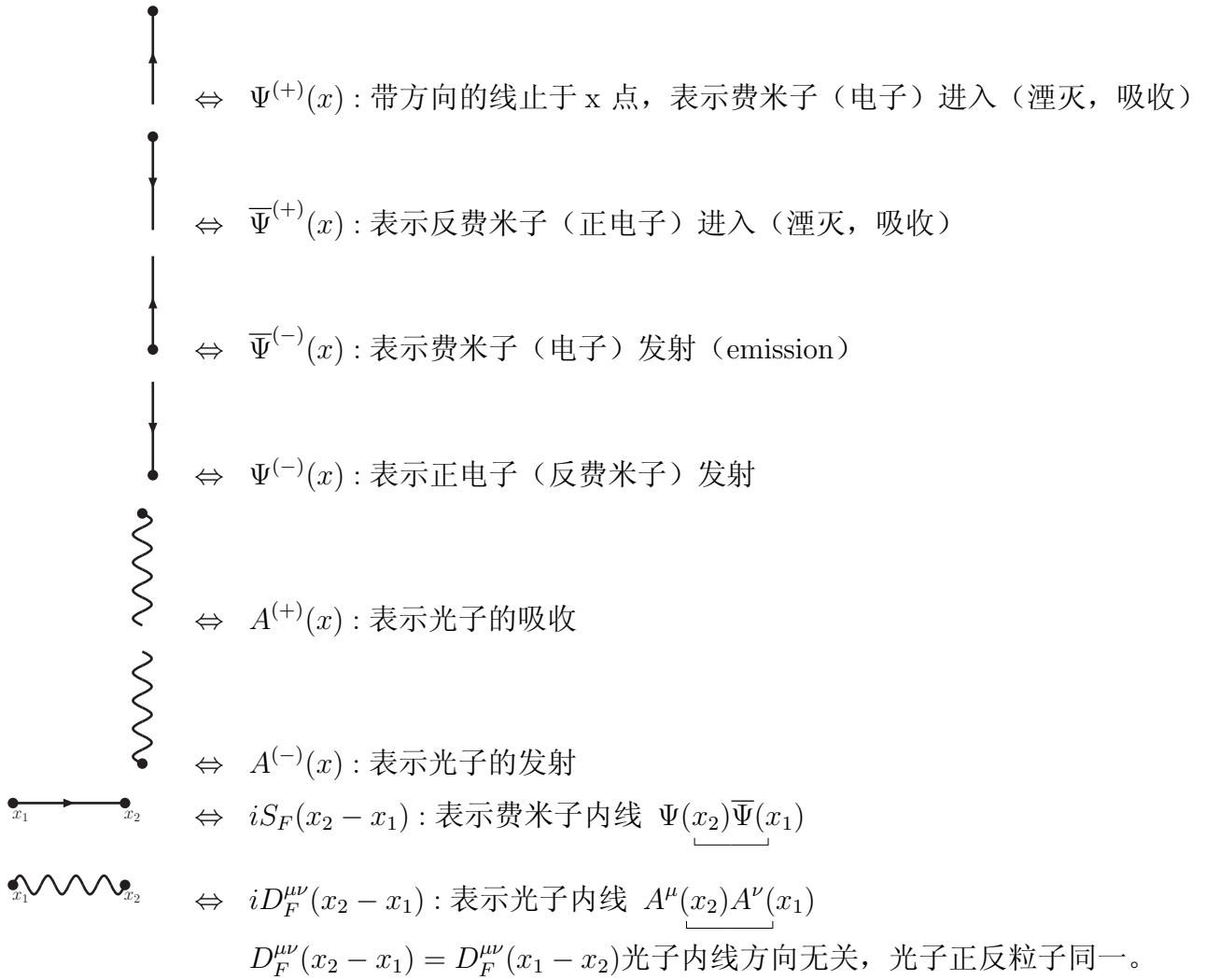
同一时空点的收缩为零（正规乘积的真空期望值为零）。

由于每个场量均可分为正频和负频部分，因此与（4.53）联系的过程有8个，

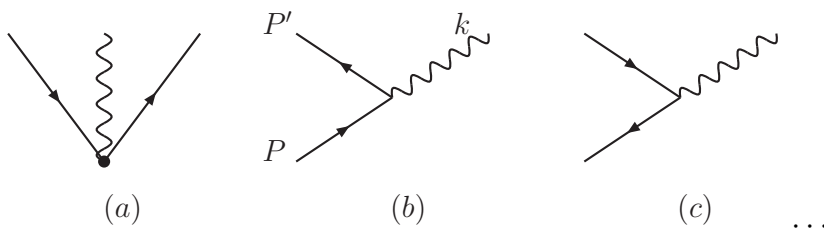
$$S^{(1)} = -ie \int d^4x : (\bar{\Psi}^{(+)} + \bar{\Psi}^{(-)})\gamma_\mu(\Psi^{(+)} + \Psi^{(-)})(A^{\mu(+)} + A^{\mu(-)}) : .$$

其中： $\bar{\Psi}^{(+)}\gamma_\mu\Psi^{(-)}A^{\mu(-)} := -A^{\mu(-)}\widetilde{\bar{\Psi}^{(-)}}\widetilde{\gamma_\mu}\widetilde{\Psi^{(+)}}$ 项对应的初态为 $d^+(p, s)|0\rangle$ ，相互作用

后末态为 $c^+(p, s')a^+(k, \sigma)|0\rangle$ 。这些过程可以用如下图示



按照如上费曼图的画法与 (4.53) 所对应的八个过程就可以表示为



例如其中 (b) 表示电子发出一个光子。事实上, 如上八个过程均非实际物理过程, 因为他们均无法同时满足能动量守恒与质壳条件。

如对过程 (b) , $p = p' + k \Rightarrow m^2 = m^2 + 2p' \cdot k \Rightarrow p' \cdot k = 0$ 不能成立。

虽然 $S^{(1)}$ 不对应实际物理过程, 但从中可以总结出一定的作费曼图的规则。

二阶散射矩阵 $S^{(2)}$ 为

$$S^{(2)} = \frac{1}{2!}(-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 T[: \bar{\Psi}(x_1)\gamma_\mu\Psi(x_1)A^\mu(x_1) : : \bar{\Psi}(x_2)\gamma_\nu\Psi(x_2)A^\nu(x_2) :] \quad (4.55)$$

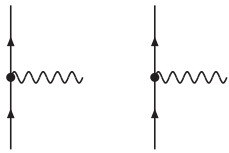
按照同一时空点内收缩为零, 并考虑到

$$\begin{aligned} \langle 0|T\Psi(x_1)\Psi(x_2)|0\rangle &= 0, \\ \langle 0|T\bar{\Psi}(x_1)\bar{\Psi}(x_2)|0\rangle &= 0, \end{aligned}$$

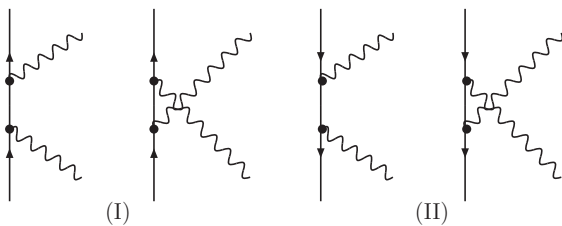
有

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 : \bar{\Psi}_1\gamma_\mu\Psi_1\bar{\Psi}_2\gamma_\nu\Psi_2A_1^\mu A_2^\nu : \\ &+ : \underbrace{\bar{\Psi}_1\gamma_\mu\Psi_1\bar{\Psi}_2\gamma_\nu\Psi_2}_{\text{contract}} A_1^\mu A_2^\nu : + : \bar{\Psi}_1\gamma_\mu\Psi_1\underbrace{\bar{\Psi}_2\gamma_\nu\Psi_2}_{\text{contract}} A_1^\mu A_2^\nu : \\ &+ : \bar{\Psi}_1\gamma_\mu\Psi_1\underbrace{\bar{\Psi}_2\gamma_\nu\Psi_2}_{\text{contract}} A_1^\mu A_2^\nu : + : \bar{\Psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\Psi_1\bar{\Psi}_2\gamma_\nu\Psi_2}_{\text{contract}} A_1^\mu A_2^\nu : \\ &+ : \bar{\Psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\Psi_1\bar{\Psi}_2\gamma_\nu\Psi_2}_{\text{contract}} A_1^\mu A_2^\nu : + : \underbrace{\bar{\Psi}_1\gamma_\mu\Psi_1\bar{\Psi}_2\gamma_\nu\Psi_2}_{\text{contract}} A_1^\mu A_2^\nu : \\ &+ : \underbrace{\bar{\Psi}_1\gamma_\mu\Psi_1\bar{\Psi}_2\gamma_\nu\Psi_2}_{\text{contract}} A_1^\mu A_2^\nu : . \end{aligned} \quad (4.56)$$

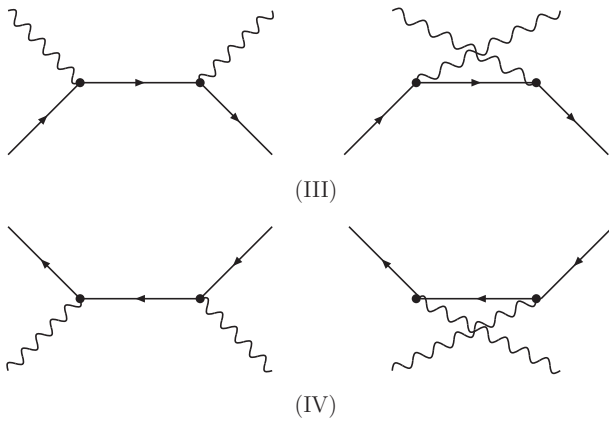
(4.56) 共有125项对应物理过程, 其中第一项给出



与 $S^{(1)}$ 中一样, 无法同时满足能动量与在壳条件, 没有贡献。第二、三项相同, 涉及两个自由光子和两个自由费米子。

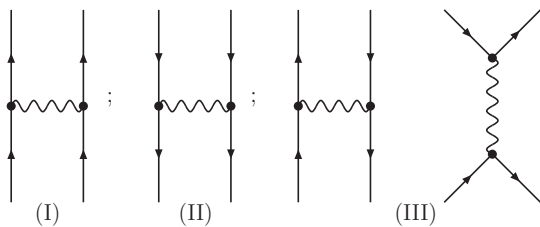


量子场论导引



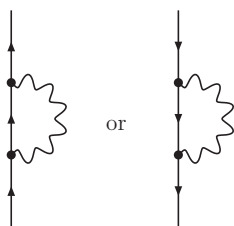
其中 (I) 为电子的康普顿散射 (Compton Scattering)，(II) 为正电子的康普顿散射，(III) 为正负电子湮灭为双光子，(IV) 双光子的正负电子对产生过程。

(4.56) 项中第四项涉及三个过程

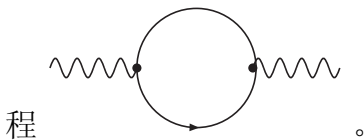


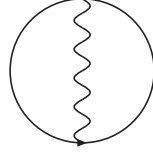
分别为电子-电子散射；正电子-正电子散射和正负电子散射。

(4.56) 中第五六项对应两费米子外线的过程



不涉及粒子间的相互作用，称为费米子 (电子，正电子) 自能图。(4.56) 中第七项称为真空极化 (Vacuum Polarization) 过程，是正负电子对产生和湮灭过程。





(4.56) 第八项称为真空涨落项，

。可以证明对实际物理过程不带来影响，一般不予考虑。

QED 的费曼规则可以从 $S^{(1)}$ 和 $S^{(2)}$ 的过程中总结出来，如电子对湮灭为光子：

$$e^-(p, s) + e^+(q, r) \rightarrow \gamma(k, \sigma)$$

此过程初态为

$$|i\rangle = c^+(p, s)d^+(q, r)|0\rangle$$

末态为

$$|f\rangle = a^+(k, \sigma)|0\rangle$$

相互作用的哈密顿量为

$$\mathcal{H}_i(x) = e\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)A^\mu(x).$$

S矩阵元

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= \langle f|S|i\rangle = -ie \int d^4x \langle 0|a(k, \sigma) : \bar{\Psi}(x)^{(+)}\gamma_\mu\Psi^{(+)}(x)A^{\mu(-)}(x) : c^+(p, s)d^+(q, r)|0\rangle \\ &= -ie \int d^4x [a(k, \sigma), A^{\mu(-)}(x)] \{\bar{\Psi}^{(+)}(x), d^+(q, r)\} \gamma_\mu \{\Psi^{(+)}(x), c^+(p, s)\}. \end{aligned}$$

将场的平面波解代入上式，并利用算符的对易（反对易）关系有

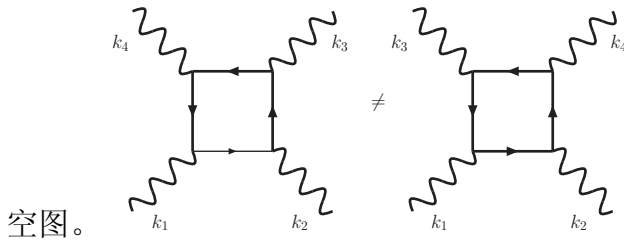
$$\begin{aligned} [a(k, \lambda), A^{\mu(-)}(x)] &= [a(k, \lambda), \int d^3k' \frac{\sum_\sigma \epsilon^\mu(k, \sigma)}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} a^+(k', \sigma)] \\ &= \frac{\epsilon^\mu(k, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} e^{ikx}, \\ \{\bar{\Psi}^{(+)}(x), d^+(q, r)\} &= \left\{ \int d^3p \sqrt{\frac{m}{\omega_p(2\pi)^3}} \sum_s d(p, s) \bar{v}(p, s) e^{-ip \cdot x}, d^+(q, r) \right\} \\ &= \sqrt{\frac{m}{\omega_q(2\pi)^3}} \bar{v}(q, r) e^{-iqx}, \\ \{\Psi^{(+)}(x), c^+(p, s)\} &= \sqrt{\frac{m}{\omega_p(2\pi)^3}} u(p, s) e^{-ipx}. \end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(1)} &= -ie \int d^4x \frac{\epsilon^\mu(k, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} e^{ikx} \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_q}} \bar{v}(q, r) e^{-iqx} \gamma_\mu \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^2\omega_p}} e^{-ipx} \\
 &= \frac{\epsilon^\mu(k, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_q}} \bar{v}(q, r) (-ie\gamma_\mu(2\pi)^4 \delta^4(k - q - p)) \\
 &\quad \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}} u(p, s). \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

从中可以总结出 QED 的费曼规则如下：

1. 画出所有可能的拓扑（Topologically）不等价的图，包括圈图。但忽略真空-真



2. 费米子内线。 $\frac{i}{\not{p}-m}$ $iS_F(P)$

3. 光子内线。 $\frac{-ig^{\mu\nu}}{K^2}$ $iD_F^{\mu\nu}(K)$

4. 费米子外线:

- a) 电子出射 $\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}} \bar{u}(p, s)$


- b) 电子入射 $\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}} u(p, s)$

- c) 正电子出射 $\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}} v(p, s)$

- d) 正电子入射 $\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}} \bar{v}(p, s)$

5. 费米子光子耦合顶角 $-ie\gamma_\mu(2\pi)^4\delta^4()$



6. 光子外线 $\epsilon^\mu(K, \lambda) \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \omega_K}}$ 
7. 对所有内线动量积分 $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$
8. 每个费米子圈图出 (-) 因子，并求迹 Tr
9. 按费曼图根据费曼规则写出 S 矩阵元时，逆着费米子线进行。

练习：

试按照费曼规则写出康普顿散射 ($e\gamma \rightarrow e\gamma$) 的 $S^{(2)}$ 矩阵元，并画出相应的费曼图。

散 射 截 面 与 衰 变 宽 度 (Scattering Cross Section & Decay Width)

5.1 散射截面与宽度的基本公式

两粒子进行相互作用—散射 (Scattering)，其截面可以看做是靶粒子的相互作用有效面积。

截面的单位是靶 (barn)， $1\text{b} = 10^{-24}\text{cm}^2$ 。核子的尺度大约为 $1\text{fermi} = 10^{-13}\text{cm}$ ，这样核子的横截面大约就是 $\sim 10^{-26}\text{cm}^2 \sim 0.01\text{barns}$ 。假设靶含有 N_T 个粒子，每个粒子的有效截面是 σ ，则 N_T 个粒子的总截面为 $N_T\sigma$ 。设入射粒子投射的区域面积为 A ，则入射流击中靶粒子的几率为 $\frac{N_T\sigma}{A}$ 。如果入射流中含有 N_B 个粒子，则入射粒子束中粒子与靶粒子间发生相互作用的几率为

$$\text{events} = N_B \frac{N_T\sigma}{A} \quad (5.1)$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\text{events}}{N_B N_T} A. \quad (5.2)$$

假定粒子束以速度 v 运动，则在 t 秒内入射到靶的粒子数就是 ρvt ， ρ 为粒子数密度。这样 (5.2) 就写为

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\text{number of events}/t}{N_T(\rho vt)A/t} A \\ &= \frac{\text{number of events}/t}{\rho v N_T} \\ &= \frac{\text{跃迁几率}}{\text{通量}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

其中粒子束通量为 ρv ，跃迁几率为单位时间内每个靶粒子的碰撞几率。

因此，计算出跃迁率就可以算出散射截面。由 $t \rightarrow -\infty$ 时的粒子初态 $|i\rangle$ 经过相互作用变为 $t = \infty$ 时的终态 $|f\rangle$ 的散射过程，跃迁矩阵元为

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \delta_{if} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) T_{fi} \quad (5.4)$$

δ_{fi} 代表没有发生相互作用。

$$T_{fi} = \langle f|T|i\rangle \quad (5.5)$$

是相互作用的跃迁振幅。S 矩阵应当为幺正的，满足

$$\begin{aligned} \langle k|i\rangle &= \delta_{ki} \\ \Rightarrow \langle k|S^\dagger S|i\rangle &= \delta_{ki} \\ \Rightarrow \sum_f \langle k|S^\dagger|f\rangle \langle f|S|i\rangle &= \delta_{ki} \\ \Rightarrow \sum_f S_{fk}^* S_{fi} &= \delta_{ki}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

经过散射，从 i 态到 f 态的跃迁几率为

$$P_{fi} = T_{fi}^* T_{fi}, \quad (5.7)$$

从 i 态经散射跃迁到所有可能末态的总几率为

$$P_{\text{total}} = \sum_f T_{fi}^* T_{fi}. \quad (5.8)$$

定义在体积元 V 内的单粒子态

$$\begin{aligned} |\vec{p}\rangle &= \sqrt{(2\pi)^3 2E_p / V} a_p^+ |0\rangle \text{ (boson)} \\ |\vec{p}\rangle &= \sqrt{(2\pi)^3 (E_p / mV)} a_p^+ |0\rangle \text{ (fermion)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

则粒子态归一化为

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}|\vec{p}'\rangle &= (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') / V \text{ (boson)} \\ \langle \vec{p}|\vec{p}'\rangle &= (2\pi)^3 \frac{E_p}{m} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') / V \text{ (fermion)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

这样完备性关系可以表达为

$$\begin{aligned} \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| &= 1 \text{ (boson)} \\ \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| &= 1 \text{ (fermion)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

按 (5.10) 定义

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} | \vec{p} \rangle &= (2\pi)^3 2E_p \delta^3(0)/V, \\ \langle \vec{p} | \vec{p} \rangle &= (2\pi)^3 \frac{E_p}{m} \delta^3(0)/V.\end{aligned}\quad (5.12)$$

因为

$$\delta^3(\vec{p}) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx dy dz e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \right) \quad (5.13)$$

这样我们就可以定义

$$\delta^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

其中 $V = L^3$, 而 L 在最终取无穷大极限。对于两粒子散射过程 $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots$ 和单粒子衰变过程 $1 \rightarrow 2 + 3 + 4 \dots$ 我们需要对末态粒子的动量积分, 并考虑所有可能的末态。

已知

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \quad (5.14)$$

在动量 \vec{p} 到 $\vec{p} + d\vec{p}$ 之间的态密度为

$$dN_f = \prod_f \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (5.15)$$

单位时间的散射截面为

$$\begin{aligned}d\sigma &= \frac{\text{单位时间跃迁率}}{\text{入射通量}} \\ &= \frac{|S_{fi}|^2 dN_f}{TJ}\end{aligned}\quad (5.16)$$

其中 J 为通量。由于

$$\begin{aligned}\frac{|S_{fi}|^2 dN_f}{T} &= \frac{(2\pi)^8 |T_{fi}|^2 \delta^4(p_f - p_i) \delta^4(0)}{T} dN_f \\ &= V (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |T_{fi}|^2 dN_f\end{aligned}\quad (5.17)$$

$$J = \frac{1}{V} |v_1 - v_2| = \left| \frac{p_1}{E_1} - \frac{p_2}{E_2} \right| \frac{1}{V}$$

$$\begin{aligned}\therefore 2E_1 2E_2 V J &= (2E_1)(2E_2) |v_1 - v_2| = 4|p_1 E_2 - p_2 E_1| \\ &= 4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |T_{fi}|^2}{J} V \prod_f dN_f \\
&= \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) V^2 (2E_1)(2E_2) |T_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod_f dN_f \\
&= \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_j^n p_j)}{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}} N_1 N_2 |M_{fi}|^2 \prod_{j=1}^n \frac{N_j d^3 p_j}{2E_j (2\pi)^3} \quad (5.19)
\end{aligned}$$

但考虑到末态全同粒子,

$$d\sigma = \frac{S N_1 N_2}{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_j^n p_j) |M_{fi}|^2 \prod_{j=1}^n \frac{N_j d^3 p_j}{2E_j (2\pi)^3} \quad (5.20)$$

其中 $S = \prod_k \frac{1}{n_k!}$, n_k 为末态第 n_k 种全同粒子的数目。在 (5.19) (5.20) 中

$$\begin{aligned}
N_l &= 1 \text{ (玻色子)} \\
N_l &= 2m \text{ (费米子)} \quad (5.21)
\end{aligned}$$

注, 在 (5.19) (5.20) 中每条粒子外线的因子为 $\sqrt{\frac{N_i}{2E_i(2\pi)^3}} \rightarrow \sqrt{\frac{N_i}{2E_i V}}$, 原因是现在假设空间积分是在 $V = l^3$ 中。▲ $\frac{1}{V} \sum_f \leftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p$ ▲

同样, 定义衰变 $a \rightarrow b + c + \dots$ 的几率为

$$p = \int dN_f |T_{fi}|^2 [(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)]^2 \quad (5.22)$$

定义衰变宽度为单位时间呢的跃迁几率

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{p}{T} = \int dN_f V |T_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - \sum_f p_f) \\
&= \int \prod_i \frac{d^3 p_i V}{(2\pi)^3} |M_{fi}|^2 \frac{V 2E_1}{2E_1} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - \sum_j p_j) N_1 \prod_j N_j \\
&= \frac{(2\pi)^4}{2E_1} N_1 \int \prod_{j=1}^n \frac{N_j d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} |M_{fi}|^2 \delta^4(p_1 - \sum_j p_j) \quad (5.23)
\end{aligned}$$

注:

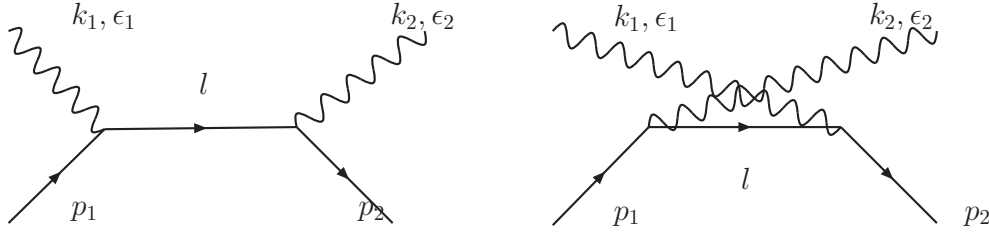
1. 在不测量末态粒子的极化取向时, (5.20) 和 (5.23) 要对末态粒子极化求和; 如初态粒子是无特别极化取向的, 同样需要对初态极化求平均。
2. 粒子衰变宽度的倒数定义为粒子寿命 (lifetime)

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (5.24)$$

5.2 电磁散射过程 (Electromagnetic Scattering Processes)

- $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ Compton Scattering
- $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$ Pair annihilation
- $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ Møller Scattering
- $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ Bhabha Scattering
- $e^- + N \rightarrow e^- + N + \gamma$ Bremsstrahlung
- $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$ Pair creation

例如对正负电子对湮灭



最低阶 S 矩阵, S 矩阵元为

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left\{ \sqrt{\frac{m}{E_2}} \bar{v}(p_2, s_2) \not{\epsilon}_2 (-ie) (2\pi)^4 \delta^4(l - k_2 + p_2) \frac{i}{\not{k}_2 - \not{p}_2 - m} \right. \\
 &\quad \frac{1}{\sqrt{2k_1}} (-ie) \not{\epsilon}_1 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - k_1 - l) \sqrt{\frac{m}{E_1}} u(p_1, s_1) \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2k_2}} + \\
 &\quad \sqrt{\frac{m}{E_2}} \bar{v}(p_2, s_2) \not{\epsilon}_1 (-ie) (2\pi)^4 \delta^4(l - k_1 + p_2) \frac{i}{\not{k}_1 - \not{p}_2 - m} \frac{1}{\sqrt{2k_1}} \frac{1}{\sqrt{2k_2}} \\
 &\quad \left. (-ie) \not{\epsilon}_2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - k_2 - l) \sqrt{\frac{m}{E_1}} u(p_1, s_1) \frac{1}{(2\pi)^6} \right\} \\
 &= -ie^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2k_1}} \frac{1}{\sqrt{2k_2}} \sqrt{\frac{m}{E_2}} \bar{v}(p_2, s_2) \\
 &\quad \left(\not{\epsilon}_2 \frac{1}{\not{k}_2 - \not{p}_2 - m} \not{\epsilon}_1 + \not{\epsilon}_1 \frac{1}{\not{k}_1 - \not{p}_2 - m} \not{\epsilon}_2 \right) \sqrt{\frac{m}{E_1}} u(p_1, s_1) \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

$$M_{fi} = -e^2 \bar{v}(p_2, s_2) \left[\not{\epsilon}_2 \frac{1}{\not{k}_2 - \not{p}_2 - m} \not{\epsilon}_1 + \not{\epsilon}_1 \frac{1}{\not{k}_1 - \not{p}_2 - m} \not{\epsilon}_2 \right] u(p_1, s_1) \quad (5.26)$$

量子场论导引

$$\begin{aligned}
\sum_{s_1, s_2} |M_{fi}|^2 &= e^4 \bar{v}(p_2, s_2) [\not{\epsilon}_2 \frac{1}{\not{k}_2 - \not{p}_2 - m} \not{\epsilon}_1 + \not{\epsilon}_1 \frac{1}{\not{k}_1 - \not{p}_2 - m} \not{\epsilon}_2] u(p_1, s_1) \\
&\quad \bar{u}(p_1, s_1) [\not{\epsilon}_1^* \frac{\not{k}_2 - \not{p}_2 + m}{(k_2 - p_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}_2^* + \not{\epsilon}_2^* \frac{\not{k}_1 - \not{p}_2 + m}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}_1^*] v(p_2, s_2) \\
&= -e^4 \text{Tr} \left\{ [\not{\epsilon}_2 \frac{\not{k}_2 - \not{p}_2 + m}{(k_2 - p_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}_1 + \not{\epsilon}_1 \frac{\not{k}_1 - \not{p}_2 + m}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}_2] \frac{\not{p}_1 + m}{2m} \right. \\
&\quad \left. [\not{\epsilon}_1^* \frac{\not{k}_2 - \not{p}_2 + m}{(k_2 - p_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}_2^* + \not{\epsilon}_2^* \frac{\not{k}_1 - \not{p}_2 + m}{(k_1 - p_2)^2 - m^2} \not{\epsilon}_1^*] \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \right\} \quad (5.27)
\end{aligned}$$

利用

$$k_1^2 = k_2^2 = \epsilon_1 \cdot k_1 = \epsilon_2 \cdot k_2 = 0 \quad (5.28)$$

并取 e^- 静止系

$$\begin{aligned}
p_{1\mu} &= (m, 0, 0, 0) \\
p_{2\mu} &= (E, 0, 0, |\vec{p}|) \\
k_{1\mu} &= k_1(1, 0, \sin \theta, \cos \theta) \\
k_{2\mu} &= (k_2, 0, -k_1 \sin \theta, |\vec{p}| - k_1 \cos \theta) \quad (5.29)
\end{aligned}$$

则有

$$\sum_{s_1, s_2} |M_{fi}|^2 = e^4 \frac{1}{2m^2} \left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} - 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 + 2 \right) \quad (5.30)$$

可取横向极化如

$$\begin{aligned}
\epsilon_1^{(1)} &= (0, 1, 0, 0) \\
\epsilon_1^{(2)} &= (0, 0, \cos \theta, -\sin \theta) \\
\epsilon_2^{(1)} &= (0, 1, 0, 0) \\
\epsilon_2^{(2)} &= (0, 0, |\vec{p}| - k_1 \cos \theta, k_1 \sin \theta) \quad (5.31)
\end{aligned}$$

这样:

$$\begin{aligned}
\epsilon_1^{(1)} \cdot \epsilon_2^{(1)} &= -1 \\
\epsilon_1^{(2)} \cdot \epsilon_2^{(2)} &= -|\vec{p}| \cos \theta + k_1 \cos^2 \theta + k_1 \sin^2 \theta \\
&= k_1 - |\vec{p}| \cos \theta = \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = 1 - \frac{(k_1 + k_2)^2}{2k_1 k_2} \\
&= 1 - \frac{2m(m + E)}{2k_1 k_2} = 1 - m \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \blacktriangle \text{能量守恒} \blacktriangle \quad (5.32)
\end{aligned}$$

这样

$$\sum_{i,j} (\epsilon_1^{(i)} \cdot \epsilon_2^{(j)})^2 = 1 + [1 - (\frac{m}{k_1} + \frac{m}{k_2})]^2 \quad (5.33)$$

又, 由

$$\begin{aligned} & \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) d^3k_1 d^3k_2 \\ &= \delta(p_1^0 + p_2^0 - k_1^0 - k_2^0) d^3k_1 \\ &= \delta(p_1^0 + p_2^0 - k_1^0 - k_2^0) dk_1 k_1^2 d\Omega \\ &= \delta[m + E - |\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - k_1| - |k_1|] dk_1 k_1^2 d\Omega \\ &= \delta[m + E - \sqrt{\vec{R}^2} - k_1] dk_1 k_1^2 d\Omega \end{aligned}$$

▲ 而

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (0, -\sin\theta k_1, |\vec{p}| - \cos\theta k_1) \\ \vec{R}^2 &= k_1^2 \sin^2\theta + |\vec{p}|^2 + k_1^2 \cos^2\theta - 2|p||k_1| \cos\theta \\ &= k_1^2 + |\vec{p}|^2 - 2|p||k_1| \cos\theta \end{aligned}$$

▲

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2(m+E)}{16|\vec{p}|(m+E-|p|\cos\theta)^2} (\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} - 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 + 2) \quad (5.34)$$

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{m^2(1+\gamma)} (\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1} \log(\gamma + \sqrt{\gamma^2-1}) - \frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}) \quad (5.35)$$

其中 $\gamma = \frac{E}{m}$ 。

另末态相空间可以如此来积

设

$$E_f = k_1^0 + k_2^0 = k_1 + \sqrt{k_1^2 + p^2 - 2k_1 p \cos\theta} \quad \dots (1)$$

$\frac{dk_1}{dE_f}$ 作用到两端

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{dk_1}{dE_f} + \frac{1}{k_2^0} (k_1 - p \cos\theta) \\ \Rightarrow 1 &= [1 + \frac{1}{k_2^0} (k_1 - p \cos\theta)] \frac{dk_1}{dE_f} \\ \Rightarrow \frac{dk_1}{dE_f} &= \frac{k_2^0}{k_2^0 + k_1 - p \cos\theta} = \frac{k_2^0}{m + E - p \cos\theta} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
& k_2^0 = m - E - k_1 \\
\Rightarrow & k_1^2 + p^2 - 2pk_1 \cos \theta = (m + E - k_1)^2 = (m + E)^2 \\
& -2k_1(m + E) + k_1^2 \\
\Rightarrow & k_1 = \frac{(m + E)^2 - p^2}{2(-p \cos \theta + m + E)} = \frac{m(E + m)}{-p \cos \theta + m + E} \quad \dots (3)
\end{aligned}$$

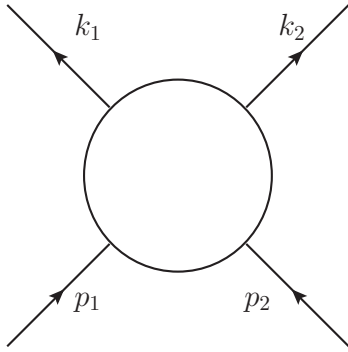
由 (2) 和 (3)

$$\frac{dk_1}{dE_f} = \frac{k_1 k_2^0}{m(E + m)} \quad \dots (4)$$

由 (5.20)

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{m^2}{2[(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4]^{1/2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \sum |M_{fi}|^2 \frac{d^3 k_1}{2k_1(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{2k_2(2\pi)^3} \\
&= \frac{m^2}{2[m^2 E^2 - m^4]^{1/2}} \frac{1}{4k_1 k_2 (2\pi)^2} \delta(p_1^0 + p_2^0 - k_1^0 - k_2^0) \sum |M_{fi}|^2 k_1^2 dk_1 d\Omega \\
&= \frac{m}{8k_1 k_2 [E^2 - m^2]^{1/2}} \frac{k_1^2}{(2\pi)^2} \sum |M_{fi}|^2 \frac{dk_1}{dE_f} dE_f d\Omega \delta(p_1^0 + p_2^0 - E_f) \\
&= \frac{k_1 m}{8k_2 [E^2 - m^2]^{1/2}} \sum |M_{fi}|^2 \frac{k_1 k_2}{m(E + m)} dE_f d\Omega \delta(p_1^0 + p_2^0 - E_f) \\
&= \frac{k_1^2}{8[E^2 - m^2]^{1/2} (E + m)} \sum |M_{fi}|^2 d\Omega \frac{1}{(2\pi)^2} \\
&= \frac{(E + m)m^2}{8|\vec{p}|(m + E - p \cos \theta)^2} \sum |M_{fi}|^2 \frac{1}{4} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} \\
\Rightarrow & \hspace{15em} (5.36) \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{m^2(E + m)}{8|\vec{p}|(m + E - p \cos \theta)^2} \frac{e^4}{(2\pi)^2} \frac{1}{2m^2} \left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} - 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 + 2 \right) \\
&= \frac{\alpha^2(E + m)}{16|\vec{p}|(m + E - p \cos \theta)^2} \left(\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_1}{k_2} - 4(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 + 2 \right)
\end{aligned}$$

2-body \rightarrow 2-body process



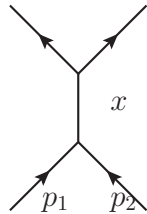
Mandelstan variables

$$s = (p + p')^2 = (k_1 + k_2)^2$$

$$t = (p_1 - k_1)^2 = (p_2 - k_2)^2$$

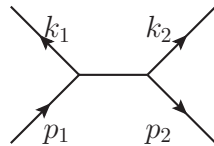
$$u = (k_2 - p_1)^2 = (k_1 - p_2)^2$$

s - channel



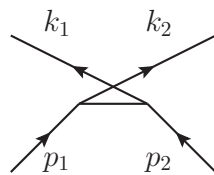
$$M \propto \frac{1}{s - m_x^2}$$

t - channel



$$M \propto \frac{1}{t - m_x^2}$$

u - channel



$$M \propto \frac{1}{u - m_x^2}$$

5.3 衰变过程举例

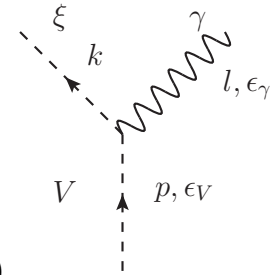
矢量介子的辐射衰变，如 $\rho \rightarrow \pi\gamma$, $\omega \rightarrow \pi\gamma$, $J/\Psi \rightarrow \eta_c\gamma$, $\phi \rightarrow \eta\gamma$ 等。

$$V(p, \lambda) \rightarrow \gamma(k, \sigma) + \xi(l)$$

如上过程相应的规范不变的有效相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i &= -\frac{1}{4}f\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}G_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}\xi + h.c. \\ &= -f\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\mu B_\nu\partial_\lambda A_\rho\xi + h.c. \end{aligned} \quad (5.37)$$

中性矢量介子没有厄米共轭项。由 (5.37) $V - \gamma - \xi$ 耦合定点为



$$if\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}p_\mu k_\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p - k - l) \quad (5.38)$$

$$S_{fi}^{(1)} = (2\pi)^4 \delta^4(p - k - l) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_l}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_\nu 2E_\xi 2E_\gamma}} (-if) M_{fi} \quad (5.39)$$

其中

$$M_{fi} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\mu k^\nu \epsilon_V^\lambda \epsilon_\gamma^\rho \quad (5.40)$$

在 V 介子静止系中

$$|\vec{l}| = |\vec{k}| = \frac{M_V^2 - m_\xi^2}{2M_V} \quad (5.41)$$

实验上如不测定粒子 V 和 γ 的极化时

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |M_{fi}|^2 &= -\frac{1}{3} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p^\mu k^\nu p^\alpha k^\beta \sum_{i=1}^3 \epsilon_\lambda^i(p) \epsilon_\gamma^{*i}(p) \sum_{\sigma=1}^2 \epsilon_\rho^\sigma(k) \epsilon_\delta^{*\sigma}(k) \\ &= -\frac{1}{3} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p^\mu k^\alpha p^\nu k^\beta (-g^{\lambda\gamma} + \frac{p^\lambda p^\gamma}{M^2}) (-g^{\rho\delta}) \\ &= -\frac{1}{3} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p^\mu k^\nu p^\alpha k^\beta = \frac{2}{3} (p \cdot k)^2 \\ &= \frac{1}{6} (M_V^2 - m_\xi^2)^2 = \frac{2}{3} M_V^2 |\vec{l}|^2 \end{aligned} \quad (5.42)$$

由 (5.23)

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{(2\pi)^4}{2E_V} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_\xi} \frac{d^3l}{(2\pi)^3 2E_l} f^2 \overline{\sum} |M_{fi}|^2 \delta^4(p - k - l) \\
 &= \frac{f^2}{2M_V} \frac{1}{4(2\pi)^2} \int \overline{\sum} |M_{fi}|^2 \frac{1}{E_\xi E_l} |\vec{l}|^2 dld\Omega \delta(E_V - E_\xi - E_l) \\
 &= \frac{Mf^2}{12(2\pi)^2} \int \frac{|\vec{l}|^4}{E_\xi E_l} dld\Omega \delta(E_V - E_\xi - E_l) \\
 &= \frac{Mf^2}{12(2\pi)^2} \int \frac{|\vec{l}|^3}{E_\xi} \frac{E_\xi}{E_l + E_\xi} dE_f d\Omega \delta(E_V - E_f) \\
 &= \int \frac{f^2}{12(2\pi)^2} |\vec{l}|^3 d\Omega = \int \frac{f^2 (M_V^2 - m_\xi^2)^3}{48(2\pi)^2 M_V^3} d\Omega \tag{5.43}
 \end{aligned}$$

微分宽度为

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{f^2 (M_V^2 - m_\xi^2)^3}{48(2\pi)^2 M_V^3} \tag{5.44}$$

对于球对称角分布

$$\Gamma = \frac{f^2 (M_V^2 - m_\xi^2)^3}{48(2\pi)^2 M_V^3} 4\pi = \frac{f}{12\pi} |\vec{l}|^3 \tag{5.45}$$

练习:

根据描述 $\mu \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ 的四费米子有效相互作用哈密顿量密度

$$H_L = -\frac{G}{\sqrt{2}} : \bar{\nu}_\mu \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \mu \bar{e} \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \nu_e : + h.c.$$

在忽略电子质量时计算 $\mu \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ 的衰变宽度。

附: 介子的传播子为 $\bullet \overset{k}{\dashrightarrow} \bullet \quad \frac{1}{k^2 - m^2}$

对有质量的矢量玻色子，极化矢量 $\epsilon_\mu(p)$ 可以取为归一化：

$$\epsilon_\mu(p, \lambda)\epsilon^\mu(p, \lambda') = g_{\lambda\lambda'} \quad \dots (1)$$

$$\epsilon(\vec{p}, 1) = (0, \vec{\epsilon}(\vec{p}, 1))$$

$$\epsilon(\vec{p}, 2) = (0, \vec{\epsilon}(\vec{p}, 2))$$

$$\vec{\epsilon}(\vec{p}, 1) \cdot \vec{p} = \vec{\epsilon}(\vec{p}, 2) \cdot \vec{p} = 0 \quad \dots (2)$$

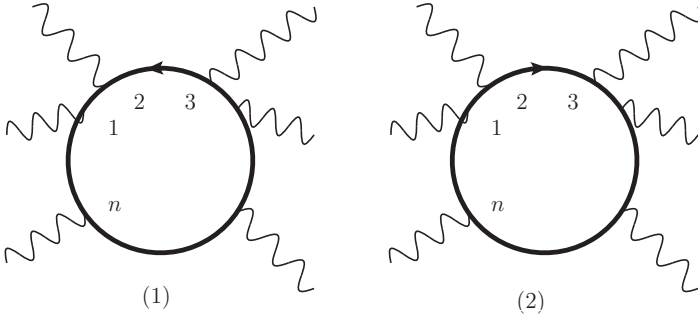
$$\vec{\epsilon}(\vec{p}, i) \cdot \vec{\epsilon}(\vec{p}, j) = \delta_{ij}$$

$$\vec{\epsilon}(\vec{p}, 3) = \left(\frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \frac{p^0}{m} \right) \quad \dots (4)$$

$$\epsilon(p, 0) = \frac{1}{m} p$$

5.4 法雷 (Furry) 定理

含有奇数个光子顶角的费米子圈，对 QED 过程 (S 矩阵元) 的贡献为零。



第一个图对 S 矩阵的贡献为

$$S_1 = \text{Tr}[\gamma_{\mu_1} S_F(x_1, x_n) \gamma_{\mu_n} S_F(x_n, x_{n-1}) \cdots \gamma_{\mu_2} S_F(x_2, x_1)] \quad (5.46)$$

由于

$$\begin{aligned} S_F(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \frac{\not{k} - m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= (i\not{\partial} + m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$S_F^T(-x) = (-i\not{\partial}^T + m) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (5.48)$$

由

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T} \quad (5.49)$$

我们有

$$C^{-1}S_F(x)C = S_F^T(-x) \quad (5.50)$$

将 S_1 中插入 CC^{-1}

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{Tr}[\gamma_{\mu_1} S_F(x_1, x_n) \gamma_{\mu_n} S_F(x_n, x_{n-1}) \cdots \gamma_{\mu_2} S_F(x_2, x_1) CC^{-1}] \\ &= \text{Tr}[\gamma_{\mu_1}^T S_F^T(x_1, x_n) \gamma_{\mu_n}^T S_F^T(x_n, x_{n-1}) \cdots \gamma_{\mu_2}^T S_F^T(x_2, x_1)] \\ &= (-1)^n \text{Tr}[S_F(x_1, x_2) \gamma_{\mu_2} S_F(x_2, x_3) \cdots \gamma_{\mu_{n-1}} S_F(x_{n-1}, x_n) \gamma_{\mu_n} S_F(x_n, x_1)] \\ &= (-1)^n S_2 \end{aligned} \quad (5.51)$$

对奇数个顶角， S_1 与 S_2 差一负号，这两种贡献相消，因此有法雷定理。

法雷定理的推论：QED 不允许存在奇数（偶数）个光子的态到偶数（奇数）个光子的跃迁过程。

辐射修正 (Radiative Corrections) 和重整化理论 简介 (General Introduction to Renormalization)

在量子电动力学 (QED) 的微扰计算中, 最低阶过程一般不涉及内线的圈积分, 称为树图过程 (Tree Diagram)。对树图的高阶修正过程称为辐射修正 (Radiative Correction), 辐射修正通常会涉及内线动量的圈积分, 直接的计算表明大多数圈积分有无穷大发散, 如要使得辐射修正有意义, 就要进行重整化 (Renormalization)。要做重整化就需要有自洽的办法将无穷大妥善的分离出来, 这种分离无穷大的手段称为正规化 (Regularization)。正规化的方法经过多年的探索已经发展出了许多, 其中使用较多, 比较方便的有 Pauli-Villars (泡利-维拉斯) 正规子 (Regulator) 方法和 't Hooft-Veltman (特·霍夫特-威特曼) 的维数正规化 (Dimensional Regularization) 方法等。

6.1 真空极化 (Vacuum Polarization)

按照狄拉克空穴理论, 在有电磁场时, 真空会发生极化, 从量子场论来看就是会有如下图所示的真空涨落过程发生。这是最简单的一类辐射修正过程。

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \equiv (-ie)^2(-) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} - \not{q} - m}] \quad (6.1)$$

这样

$$\begin{aligned} \Pi_2^{\mu\nu}(q) &= ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu (\not{k} - \not{q} - m)]}{(k^2 - m^2)((k - q)^2 - m^2)} \\ &= 4ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{[2k^\mu k^\nu - k^\mu q^\nu - k^\nu q^\mu - g^{\mu\nu}(k^2 - k \cdot q - m^2)]}{(k^2 - m^2)((k - q)^2 - m^2)} \end{aligned} \quad (6.2)$$

上式显然有紫外发散。

利用费曼参数化公式

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{dx x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[Ax + B(1-x)]^{\alpha+\beta}} \quad (6.3)$$

可将 (6.2) 改写为

$$\Pi_2^{\mu\nu} = 4ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{[2k^\mu k^\nu - k^\mu q^\nu - k^\nu q^\mu - g^{\mu\nu}(k^2 - k \cdot q - m^2)]}{[k^2 - 2k \cdot qx - (m^2 - q^2x)]^2} \quad (6.4)$$

维数正规化:

(6.4) 的积分中, 当 $k \rightarrow \infty$ 时会出现几种类型的发散, 分别是对数发散、线性发散、平方发散。为把这些发散正规化出来, 可用特·霍夫特-威特曼维数正规化方法。维数正规化方法认定, 费曼图所对应的积分是时空维数 d 的解析函数, 因而积分可以在任意维数 d 下完成, 最终物理可观测量对应 $d \rightarrow 4$ 极限下的有限部分, 而发散部分将被适当地分离。

对于 d 维闵氏空间中的矢量 l , 则变为

$$l^\mu = (l^0, \vec{l}), \vec{l} = (l^1, l^2, \dots, l^{d-1}) \quad (6.5)$$

度规张量

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}[1, -1, -1, \dots, -1] \quad (6.6)$$

两矢量的标积为

$$l \cdot \rho = l_0 \rho_0 - \vec{l} \cdot \vec{\rho} = l_0 \rho_0 - l_1 \rho_1 - l_2 \rho_2 \cdots - l_{d-1} \rho_{d-1} \quad (6.7)$$

威克转动 (Wick Rotation)

为了便于积分, 对被积函数进行威克转动, 使闵可夫斯基空间的积分变为欧几里德空间的积分。如积分 $\int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \frac{1}{[l_0^2 - \vec{l}^2 - \Delta + i\epsilon]^\alpha}$ 有奇点 $l_0 = \pm(\sqrt{\vec{l}^2 + \Delta} - i\epsilon)$ 由于 I, III 象限中没有奇点, 沿实轴的积分可以转为沿虚轴的积分, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \frac{1}{[l_0^2 - \vec{l}^2 - \Delta + i\epsilon]^\alpha} = \int_{-i\infty}^{i\infty} dl_0 \frac{1}{[l_0^2 - \vec{l}^2 - \Delta + i\epsilon]^\alpha} \quad (6.8)$$

称为威克转动。令 $l_0 = iL_0, \vec{l} = \vec{L}$, 则上式变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \frac{1}{[l_0^2 - \vec{l}^2 - \Delta + i\epsilon]^\alpha} = i(-1)^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} dL_0 \frac{1}{[L_0^2 + \vec{L}^2 + \Delta - i\epsilon]^\alpha} \quad (6.9)$$

这样积分

$$\int d^d l \frac{1}{[l^2 - \Delta + i\epsilon]^\alpha} = i(-1)^\alpha \int d^d L \frac{1}{[L^2 + \Delta - i\epsilon]^\alpha} \quad (6.10)$$

成为 d 维欧几里德空间的积分, $L^2 = L_0^2 + \vec{L}^2$ 。

在 d 维欧几里德空间中, 采用球坐标时

$$d^d L = L^{d-1} dL d\Omega_d \quad (6.11)$$

d 维空间中的立体角

$$\begin{aligned} d\Omega_d &= (\sin \theta_{d-1})^{d-2} d\theta_{d-1} (\sin \theta_{d-2})^{d-3} d\theta_{d-2} \cdots \sin \theta_2 d\theta_2 d\theta_1 \\ &0 \leq \theta_1 \leq 2\pi; 0 \leq \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_{n-1} \leq \pi \end{aligned} \quad (6.12)$$

利用三角公式

$$\int_0^\pi \sin^m \theta d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(m+1))}{\Gamma(\frac{1}{2}(m+2))} \quad (6.13)$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt; \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \\ \Gamma(1) &= 1; \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (6.14)$$

可以算得

$$\int d\Omega_d = 2\pi^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \quad (6.15)$$

这样可以得到如下常用的公式 (闵氏空间)

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2)^\alpha}{(k^2 - R^2)^\beta} = i \frac{(-1)^{\alpha-\beta} \Gamma(\alpha + \frac{d}{2}) \Gamma(\beta - \alpha - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\beta) (R^2)^{\beta-\alpha-\frac{d}{2}}} \quad (6.16)$$

另外, 在积分计算中会经常用到闵氏空间的对称积分

$$\int d^d k k^\mu k^\nu f(k^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{d} \int d^d k k^2 f(k^2) \quad (6.17)$$

$$\int d^d k k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma f(k^2) = \frac{g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}}{d(d+2)} \int d^d k k^4 f(k^2) \quad (6.18)$$

$$\int d^d k k^{\mu_1} k^{\mu_2} \cdots k^{\mu_{2n+1}} f(k^2) = 0 \quad (6.19)$$

这样就可以计算光子真空极化过程的几个积分

$$\int d^d k \frac{1}{[k^2 - 2k \cdot qx - \Delta + i\epsilon]^\alpha} = (-1)^\alpha i\pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\Delta + (qx)^2)^{\alpha - \frac{d}{2}}} \quad (6.20)$$

$$\int d^d k \frac{k^\mu}{[k^2 - 2k \cdot qx - \Delta + i\epsilon]^\alpha} = (-1)^\alpha i\pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{q^\mu x}{(\Delta + (qx)^2)^{\alpha - \frac{d}{2}}} \quad (6.21)$$

$$\int d^d k \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - 2k \cdot qx - \Delta + i\epsilon]^\alpha} = (-1)^\alpha i\pi^{\frac{d}{2}} \left[\frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^2 q^\mu q^\nu}{(\Delta + (qx)^2)^{\alpha - \frac{d}{2}}} - \frac{\Gamma(\alpha - 1 - \frac{d}{2})}{2\Gamma(\alpha)} \frac{g^{\mu\nu}}{(\Delta + (qx)^2)^{\alpha - 1 - \frac{d}{2}}} \right] \quad (6.22)$$

这样，对 (6.4) 中的积分交换次序，并将对动量的积分在 d 维时空进行

$$\begin{aligned} \Pi_2^{\mu\nu}(q) &= 4ie^2\mu^\epsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu(\not{k} - \not{q} + m)]}{(k^2 - m^2)[(k - q)^2 - m^2]} \\ &= 4ie^2\mu^\epsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{[2k^\mu k^\nu - k^\mu q^\nu - k^\nu q^\mu - g^{\mu\nu}(k^2 - k \cdot q - m^2)]}{[k^2 - 2k \cdot qx - (m^2 - q^2 x)]^2} \\ &= \frac{4ie^2\mu^\epsilon}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \int d^d k \frac{[2k^\mu k^\nu - k^\mu q^\nu - k^\nu q^\mu - g^{\mu\nu}(k^2 - k \cdot q - m^2)]}{[(k - qx)^2 - m^2 + q^2 x(1 - x)]^2} \\ &= \frac{4e^2\mu^\epsilon}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx 2x(1 - x) \frac{(q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2)\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[m^2 - q^2 x(1 - x)]^{2 - \frac{d}{2}}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

将

$$d \equiv 4 - \epsilon \quad (6.24)$$

代入，并利用

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + O(\epsilon) \right] \quad (6.25)$$

得

$$\begin{aligned} \Pi_2^{\mu\nu}(q) &= \frac{e^2}{12\pi^2} (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right. \\ &\quad \left. - 6 \int_0^1 dx x(1 - x) \ln \left[1 - \frac{q^2}{m^2} x(1 - x) \right] + O(\epsilon) \right\} \end{aligned} \quad (6.26)$$

其中 γ_E 是欧拉 (Euler) 常数，等于

$$\gamma_E = - \int_0^\infty du \ln u e^{-u} = 0.5772 \quad (6.27)$$

并且用到

$$\begin{aligned}\Gamma(2 - \frac{d}{2}) &= \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{2 - \frac{d}{2}} \\ \frac{1}{[x]^{2 - \frac{d}{2}}} &= \exp[-(2 - \frac{d}{2}) \ln x]\end{aligned}\quad (6.28)$$

(6.23) 式中的 μ 称为重整化标度。重整化标度的引入在 d 维时空是必须的。因为费米子场与电磁场的相互作用量

$$\begin{aligned}S = \int d^4x \mathcal{L}(x) &= \int d^4x [\bar{\Psi}(x)(i\partial - m)\Psi(x) - e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu \\ &\quad - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2]\end{aligned}\quad (6.29)$$

是无量纲量。因此，在由四维过度到 d 维时空时， $\mathcal{L}(x)$ 应是 d 次能动量量纲， $[\mathcal{L}(x)] = d$ 。由 (6.29) 第一，二项

$$[\Psi] = \frac{d-1}{2}; [A_\mu] = \frac{d}{2} - 1 \quad (6.30)$$

这样由 (6.29) 第二项可知耦合常数的能动量量纲为

$$[e] = d - (d-1) - (\frac{d}{2} - 1) = 2 - \frac{d}{2} = \frac{\epsilon}{2} \quad (6.31)$$

而耦合常数是一个基本物理量，人们假定它是一个与时空维度无关的常数，这样就需要引入一个具有能动量（质量）量纲的参数 μ 。当时空由4维变为 d 是，耦合顶角

$$-ie\gamma^\mu \rightarrow -ie\mu^{\frac{\epsilon}{2}}\gamma_\mu \quad (6.32)$$

这就是 (6.23) 式中 μ^ϵ 出现的原因。

在 d 维时空

$$\left\{ \begin{aligned}\gamma^\mu\gamma_\mu &= d \\ \gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\mu &= (2-d)\gamma_\alpha \\ \gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu &= 4g_{\alpha\beta} - (4-d)\gamma_\alpha\gamma_\beta \\ \gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\rho\gamma_\mu &= -2\gamma_\rho\gamma_\beta\gamma_\alpha + (4-d)\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\rho\end{aligned}\right. \quad (6.33)$$

对 γ 矩阵的求迹可以继续按照四维时情形操作，因为否则也只相当于无穷大部分加或减了一有限项。

光子传播子重整化

在链近似下，光子的传播子，即将所有单粒子不可约图（One-particle irreducible graph）求和，如下图所示

$$\begin{aligned}
 D'_{\mu\nu}(q) &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} i\Pi^{\rho\sigma} \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} i\Pi^{\rho\sigma} \frac{-ig_{\sigma\lambda}}{q^2} i\Pi^{\lambda r} \frac{-ig_{r\nu}}{q^2} + \dots \\
 &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\sigma}}{q^2} i\Pi^{\sigma\rho} \left[\frac{-ig_{\rho\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\rho\lambda}}{q^2} i\Pi^{\lambda r} \frac{-ig_{r\nu}}{q^2} + \dots \right] \\
 &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\sigma}}{q^2} i\Pi^{\sigma\rho} D'_{\rho\nu}(q)
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

由 (6.26) 知

$$\Pi^{\mu\nu} = (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2) \tag{6.35}$$

设

$$D'_{\mu\nu}(q) = A(q^2)g_{\mu\nu} + B(q^2)q_\mu q_\nu \tag{6.36}$$

由 (6.34)，(6.35) 和 (6.36) 可得

$$A(q^2) = \frac{-i}{q^2(1 + \Pi(q^2))}; \quad B(q^2) = \frac{-i\Pi(q^2)}{q^4(1 + \Pi(q^2))} \tag{6.37}$$

代入 (6.36) 得

$$D'_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2(1 + \Pi(q^2))} + \frac{-i\Pi(q^2)q_\mu q_\nu}{q^4(1 + \Pi(q^2))} \tag{6.38}$$

由于有流守恒 $q_\mu J^\mu = 0$ ，上式中第二项可取为零。所以链近似下的光子传播子为

$$D'_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2(1 + \Pi(q^2))} \tag{6.39}$$

将 $\Pi(q^2)$ 在 $q^2 = 0$ 作展开

$$\Pi(q^2) = \Pi(0) + \tilde{\Pi}(q^2) \tag{6.40}$$

则

$$D'_{\mu\nu} = \frac{-ig_{\mu\nu} Z_3}{q^2(1 + \tilde{\Pi}(q^2))} \tag{6.41}$$

其中

$$Z_3 = \frac{1}{1 + \Pi(0)} \quad (6.42)$$

是发散，称为光子场的重整化常数，由 (6.41) 可定义重整化的传播子为

$$D'_{\mu\nu} = Z_3 D_{\mu\nu}^r \quad (6.43)$$

由于

$$\begin{aligned} D'_{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0|T A'_\mu(x) A'_\nu(y)|0\rangle \\ D_{\mu\nu}^r(x-y) &= \langle 0|T A_\mu^r(x) A_\nu^r(y)|0\rangle \end{aligned}$$

可知

$$A'_\mu(x) = \sqrt{Z_3} A_\mu^r(x) \quad (6.44)$$

因此， Z_3 也被称为光子场的重整化常数。由 (6.26) 知

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} \quad (6.45)$$

6.2 二阶电子自能和三阶电磁顶角

二阶电子自能过程，

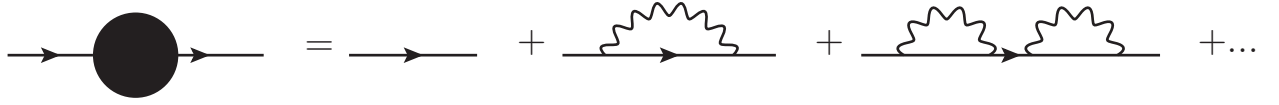
$$-i\Sigma^{(2)}(p) = \text{Diagram}$$

利用维数正规化方法，

$$\begin{aligned} -i\Sigma^{(2)}(p) &= -ie^2\mu^\epsilon \int \frac{d^4k}{(2\pi)^d} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}-\not{k}-m} \gamma_\mu \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} \\ &\stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi + \frac{3}{2} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) (4m - \not{p}) \right. \\ &\quad \left. + \not{p} \left[\left(1 - \frac{m^4}{p^4} \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) - \frac{m^2}{p^2} + 1 \right] \right. \\ &\quad \left. - 4m \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) + O(\epsilon) \right\} \quad (6.46) \end{aligned}$$

重整化

在链近似下，费米子自能可以用费曼图表示如



$$S'_f(p) = S_f(p) + S_f(p)[-i\Sigma(p)]S_f(p) + S_f(p)[-i\Sigma(p)]S_f(p)[-i\Sigma(p)]S_f(p) + \dots \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} &= S_f(p) + S_f(p)[-i\Sigma(p)]S'_f(p) \\ \Rightarrow S'_f &= \frac{S_f(p)}{1 + i\Sigma(p)S_f(p)} \end{aligned} \quad (6.48)$$

将 $S'_f(p) = \frac{i}{\not{p} - m}$ 代入上式，并将(6.46)中 $\Sigma^{(2)}(p)$ 重新表达为

$$\Sigma(p) = A + B(\not{p} - m) + C(\not{p} - m) \quad (6.49)$$

其中A和B是发散有关的，而C是有限的

这样

$$\begin{aligned} S'_f(p) &= \frac{i}{(\not{p} - m_r)(1 - B)(1 - C)} \\ &= Z_2 \frac{i}{(\not{p} - m_r)(1 - C)} = Z_2 S_f^r(p) \end{aligned} \quad (6.50)$$

m_r 为电子的重整化质量

$$m_r = m + \delta m = m + A \quad (6.51)$$

$S_f^r(p)$ 是重整化后的传播子，是有限的。 Z_2 称为费米子场的重整化常数，由

$$\begin{aligned} S'_f(x - y) &= \langle 0 | T\Psi'(x)\bar{\Psi}'(y) | 0 \rangle \\ S_f^r(x - y) &= \langle 0 | T\Psi^r(x)\bar{\Psi}^r(y) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (6.52)$$

可知

$$\Psi'(x) = \sqrt{Z_2}\Psi^r(x); \quad \bar{\Psi}' = \sqrt{Z_2}\bar{\Psi}^r(x) \quad (6.53)$$

或

$$u'(x) = \sqrt{Z_2}u^r(x); \quad \bar{u}' = \sqrt{Z_2}\bar{u}^r(x) \quad (6.54)$$

由(6.46)可得

$$Z_2 = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}; \quad \delta m/m = -\frac{e^2}{2\pi^2\epsilon} \quad (6.55)$$

三阶电磁顶角

一阶电磁顶角为

$$-ie\gamma_u = \begin{array}{c} p' \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ p \end{array} \text{---} q$$

三阶电磁顶角为

$$-ie\Lambda_\mu^{(2)}(p,p') = \begin{array}{c} p' \\ \swarrow \\ \sigma \\ \nearrow \\ p \end{array} \begin{array}{c} \mu \\ \text{---} \\ \nu \end{array} \begin{array}{c} p'+l \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ p-l \\ p \end{array} \text{---} q$$

At tree level, the coupling of an electron to the photon is given by $\bar{u}\gamma^\mu u$. According to 戈登(Gordon)分解

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')[(p+p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu]u(p) \quad (6.56)$$

知电子磁矩(magnetic moment)

$$\vec{\mu} = g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{s} \quad (6.57)$$

中g因子在树图时为2, 在考虑到高阶过程时, 会有反常磁矩(anomalous magnetic moment)出现。按照费曼规则, 在d维时的三阶电磁顶角为

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu^{(2)}(p, p') &= -ie^2\mu^\epsilon \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\sigma(\not{p}' - \not{l} + m)\gamma_\mu(\not{p}' - \not{l} + m)\gamma_\lambda g^{\lambda\sigma}}{l^2[(p-l)^2 - m^2][(p'-l)^2 - m^2]} \\ &\equiv \Lambda_\mu^{(2)d} + \Lambda_\mu^{(2)f}\end{aligned}\quad (6.58)$$

其中

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu^{(2)d} &= -2ie^2\mu^\epsilon \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\sigma \not{l} \gamma_\mu \not{l} \gamma^\sigma}{(l^2 - R^2)^3} \\ &\stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\equiv} \frac{e^2 \gamma_\mu}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi\mu^2) - 1 - 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln R^2 \right]\end{aligned}\quad (6.59)$$


$$R^2 \equiv^2 (x+y) - p^2 x(1-x) - p'^2 y(1-y) + 2p \cdot p' xy \quad (6.60)$$

用到了积分公式

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 \dots x_n A_n]} \quad (6.61)$$

有限积分

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu^{(2)f} &= -2ie^2\mu^\epsilon \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - R^2)^3} \\ &\quad [\gamma_\sigma(\not{p}'(1-y) - \not{p}x + m)\gamma_\mu(\not{p}(1-x) - \not{p}'y + m)\gamma^\sigma] \\ &\stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\equiv} -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{R^2} x(1-x) \not{p}' \gamma_\mu \not{p} + y(1-y) \not{p}' \gamma \not{p}' \\ &\quad - (1-x)(1-y) \not{p}' \gamma_\mu \not{p}' - xy \not{p}' \gamma \not{p} \\ &= 2m[(1-2x)p_\mu + (1-2y)P'_\mu] - m^2 \gamma_\mu\end{aligned}\quad (6.62)$$

顶角重整化精确到单圈时, 既  $\Rightarrow -ie\gamma_\mu - ie\Lambda_\mu^{(2)}$

$$\begin{aligned}\Gamma'_\mu(p, p') &= \gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)}(p, p') \\ &= (1+L)(\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)f}) \equiv \frac{1}{Z_1}(\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(2)f}) \\ &= \frac{1}{Z_1} \Gamma_\mu^{(r)}(p, p')\end{aligned}\quad (6.63)$$

L中包含发散部分， Z_1 称为顶角重整化常数， $\Gamma_\mu^r(p, p')$ 为重整化顶角是有限的。

由(6.59)和(6.63)

$$Z_1 = (1 - L)^{-1} = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon} \quad (6.64)$$

练习:

1)求证Gordon分解(6.47)

2)推导(6.46)

3)推导(6.59)

6.3 Ward Identity 和QED 单圈重整化

由单圈近似下电子的自能部分

$$-i\Sigma(p) = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{l^2 + i\epsilon} (-ie\gamma_\mu) \frac{i}{\not{p} - \not{l} - m + i\epsilon} \cdot (-ie\gamma_\nu) \quad (6.65)$$

及

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p^\mu} (S_f(p) S_f^{-1}(p)) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial p^\mu} S_f(p) \right) S_f^{-1}(p) + S_f(p) \frac{\partial}{\partial p^\mu} S_f^{-1}(p) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial p^\mu} S_f(p) \right) S_f^{-1}(p) - i S_f(p) \gamma_\mu &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial p^\mu} S_f(p) &= +i S_f(p) \gamma_\mu S_f(p) \end{aligned} \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma(p) &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\nu\lambda}}{l^2 + i\epsilon} (-ie\gamma_\nu) \frac{i}{\not{p} - \not{l} - m + i\epsilon} (+i\gamma_\mu) \\ &\quad \frac{+i}{\not{p} - \not{l} - m + i\epsilon} (-ie\gamma_\lambda) = -\Lambda_\mu(p, p) \end{aligned} \quad (6.67)$$

(6.67)式称为华特(Ward)等式，也称为Ward-Takahashi恒等式

QED拉氏密度用裸量表示时

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^0(i \not{\partial} - m_0)\Psi^0 - e_0 \bar{\Psi}^0 \gamma_\mu \Psi^0 A^{0\mu} - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \quad (6.68)$$

(规范固定项略去)

重新定义场量

$$\Psi^0 = \sqrt{Z_2}\Psi; \quad A^0 = \sqrt{Z_3}A; \quad m_0 = Z_m Z_2^{-1}m; \quad e_0 = Z_1 Z_2^{-1} \frac{1}{\sqrt{Z_3}}e \quad (6.69)$$

既裸量=重整化常数·重整化量

将(6.69)代入(6.68)得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= Z_2 \bar{\Psi}(i \not{\partial} - Z_m Z_2^{-1}m)\Psi - \frac{1}{4}Z_3(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \\ &\quad + Z_1 Z_2^{-1} \sqrt{Z_3} e Z_2 \frac{1}{\sqrt{Z_3}} \bar{\Psi} A \Psi \\ &= \bar{\Psi}(i Z_2 \not{\partial} - Z_m m)\Psi - \frac{1}{4}Z_3(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \\ &\quad + Z_1 e \bar{\Psi} A \Psi \end{aligned} \quad (6.70)$$

这样重新定义的场量(重整化后的场量), 给出有限的结果。

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} \quad (6.71)$$

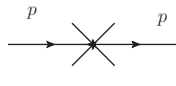
其中 \mathcal{L} 为重整化后的量所对应的拉氏密度, $\delta\mathcal{L}$ 称为抵消项拉氏密度。这样


$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 - \mathcal{L} = (Z_2 - 1)\bar{\Psi}i \not{\partial}\Psi + (1 - Z_m)m\bar{\Psi}\Psi \\ &\quad - (Z_3 - 1)\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \delta e \bar{\Psi} A \Psi \\ &= \delta Z_2 \bar{\Psi}i \not{\partial}\Psi - \delta m \bar{\Psi}\Psi - \delta Z_3 \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \end{aligned} \quad (6.72)$$

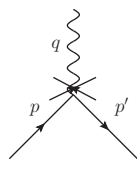
其中

$$Z_1 = 1 + \frac{\delta e}{e}; \quad Z_2 = 1 + \delta Z_2; \quad Z_3 = 1 + \delta Z_3; \quad Z_m = 1 + \frac{\delta m}{m}. \quad (6.73)$$

这样, 由(6.72)可得如下附加费曼规则

1) 两费米子线顶点  $i(\delta Z_2 \not{p} - \delta m)$

2) 两光子线顶点  $i\delta Z_3(g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu)$

3) 费米子光子耦合顶点  $-i\gamma^\mu \delta e$

这样，二阶近似下费米子传播子为

$$\text{Diagram with a solid black circle} = \text{Diagram with a straight line} + \frac{\text{Diagram with a wavy loop}}{-i\Sigma(p)} + \frac{\text{Diagram with a crossed loop}}{i(\delta Z_2 \not{p} - \delta m)}$$

$$iS_f(p) = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i}{\not{P} - m} [-i\Sigma(p)] \frac{i}{\not{p} - m} [i\delta Z_2 - \delta m] \frac{i}{\not{p} - m} \quad (6.74)$$

类似可以写出二阶近似下光子的传播子，和精确到此领头阶时的三点电磁正规顶角。

由(6.56)和(6.64)知准确到次领头接有

$$Z_1 = Z_2 \quad (6.75)$$

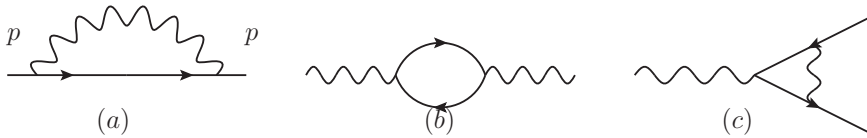
事实上，由Ward恒等式，(6.75)式对围绕论的任意阶都成立。

由(6.44)，(6.45)和(6.64)定义的抵消项的重整化方案成为最小减除(MS)方案，如将极点的 $\ln 4\pi - \gamma_E$ 一并归入抵消项则称为修正的最小减除方案 (\overline{MS})

6.4 QED发散图形的一般分析

定义表观发散度(superficial degree of divergence) D 为圈积分中分子上的积分幂次减去分母上的积分动量幂次。

这样, 对电子自能, 光子真空极化, 三点电磁顶角



$$D(a) = 1; \quad D(b) = 2; \quad D(c) = 0$$

设有费曼图有 I_B 条玻色子内线, I_F 条费米子内线, E_B 条玻色子外线, E_F 条费米子外线, 和 V 个顶点。每条内线有一个四动量积分, 因此共有 $\prod_i^{I=I_B+I_F} d^4k_i$ 个积分。而每一个顶点会有一个 δ 函数, 因而最终会有 $(I_B + I_F - V + 1)$ 重动量积分量纲为 $4(I_B + I_F - V + 1)$ 。又, 费米子内线量纲为 -1 , 波色子为 -2 , 因此QED过程的表观发散度为

$$\begin{aligned} D &= 4(I_B + I_F + 1 - V) - I_F - 2I_B \\ &= 3I_F + 2I_B - 4V + 4 \end{aligned} \quad (6.76)$$

对QED过程, 每个顶点连接有两条费米子线, 而每个电子内线(费米子内线) 又连接两个顶点, 每条外线连接一个顶点。因而有

$$E_F + 2I_F = 2V \quad (6.77)$$

(因为内线会有重复, 所以为 $2I_F$)

类似地, 对波色子线有

$$E_B + 2I_B = V \quad (6.78)$$

(n 个顶点接 n 条波色子线, 但对内线重复计算了)。

由(6.76)(6.77)和(6.78)

$$D = 4 - \frac{3}{2}E_f - E_B \quad (6.79)$$

$D \geq 0$ 时是表观发散的， $D = 0$ 时为对数发散； $D = 1$ 时为线性发散； $D = 2$ 为二次发散，等。当 $D < 0$ 时也有可能发散，按照温伯格(Weinberg)定理只有当一个图及其所有子图的表观发散度均小于零时这个图所对应的过程才一定收敛。

(6.79)表明发散与外线的数目相关，随着外线的增加 D 将减小。对QED来讲可能的 $D \geq 0$ 的图只有有限多个，因而是可重整的。

当 $D \geq 0$ 时也有可能是收敛的。

对一般的量子场，表观发散度可以表示为

$$D = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_f - \sum_i dg_i \quad (6.80)$$

其中 dg_i 为 i 个顶点的耦合常数 g_i 的动量量纲。从中可以看出 $dg_i \geq 0$ 时，使得 $D \geq 0$ 的 E_B 和 E_f 的组合有限，理论可重整；而 $dg_i < 0$ 时，只要微扰足够高阶，既顶角足够多，就使得满足 $D \geq 0$ 的 E_B, E_f 组合有任意多，因而理论就无法重整。

练习：分析四费米相互作用是否可重整。

A.1 符号和约定

本文希腊字母 μ 、 ν 、 α 、 β 等表示洛伦兹指标，取值为 0、1、2、3。时空度规为

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

逆变的坐标四矢量定义为： $x^\mu = (t, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ，协变的坐标四矢量定义为： $x_\mu = (t, -\vec{x}) = g_{\mu\nu}x^\nu$ ，时空导数为，

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

Dirac矩阵 γ^μ 遵循 Bjorkin 和 Drell 约定[?],

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

量子场论简明教程：部分公式推导

其中 σ^i 为 Pauli 矩阵：

$$\begin{aligned}\sigma^1 &= \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^2 &= \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^3 &= \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.3}$$

Pauli 矩阵满足，

$$\sigma^i \sigma^j = i \varepsilon_{ijk} \sigma^k,\tag{A.4}$$

同时有如下对易和反对易关系，

$$[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma^k,\tag{A.5}$$

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = \sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta^{ij}.\tag{A.6}$$

A.2 γ 矩阵的性质

常用的与 γ 矩阵计算有关公式被罗列如下，

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = 2(\delta_{\beta}^{\rho} \delta_{\alpha}^{\sigma} - \delta_{\alpha}^{\rho} \delta_{\beta}^{\sigma})\tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}g^{\mu\mu'} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} &= g_{\nu\nu'}(g_{\rho\sigma'} g_{\sigma\rho'} - g_{\rho\rho'} g_{\sigma\sigma'}) + g_{\nu\rho'}(g_{\rho\nu'} g_{\sigma\sigma'} - g_{\rho\sigma'} g_{\sigma\nu'}) \\ &\quad + g_{\nu\sigma'}(g_{\rho\rho'} g_{\sigma\nu'} - g_{\rho\nu'} g_{\sigma\rho'})\end{aligned}\tag{A.8}$$

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \{\gamma^{\mu}, \gamma^5\} = 0$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = +\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} ?$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5$$

$$\gamma_{\mu}\gamma^{\mu} = D, \quad \gamma_{\mu}\not{p}\gamma^{\mu} = (\epsilon - 2)\not{p}$$

$$\gamma_{\mu}\not{p}\not{q}\gamma^{\mu} = 4p \cdot q - \epsilon\not{p}\not{q}$$

$$\gamma_{\mu}\not{p}\not{q}\not{k}\gamma^{\mu} = -2\not{k}\not{q}\not{p} + \epsilon\not{p}\not{q}\not{k}$$

$$\not{p}\gamma^{\mu}\not{p} = 2p^{\mu}\not{p} - \gamma^{\mu}p \cdot p$$

$$\begin{aligned}
\not{p}\gamma^\mu\not{q} + \not{q}\gamma^\mu\not{p} &= 2p^\mu\not{q} + 2q^\mu\not{p} - 2\gamma^\mu p \cdot q \\
\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda &= g_{\mu\nu}\gamma_\lambda + g_{\nu\lambda}\gamma_\mu - g_{\mu\lambda}\gamma_\nu + i\epsilon_{\sigma\mu\nu\lambda}\gamma^\sigma\gamma^5 \\
\not{p}\gamma_\mu\not{q} &= p_\mu\not{q} + q_\mu\not{p} - p \cdot q\gamma_\mu + i\epsilon_{\sigma\nu\mu\lambda}\gamma^\sigma\gamma^5 p^\nu q^\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\
[\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] &= 0, \quad \sigma_{\mu\nu}^\dagger = \sigma^{\mu\nu} \\
\gamma^\mu\gamma^\nu &= g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}, \quad \gamma^\nu\gamma^\mu = g^{\mu\nu} + i\sigma^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\sigma_{\lambda\sigma}\gamma^5$$

这里的 D 是时空的维数。

A.3 常用的求迹公式

奇数个 γ 矩阵的迹为0，其他相关的求迹公式罗列如下。

$$Tr 1 = 4, \quad Tr(\not{p}\not{q}) = 4p \cdot q, \quad (\text{A.9})$$

$$Tr(\not{p}\not{q}\not{k}\not{l}) = 4[(p \cdot q)(k \cdot l) - (p \cdot k)(q \cdot l) + (p \cdot l)(q \cdot k)], \quad (\text{A.10})$$

$$Tr\gamma^5 = 0, \quad Tr(\gamma^5\not{p}\not{q}) = 0, \quad Tr(\gamma^5\not{p}\not{q}\not{k}) = 0. \quad (\text{A.11})$$

$$Tr(\gamma^5\not{p}\not{q}\not{k}\not{l}) = 4i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}p^\mu q^\nu k^\lambda l^\sigma \quad (\text{A.12})$$

$$Tr(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_2) = 4[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1 \cdot p_2)g^{\mu\nu}] \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned}
Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\kappa\gamma^\eta) &= 4[g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}g^{\kappa\eta} - g^{\mu\nu}g^{\rho\kappa}g^{\sigma\eta} + g^{\mu\nu}g^{\rho\eta}g^{\sigma\kappa} \\
&\quad - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g^{\kappa\eta} + g^{\mu\rho}g^{\nu\kappa}g^{\sigma\eta} - g^{\mu\rho}g^{\nu\eta}g^{\kappa\sigma} \\
&\quad + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}g^{\kappa\eta} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\kappa}g^{\rho\eta} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\eta}g^{\kappa\rho} \\
&\quad - g^{\mu\kappa}g^{\nu\rho}g^{\sigma\eta} + g^{\mu\kappa}g^{\nu\sigma}g^{\rho\eta} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\eta}g^{\sigma\rho} \\
&\quad + g^{\mu\eta}g^{\nu\rho}g^{\sigma\kappa} - g^{\mu\eta}g^{\nu\sigma}g^{\rho\kappa} + g^{\mu\eta}g^{\nu\kappa}g^{\sigma\rho}]
\end{aligned}$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{p}_2] = 2\text{Tr} (\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2) + 8i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Tr} (\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2) \text{Tr} (\gamma_\mu \not{p}_3 \gamma_\nu \not{p}_4) = 3[(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)] \quad (\text{A.15})$$

$$\text{Tr} (\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \gamma^5 \not{p}_2) \text{Tr} (\gamma_\nu \not{p}_3 \gamma_\mu \gamma^5 \not{p}_4) = 3[(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)] \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} & \text{Tr} [\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{p}_2] \text{Tr} [\gamma_\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_3 \gamma_\nu (1 - \gamma^5) \not{p}_4] \\ & = 256 (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A.4 旋量公式

$$(\not{p} - m)u = 0, \quad \bar{u}(\not{p} - m) = 0$$

$$\sum u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m$$

$$\sum v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m$$

$$\bar{u}^r(p) u^s(p) = 2m \delta^{rs}$$

$$\bar{v}^r(p) v^s(p) = 2m \delta^{rs}$$

$$\begin{cases} u_L = \frac{1-\gamma^5}{2} u & \begin{cases} \bar{u}_L = \bar{u} \frac{1+\gamma^5}{2} \\ \bar{u}_R = \bar{u} \frac{1-\gamma^5}{2} \end{cases} \\ u_R = \frac{1+\gamma^5}{2} u \end{cases}$$

$$\bar{u}_L u_L = 0, \quad \bar{u}_R u_R = 0$$

A.5 标量场的三动量

将三动量定义式作对称化处理：

$$\begin{aligned}
P^i &= - \int d^3x \Pi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \int d^3x \left[\Pi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Pi \right] \\
&= -\frac{1}{2} \int d^3x \left[\Pi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\Phi \Pi) - \Phi \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right] = -\frac{1}{2} \int d^3x \left[\Pi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \Phi \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3p N_p (-i\omega_p) [a_p e^{-ip \cdot x} - a_p^+ e^{ip \cdot x}] \\
&\quad \int d^3p' N_{p'} (ip'^i) [a_{p'} e^{-ip' \cdot x} - a_{p'}^+ e^{ip' \cdot x}] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3p' N_{p'} [a_{p'} e^{-ip' \cdot x} + a_{p'}^+ e^{ip' \cdot x}] \\
&\quad \int d^3p N_p (ip^i) (-i\omega_p) [a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^+ e^{ip \cdot x}] \\
&= -\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3p d^3p' N_p N_{p'} (ip'^i) (-i\omega_p) [a_p a_{p'} e^{-i(p+p') \cdot x} - a_p^+ a_{p'} e^{i(p-p') \cdot x} \\
&\quad - a_p a_{p'}^+ e^{i(p'-p) \cdot x} + a_p^+ a_{p'}^+ e^{i(p+p') \cdot x}] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3p d^3p' N_p N_{p'} (ip^i) (-i\omega_p) [a_{p'} a_p e^{-i(p+p') \cdot x} + a_{p'}^+ a_p e^{i(p'-p) \cdot x} \\
&\quad + a_{p'} a_p^+ e^{i(p-p') \cdot x} + a_{p'}^+ a_p^+ e^{i(p+p') \cdot x}] \\
&= -\frac{1}{2} \int d^3p d^3p' N_p N_{p'} (ip'^i) (-i\omega_p) (2\pi)^3 [a_p a_{p'} e^{-i(\omega_p + \omega_{p'})t} \delta^3(p+p') \\
&\quad - a_p^+ a_{p'} e^{i(\omega_p - \omega_{p'})t} \delta^3(p-p') - a_p a_{p'}^+ e^{i(\omega_{p'} - \omega_p)t} \delta^3(p'-p) \\
&\quad + a_p^+ a_{p'}^+ e^{i(\omega_p + \omega_{p'})t} \delta^3(p+p')] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^3p d^3p' N_p N_{p'} (ip^i) (-i\omega_p) (2\pi)^3 [a_{p'} a_p e^{-i(\omega_p + \omega_{p'})t} \delta^3(p+p') \\
&\quad + a_{p'}^+ a_p e^{-i(\omega_{p'} - \omega_p)t} \delta^3(p'-p) + a_{p'} a_p^+ e^{i(\omega_p - \omega_{p'})t} \delta^3(p-p') \\
&\quad + a_{p'}^+ a_p^+ e^{i(\omega_p + \omega_{p'})t} \delta^3(p+p')] \\
&= -\frac{1}{2} \int d^3p N_p^2 (ip^i) (-i\omega_p) (2\pi)^3 [a_p a_{-p} e^{-2i\omega_p t} - a_p^+ a_p - a_p a_p^+ + a_p^+ a_{-p}^+ e^{2i\omega_p t}] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^3p N_p^2 (ip^i) (-i\omega_p) (2\pi)^3 [a_{-p} a_p e^{-2i\omega_p t} + a_p^+ a_p + a_p a_p^+ + a_{-p}^+ a_p^+ e^{2i\omega_p t}] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3p N_p^2 (p^i) \omega_p (2\pi)^3 2 [a_p^+ a_p + a_p a_p^+] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3p p^i [a_p^+ a_p + a_p a_p^+] \tag{A.18}
\end{aligned}$$

另，即便利不作对称化：

$$\begin{aligned}
 P^i &= - \int d^3x \Pi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = - \int d^3x \int d^3p N_p (-i\omega_p) [a_p e^{-ip \cdot x} - a_p^+ e^{ip \cdot x}] \\
 &\quad \int d^3p' N_{p'} (ip'^i) [a_{p'} e^{-ip' \cdot x} - a_{p'}^+ e^{ip' \cdot x}] \\
 &= - \int d^3x \int d^3p d^3p' (ip'^i) (-i\omega_p) N_p N_{p'} [a_p a_{p'} e^{-i(p+p') \cdot x} - a_p a_{p'}^+ e^{i(p-p') \cdot x} \\
 &\quad - a_p^+ a_{p'} e^{i(p-p') \cdot x} + a_p^+ a_{p'}^+ e^{i(p+p') \cdot x}] \\
 &= - \int d^3p d^3p' N_p N_{p'} (ip'^i) (-i\omega_p) (2\pi)^3 [a_p a_{p'} e^{-i(\omega_p+\omega_{p'})t} \delta^3(p+p') \\
 &\quad - a_p a_{p'}^+ e^{i(\omega_p-\omega_{p'})t} \delta^3(p-p') - a_p^+ a_{p'} e^{i(\omega_p-\omega_{p'})t} \delta^3(p-p') \\
 &\quad + a_p^+ a_{p'}^+ e^{i(\omega_p+\omega_{p'})t} \delta^3(p+p')] \\
 &= - \int d^3p N_p^2 (2\pi)^3 \omega_p [-p^i a_p a_{-p} e^{-2i\omega_p t} - p^i a_p a_p^+ \\
 &\quad - p^i a_p^+ a_p - p^i a_p^+ a_{-p}^+ e^{-2i\omega_p t}] \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3p p^i [a_p a_p^+ + a_p^+ a_p] . \tag{A.19}
 \end{aligned}$$

其中：

$$\int d^3p p^i a_p a_{-p} e^{-2i\omega_p t} = \int d^3p p^i a_p^+ a_{-p}^+ e^{2i\omega_p t} = 0 , \tag{A.20}$$

因为被积函数为奇函数。

A.6 旋量场部分公式推导

由旋量场的正交归一关系(3.153)证明如下完备性关系

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) - v(p, s) \bar{v}(p, s) = \mathbb{I} . \tag{A.21}$$

∴

$$\begin{aligned}\bar{u}(p, s) &= \sum_{r=1}^2 \delta_{rs} \bar{u}(p, r) = \sum_r \bar{u}(p, s) u(p, r) \bar{u}(p, r) \\ &= \sum_r \bar{u}(p, s) u(p, r) \bar{u}(p, r) - \sum_r \bar{u}(p, s) v(p, r) \bar{v}(p, r), \quad (\text{A.22})\end{aligned}$$

$$\bar{v}(p, s) = - \sum_r \bar{v}(p, s) v(p, r) \bar{v}(p, r) + \sum_r \bar{v}(p, s) u(p, r) \bar{u}(p, r). \quad (\text{A.23})$$

相加

$$\begin{aligned}\bar{u}(p, s) + \bar{v}(p, s) &= \sum_r (\bar{u}(p, s) + \bar{v}(p, s)) u(p, r) \bar{u}(p, r) - (\bar{u}(p, s) + \bar{v}(p, s)) v(p, r) \bar{v}(p, r) \\ \Rightarrow \sum_r u(p, r) \bar{u}(p, r) - v \bar{v}(p, r) &= \mathbf{I},\end{aligned}$$

其中 \mathbf{I} 为 4×4 单位矩阵。

