2009年12月 第25卷 第4期
纯粹数学与应用数学
Pure and Applied Mathematics
Dec. 2009 Vol.25 No.4

多值半流理论及其在三维Navier-Stokes方程中的应用

宋雪丽 [1,2]，侯延仁 [1]

(1.西安交通大学理学院, 陕西 西安 710049; 2.西安科技大学理学院, 陕西 西安 710054)

摘要：利用多值半流方法研究三维有界区域上Navier-Stokes方程的全局吸引子, 证得了多值半流的一些性质, 并将这些性质应用于三维Navier-Stokes方程, 得出了弱解的几种全局吸引子. 从而表明在三维情形, 通过多值半流来研究Navier-Stokes方程的全局吸引子是可行的.

关键词：Navier-Stokes方程; 多值半流; 吸引子

中图分类号：O175.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-5513(2009)04-0737-06

1 引言

Banach空间中的非线性算子半群理论是研究无穷维动力系统的定性行为的重要的数学工具. 应用这种理论, 在过去几年中, 得到了关于发展微分方程的吸引子的许多结论[1-2]. 然而, 这种理论不能应用到解不唯一的一类初-边值问题, 例如三维Navier-Stokes方程. 为了对诸如这类的微分方程系统进行定性分析, 将一般的半群理论拓展到多值半群理论是非常必要的. 为此, 产生了多值动力系统理论.

目前, 多值动力系统理论已经被应用到一些发展方程中去[3-4]. 1998年, Melnik[3]定义了多值半流理论, 并将其应用到某类微分包含动力系统中, 这类动力系统当初值给定时解不唯一. 二维Navier-Stokes方程的全局吸引子的存在性无论是在有界还是无界区域上、自治还是非自治情形都已经得到解决[5-6]. 近几年, 有一些关于三维Navier-Stokes方程的弱解的渐进行为的研究[7-10]. 三维情形有两个困难需要克服, 一方面, 尚不清楚三维Navier-Stokes方程的弱解是否唯一; 另一方面, 也是主要问题, 即缺乏弱解关于时间的连续性, 直至现在, 只证明了弱解在相空间的弱拓扑下关于时间连续.

本文介绍了多值半流的基本概念, 更进一步地讨论了多值半流的一些具体性质, 并利用这些性质讨论了三维有界区域上自治Navier-Stokes方程的几个全局吸引子.

2 多值半流的基本概念

设X是一个完备的度量空间. $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $P(X), \beta(X), C(X)$分别表示X的所有非空、非空有界、非空闭集.

收稿日期：2008-03-31.

基金项目：国家自然科学基金(10871156).

作者简介：宋雪丽(1979-), 博士生, 讲师, 研究方向：无穷维动力系统.

定义 2.1[3] 映射$G:\mathbb{R}^+\times X\to P(X)$称为是一个多值半流, 若下列条件成立:

(1) $G(0,\cdot)=I$是恒等映射;

(2) $G(t_1+t_2,x)\subset G(t_1,G(t_2,x)),\forall x\in X,\forall t_1,t_2\in\mathbb{R}^+$.

记$G(t,B)=\cup_{x\in B}G(t,x)$, $B\subset X$. 更近一步, 若$G(t_1,G(t_2,x))\subset G(t_1+t_2,x)$, 则称$G$为严格多值半流.

对每个$M\subset X$, 记$\gamma_t^+(M)=\cup_{\tau\geq t}G(\tau,M)$, $\gamma^+(M)=\gamma_0^+(M)=\cup_{\tau\geq 0}G(\tau,M)$, 对任一有界集$B\subset X$, 定义$B$的$\omega$极限集为$\omega(B)=\cap_{t\geq 0}\overline{\gamma_t^+B}=\cap_{t\geq 0}\overline{\cup_{\tau\geq t}G(\tau,B)}$.

引理 2.1[3] 集合$\omega(B)$由所有收敛序列$\{\xi_n\}$的极限组成, 这里$\xi_n\in G(t_n,B)$, $t_n\to\infty$.

定义 2.2[3] 若$t\to\infty$时, $\mathrm{dist}(G(t,B),A)\to 0$, 则称$A\subset X$吸引$B$. M称为是G的吸引集, 若M吸引X中的每个有界集B.

定义 2.3[3] 称集合A为多值半流$G(t,\cdot)$的一个全局吸引子, 若它满足下列条件:

(1) A是负-半不变集, 即$A\subset G(t,A),\forall t\in\mathbb{R}^+$;

(2) A吸引每个有界集$B\subset X$, 即$\forall B\in\beta(X)$, 有

$$\mathrm{dist}(G(t,B),A)\to 0 \tag{1}$$

当$t\to\infty$时. 这里$\mathrm{dist}(C,A)=\sup_{c\in C}\inf_{a\in A}\parallel c-a\parallel$是Hausdorff半距离.

若对所有的$t\geq 0$, $A=G(t,A)$, 则称全局吸引子A是不变的. 若对任意满足(1)式的闭集Y, 有$A\subset Y$, 则称A是最小的.

定义 2.4[3] 若对X中任一满足: 存在$T(B)\in\mathbb{R}^+$, 使得$\gamma_{T(B)}^+(B)\in\beta(X)$的有界集$B$, 任一序列$\xi_n\in G(t_n,B)$, 若当$t_n\to\infty$时, $\{\xi_n\}$在X中是预紧的, 则称$G(t,\cdot)$是渐进上半紧的.

定义 2.5 若$\forall B\in\beta(X)$, 集合$\cup_{\tau\geq 0}G(\tau,B)$有界, 则称多值半流$G$是一致有界的.

定义 2.6 集合$B_0\subset X$称为是G的一致吸收集, 若$\forall B\in\beta(X)$, 均存在常数$M=M(B)$, 使得当$t\geq M$时，$G(t,B)\subset B_0$.

3 多值半流的一些具体性质

本节讨论多值半流的一些性质, 这些性质将在研究三维Navier-Stokes方程的吸引子时用到.

命题 3.1 若多值半流$G(t,\cdot)$是一致有界且在X中是渐进上半紧的, 则$\forall B\in\beta(X),\omega(B)$是$X$中的非空紧集.

证明 由于$G(t,\cdot)$是一致有界的, 故$\forall B\in\beta(X)$, 存在$T(B)\in\mathbb{R}^+$(事实上可取$T(B)=0$), 使得$\gamma_{T(B)}^+(B)\in\beta(X)$. 由$G$的渐进上半紧性和引理 2.1立得$\omega(B)\neq\phi$. 则$\omega(B)$是紧集[3].

命题 3.2 假设多值半流$G(t,\cdot)$一致有界且在X中是渐进上半紧的, 则对任一有界集$B\subset X$,

$$\mathrm{dist}(G(t,B),\omega(B))\to 0,\ t\to+\infty$$

证明 反证法. 假设存在某个有界集$B\subset X$, 使当$t\to+\infty$时, $\mathrm{dist}(G(t,B),\omega(B))$不收敛于0. 则存在一个常数$\delta>0$, 序列$\{\xi_n\}$, $\xi_n\in G(t_n,B)$,$\{t_n\}\subset[0,+\infty)$,使得

$$\mathrm{dist}(\xi_n,\omega(B))\geq\delta,\ \forall n\in\mathbb{N} \tag{2}$$

另一方面, 由于$G(t,\cdot)$是一致有界的, 因此对任一有界集$B\subset X$,$\gamma^+(B)$为X中的有界集, 且由于$G(t,\cdot)$是渐进上半紧的, 因此我们可以抽取一子序列$\{\xi_{n'}\}$, 使得$\xi_{n'}\to x$, 据引理 2.1, $x\in\omega(B)$, 这与(2)式矛盾!

命题 3.3 (1) 对任意一致吸收集$B_1, B_2 \subset X$, $\omega(B_1) = \omega(B_2)$;

(2) 对任意有界集$B \subset X$和任意一致吸收集$B_1 \subset X$, $\omega(B) \subset \omega(B_1)$.

证明 (1) 假设$B_1, B_2 \subset X$是 $G(t,\cdot)$的两个一致吸收集. 根据一致吸收集的性质, 可知一定存在某个$t_2 > 0$, 使得${B_2}' = G(t_2, B_2) \subset B_1$, 因此, $\omega({B_2}') \subset \omega(B_1)$. 另一方面

$$
\begin{aligned}
\omega(B_2) &= \cap_{t\geq 0}\overline{\cup_{\tau\geq t}G(\tau, B_2)} \subset \cap_{t\geq t_2}\overline{\cup_{\tau\geq t}G(\tau, B_2)}\\
&= \cap_{l\geq 0}\overline{\cup_{\tau\geq l+t_2}G(\tau, B_2)} = \cap_{l\geq 0}\overline{\cup_{r\geq l}G(r+t_2, B_2)}\\
&\subset \cap_{l\geq 0}\overline{\cup_{r\geq l}G(r, G(t_2, B_2))} = \cap_{l\geq 0}\overline{\cup_{r\geq l}G(r, B_2')} = \omega(B_2')
\end{aligned}
$$

因此, $\omega(B_2) \subset \omega(B_1)$. 同理, 可证$\omega(B_1) \subset \omega(B_2)$.

(2) 对任意有界集$B \subset X$和任意一致吸收集$B_1 \subset X$, 一定存在某个$t_2 > 0$, 使得$G(t_2, B) \subset B_1$. 因此

$$
\begin{aligned}
\omega(B) &= \cap_{t\geq 0}\overline{\cup_{\tau\geq t}G(\tau, B)} \subset \cap_{t\geq t_2}\overline{\cup_{\tau\geq t}G(\tau, B)} = \cap_{l\geq 0}\overline{\cup_{\tau\geq l+t_2}G(\tau, B)}\\
&= \cap_{l\geq 0}\overline{\cup_{r\geq l}G(r+t_2, B)} \subset \cap_{l\geq 0}\overline{\cup_{r\geq l}G(r, G(t_2, B))}\\
&\subset \cap_{l\geq 0}\overline{\cup_{r\geq l}G(r, B_1)} = \omega(B_1)
\end{aligned}
$$

命题 3.4 假设多值半流G是渐进上半紧的, 且一致有界. $G(t,\cdot): X \to C(X)$是上半连续的, 则对任意一致吸收集B, $\omega(B)$是负半不变集, 即$\omega(B) \subset G(t, \omega(B))$, 且它吸引任意有界集$B_1 \subset X$, 即$\omega(B)$是多值半流$G$的一个全局吸引子.

证明 $\omega(B)$是负半不变集的证明可参看文[3]. 现在, 我们证明$\omega(B)$吸引任一有界集B_1. 从命题3.2推出, 对任意有界集$B_1 \subset X$, $\mathrm{dist}(G(t, B_1), \omega(B_1)) \to 0$, 当$t \to +\infty$时,又由命题3.3知, $\omega(B_1) \subset \omega(B)$, 因此$\mathrm{dist}(G(t, B_1), \omega(B)) \to 0$,当$t \to +\infty$时, 即$\omega(B)$吸引$B_1$.

引理 3.1[3] 设多值半流G是渐进上半紧的. 假设$\forall t \in \mathbb{R}^+, G(t,\cdot): X \to C(X)$是上半连续的. 若$\forall B \in \beta(X), \exists\ T(B) \in \mathbb{R}^+$, 使得$\gamma^+_{T(B)}(B) \in \beta(X)$, 则$G$具有全局吸引子$\mathbb{A} = \cup_{B\in\beta(X)}\omega(B)$.

引理 3.2[3] 设$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $G(t,\cdot): X \to C(X)$是一个上半连续映射. 若存在一个紧集$K \subset X$, 使得$\forall B \in \beta(X)$, 有$\mathrm{dist}(G(t, B), K) \to 0$, $t \to +\infty$, 则G具有全局紧吸引子$\mathbb{A} \subset K$, 且它是吸引每个$B \in \beta(X)$的最小闭集.

4 在三维Navier-Stokes方程中的应用

设$\Omega \subset \mathbb{R}^3$是一个开有界集, 具有光滑边界. 对给定的$\mu > 0$, 考虑下列Navier-Stokes方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f(x,t),\ x \in \Omega,\ t > 0\\
\mathrm{div}\ u = 0\\
u|_{\partial\Omega} = 0\\
u(x,\tau) = u_\tau(x)
\end{cases}
\tag{3}
$$

定义$\mathcal{V} = \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \mathrm{div}\ u = 0\}$, $H = cl_{(L^2(\Omega))^3}\mathcal{V}$, $V = cl_{(H_0^1(\Omega)^3)}\mathcal{V}$, 这里$cl_X$表示在空间$X$中的闭包. 众所周知, H, V均是可分的Hilbert空间, 且$V \subset H = H^* \subset V^*$, 且每个嵌入是连

续的、稠密的, H^*, V^*分别为H, V的对偶空间. 用$(\cdot,\cdot), |\cdot|$和$((\cdot,\cdot)), \|\cdot\|$ 分别表示H和V中的内积、范数. $\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$V$和$V^*$间的对偶积. 对$u, v, w \in V$, 令

$$b(u,v,w)=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \mathrm{d}x$$

则b是V上的三线性连续形式, 且$b(u,v,v)=0$, 若$u\in V, v\in (H_0^1(\Omega))^3$. 对$u,v\in V$, 定义$B(u,v)\in V^*$为$\langle B(u,v),w\rangle = b(u,v,w)$, 对所有的$w\in V$.

称函数$u\in L^\infty(\tau,T;H)\cap L^2(\tau,T;V)$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\in L^1(\tau,T;V^*)$是(3)式在$(\tau,T)$上的一个弱解, 若

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u,v)+\mu((u,v))+b(u,u,v)=\langle f,v\rangle,\ \forall v\in V \tag{4}$$

若引入线性算子$A: V\to V^*$,定义为$\langle Au,v\rangle = ((u,v))$,则(3)式可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\mu Au+B(u,u)=f \\ u(\tau)=u_\tau \end{cases} \tag{5}$$

在文[10]中, Kapustyan给出了假设条件(H)如下:

(H) 设$f\in L^2_{\mathrm{loc}}([\tau,+\infty);H)$, 假设对任意的$u_\tau\in V$, 存在一个全局定义的弱解$u(t)$, 使得对任意的$T>\tau$, 有$\|u(t)\|_{(L^4(\Omega))^3}\le F(\|u_\tau\|,\tau,T)$, 对所有的$t\in[\tau,T]$. 这里$F$是连续的, 对第一个变量是非减的, 对第二个变量是非增的. 并证明了在假设(H)和$f\in L^2_{\mathrm{loc}}([\tau,+\infty);H)$成立的前提下, (H)中给出的弱解满足

$$V_\tau(u(t))\le V_\tau(u(s)) \tag{6}$$

对所有的$t\ge s\ge\tau$, 这里

$$V_\tau(u(t))=\frac{1}{2}|u(t)|^2+\mu\int_\tau^t |\nabla u(r)|^2\mathrm{d}r-\int_\tau^t (f(r),u(r))\mathrm{d}r$$

易看出(6)式即为能量不等式.

在假设(H)下, 有下列重要结论.

定理 4.1[10] 假设(H)和$f\in L^2_{\mathrm{loc}}([\tau,+\infty),H)$.则对任意的$u_\tau\in H$, (3)式至少存在一个弱解$u(t)$, 使得

$$u(\cdot)\in C([\tau,+\infty),H) \tag{7}$$

定理4.1中(7)式说明, 若假设(H)成立且$f\in L^2_{\mathrm{loc}}([\tau,+\infty);H)$, 则存在一个关于时间连续的全局弱解. 这便克服了研究三维Navier-Stokes方程吸引子存在性的第二大困难.

现在假设f与时间t无关, $f\in H$,即自治情形, 取$\tau=0$.

为了克服三维Navier-Stokes方程弱解不唯一的问题, Kapustyan定义映射$G:\ \mathbb{R}^+\times H\to P(H)$ $G(t,u_0)=\{u(t): u(\cdot)$是全局定义的使得(6)式成立的弱解, 满足$u(0)=u_0\}$.

从定理4.1知, 对每个$(t,u_0), G(t,u_0)$值非空. 文[10]中证明了G是一个严格多值半流.下面我们试图求出多值半流G的几个吸引子.

首先, 注意到对任意的满足(6)式的弱解, 下面的估计成立[11]

$$|u(t)|^2\le \mathrm{e}^{-\nu\lambda_1 t}\Big[|u(0)|^2-\frac{1}{\nu^2\lambda_1^2}|f|^2\Big]+\frac{1}{\nu^2\lambda_1^2}|f|^2 \tag{8}$$

对所有的$t \geq 0$. 因此, 对H中任一有界集$B \subset H$, 存在$T(B)$, 使得$|u(t)|^2 \leq \frac{1}{\nu^2\lambda_1^2}|f|^2+\delta$, 对所有的$t \geq T(B)$, 这里$\delta > 0$固定. 因此, 集合

$$B_0=\left\{u \in H: |u(t)| \leq \sqrt{\frac{1}{\nu^2\lambda_1^2}|f|^2+\delta}\right\}$$

是G的一个吸收集. 根据定义2.6,易证B_0是G的一个一致吸收集.

从(8)式可看出, 对任意有界集$B \subset H$, 集合$\cup_{t\geq 0}G(t,B)$有界. 因此, G是一致有界的.

引理 4.1[3] 设当$t>0$时, 映射$G(t,\cdot): X \to P(X)$是紧的, 即$\forall B \in \beta(X), G(t,B)$在$X$中是预紧的. 则$G$是渐进上半紧的.

命题 4.1 多值半流G是渐进上半紧的.

证明 由文[10]中引理14知, 当$t>0$时, $G(t,\cdot)$是紧的. 又由引理4.1, 可证G是渐进上半紧的.

定理 4.2 $\omega(B_0)$是多值半流G的一个紧全局吸引子.

证明 因G是一致有界的, 且由命题4.1知, G是渐进上半紧的, 又由文[10]中推论13知, 当$t \geq 0$时, $G(t,\cdot)$是上半连续的. 故根据命题3.4和命题3.1可知, $\omega(B_0)$是G的一个紧全局吸引子.

因此, 我们可写出一个紧全局吸引子$\mathbb{A}_0$的一般形式如下

$$\mathbb{A}_0=\omega(B_0)=\cap_{t\geq 0}\overline{\cup_{\tau\geq t}G(\tau,B_0)}=\cap_{t\geq 0}\overline{\cup_{\tau\geq t}\cup_{x\in B_0}G(\tau,x)}$$

定理 4.3 多值半流G具有全局吸引子$\mathbb{A}_1=\cup_{B\in\beta(H)}\omega(B)$.

证明 由引理3.1, 命题3.3(1),(2)易推出: $\mathbb{A}_1=\cup_{B\in\beta(H)}\omega(B)=\omega(B_0)$.

定理 4.4 多值半流G具有全局紧不变吸引子$\mathbb{A}_2 \subset \omega(B_0)$, 且它是吸引每个$B \in \beta(H)$的最小闭集.

证明 应用引理3.2, 取$K=\omega(B_0)$, 即可证存在一个全局紧吸引子$\mathbb{A}_2 \subset \omega(B_0)$. 又$G$是一个严格多值半流, 故$\forall x \in H, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, 有$G(t_1+t_2,x)=G(t_1,G(t_2,x))$. 应用文[3]中注记8可证$\mathbb{A}_2=G(t,\mathbb{A}_2), \forall t \in \mathbb{R}^+$, 即$\mathbb{A}_2$是不变的.

参 考 文 献

[1] 李全国. Hodgkin-Huxley系统的渐进稳定性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2008,24(2):224-227.

[2] Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M]. New York: Springer-Verlag, 1988.

[3] Melnik V S, Valero J. On attractors of multivalued semiflow and differential inclusions[J]. Set-Valued Analysis, 1998,6:83-111.

[4] Chepyhov V V, Vishik M. Trajectory attractors for evolution equations[J]. CR Acad. Sci. Paris, 1997,321(10): 1309-1314.

[5] Rosa R. The global attractors for the 2D Navier-Stokes flow on some unbounded domains[J]. Nonlinear Analysis, 1998,32(1):71-85.

[6] Hou Y, Li K. The uniform attractors for the 2D non-autonomous Navier-Stokes flow in some unbounded domain[J]. Nonlinear Analysis, 2004,58(5):609-630.

[7] Sell G. Global attractor of the three-dimensional Navier-Stokes equations[J]. J. Dynamics Differential Equations, 1996,8:1-33.

[8] Cutland N J. Global atractors for small samples and germs of 3D Navier-Stokes equations[J]. Nonlinear Analysis, 2005,62(2):265-281.

[9] Cheskidov A, Foias C. On global attractors of the 3D Navier-Stokes equations[J]. J. Differential Equations, 2006,231(2):714-754.

[10] Kapustyan A V, Valero J. Weak and strong attractors for the 3D Navier-Stokes system[J]. Journal of Differential Equations, 2007,240(2):249-278.

[11] Ball J M. Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations[J]. J. Nonlinear Sci., 1997,7:475-502.

The theory of multi-valued semiflow and its application to three-dimensional Navier-Stokes equations

SONG Xue-li [1,2] , HOU Yan-ren [1]

(1.College of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2.College of Science, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: This paper is using the multi-valued semiflow method to study the attractor of three-dimensional Navier-Stokes equation on some bounded domains, some properties of multi-valued semiflow are obtained. Then, applying these properties to three-dimensional Navier-Stokes equations, several global attractors of weak solutions are obtained. So, it indicate that using multi-valued semiflow to study the global attractor of Navier-Stokes equation in three-dimensional case is feasible.

Keywords: Navier-Stokes equation, multi-valued semiflow, global attractor

2000MSC: 35B40, 35B41

(上接第736页)

参 考 文 献

[1] 颜贵兴. 均匀分布参数的矩估计与最大似然估计[J]. 广西师范大学学报: 自然科学版, 2001,18(2):76-79.

[2] 潘高田, 胡军峰. 小样本的均匀分布参数的区间估计和假设检验[J]. 数学的实践与认识, 2002,32(4):629-631.

[3] 陈应保, 邓昌松, 李波. 均匀分布区间中心的估计[J]. 华中师范大学学报, 2007,41(1):16-19.

[4] 陈光曙. 关于均匀分布区间长度的区间估计[J]. 纯粹数学与应用数学, 2006,22(3):349-354.

[5] 陈光曙. 样本区间长度的渐近分布[J]. 生物数学学报, 2006, 21(2):279-284.

[6] 魏宗舒. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 1983.

Interval estimate of standard deviations proportion on two uniform distribution population

ZHU Cheng-lian

(Department of Mathematics, Huaiyin Teacher's College, Huaian 223300, China)

Abstract: For two uniform distribution $U[a_1, b_1]$ and $U[a_2, b_2]$, estimate of standard deviations' proportion is considered and interval estimate of standard deviations' proportion is given.

Keywords: uniform distribution, standard deviation, interval estimate

2000MSC: 62F10, 62F25