能源与动力工程专业本科生课程

流体机械内流理论与计算

（计算篇）

张楚华
西安交通大学流体机械研究所
电子信箱：chzhang@mail.xjtu.edu.cn
办公电话：029-82663539

教材

教学用书：

（1）张楚华，琚亚平，流体机械内流理论与计算，机械工业出版社，2015。

参考资料：

（2）马铁犹，计算流体动力学，北京航空学院出版社，1985。

（3）刘超群，多重网格法及其在计算流体力学中的应用，清华大学出版社，1995。

（4）陶文铨，数值传热学，西安交通大学出版社，2001。

（5）CFD方法经典论文。

课程内容

第1章 绪论

第2章 张量基本概念及运算

第3章 流体机械内部三维流动的基本方程

第4章 基于两类流面的准三维流动理论

第5章 平面叶栅二维流动理论

理论篇

第6章 计算流体力学的数值方法

第7章 时间推进法在轴流压缩机中的应用

第8章 压力修正法在离心压缩机中的应用

计算篇

第6章 计算流体力学的数值方法

6.1 计算流体力学的发展简史

6.2 计算流体力学的基本过程

6.3 区域离散方法

6.4 有限差分法

6.5 有限体积法

6.6 非定常项的离散格式

6.7 代数方程组求解方法

6.8 对流扩散方程的编程算例

本书内容介绍

每章名称	重点与难点
第1章 绪论	流体机械内流的五个特点及研究方法
第2章 张量基本概念及运算	$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$
第3章 流体机械内部三维流动的基本方程	绝对流动与相对流动之间的五个关系
第4章 基于两类流面的准三维流动理论	准三维反问题的流线曲率法
第5章 平面叶栅二维流动理论	特征分析与定解条件
第6章 计算流体力学的数值方法	对流扩散方程的有限体积法
第7章 时间推进法及应用	Jameson的Runge-Kutta时间推进法
第8章 全速度压力修正法及应用	非结构化网格上的全速度压力修正法

计算流体力学的基本概念

（1）定义：计算流体力学是在计算机上，利用数值方法求解流动控制方程组，从而获得流场近似数值解的方法，简称CFD。

（2）涉及知识：流体力学、数学物理方程、**数值方法**和计算机科学。

（3）作用：认识和控制流动的重要手段，先进流体机械研发过程越来越依赖于CFD。

（4）本章重点：**对流扩散方程的有限体积法**。

6.1 计算流体力学的发展简史

（1）二十世纪初：CFD的雏形，Laplace方程、Poisson方程的有限差分格式设计与理论分析。

（2）1950s：CFD的诞生，计算机的出现和超跨音速燃气涡轮发动机的研制，为CFD提出重大需求，典型成果有两个：

- Von Neumann的时间推进法及激波捕捉法；
- Hamrick的流线曲率法。

（3）1970s：CFD算法快速发展，开始用于工业实践，典型成果有三个：

- Murman提出的小扰动势函数方程的型式相关方法；
- Euler方程的时间推进法；
- Patankar的SIMPLE算法。

6.1 计算流体力学的发展简史

（4）1980s：微机的出现极大普及了CFD的研究范围，主要围绕粘性流动和激波的高效高精度格式，典型成果有三个：

- Jameson的显式Runge-Kutta法；
- Rhie和Chow的同位网格SIMPLE算法；

目前CFD的主流方法

- Steger和Warming的迎风型通量分裂算法。

（5）1990s：商业计算流体力学软件、先进的湍流模拟方法、非定常流动计算方法的出现与应用，典型成果有：

- CFD软件：Phoenics, Fluent, CFX, Numeca; Ansys, Nastran, Cosmos；
- 湍流模型：S-A模型，k-ε模型，k-ω模型；
- 非定常格式：Jameson的双重时间步法、He L的非线性谐波法。

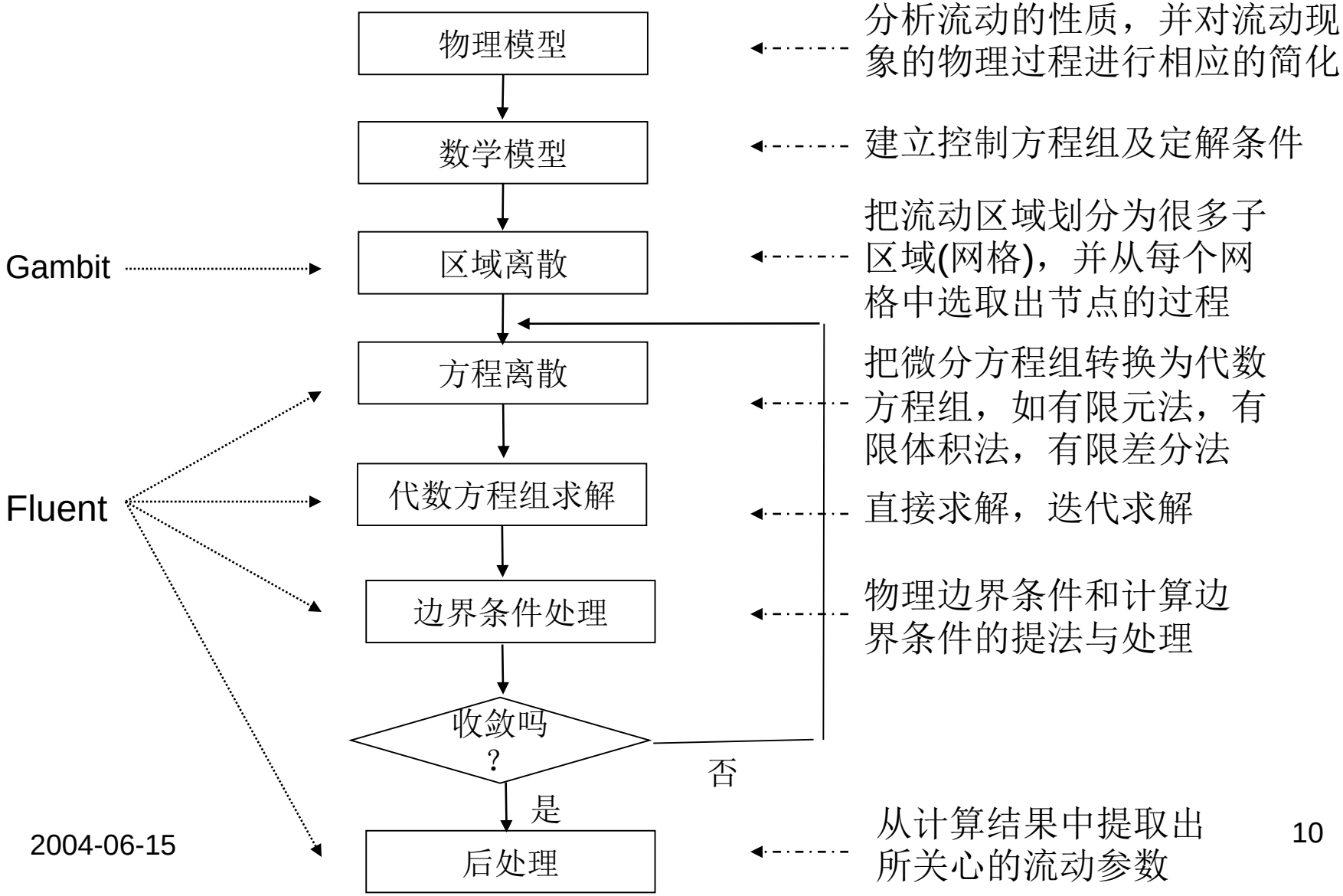
（6）本世纪：并行CFD已成事实，量子CFD值得期待。

6.2 计算流体力学的基本过程

计算流体力学的基本思想：

把空间时间上连续分布（无穷点）的流动物理量用一系列有限个离散点（节点）上的值来表示，并利用数值方法建立起这些节点上的变量值之间的代数方程组，从而得到所求解变量的近似值。

6.2 计算流体力学的基本过程



6.3 区域离散方法

1. 区域离散：将流动区域划分为网格，并从网格中选取节点的过程。
2. 网格分类：

   结构化网格：四边形，六面体；

   非结构化网格：三边形，四面体，棱柱体等。
3. 网格的要素：顶点，节点，控制体积，控制界面。

   顶点：网格的角点；

   节点：未知变量Φ存放的位置；

   外节点法：未知变量位于网格角点；

   内节点法：未知变量位于网格中心。

   控制体积：用来离散流动控制方程的有限几何体；

   控制界面：控制体积之间的分界面。

4. 网格标记方法

二维标记方法

方法1	方法2
P	i，j
E	i＋1，j
W	i－1，j
N	i，j＋1
S	i，j－1
e	i＋1/2，j
w	i－1/2，j
n	i，j＋1/2
s	i，j－1/2

一维标记方法

方法1	方法2
P	i
E	i＋1
W	i－1
e	i＋1/2
w	i－1/2

$$\delta x_e = |PE|$$

$$\delta x_w = |PW|$$

$$\Delta x_P = |we|$$

例1. 将[0，1]区间5等分，分别利用内节点法与外节点法确定各节点的坐标。

解：内节点法的各点坐标：

序号	1	2	3	4	5	6	7
坐标	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0

外节点法的各点坐标：

序号	1	2	3	4	5	6
坐标	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0

例2. 利用代数方法对Laval喷管进行网格划分，其中上、下壁面分别为y＝f(x)和y=g(x)，在水平方向和竖直方向上均匀分成I，J等分。利用外节点法确定各节点坐标。

解：

$$x_{i,j} = x_1 + (x_I - x_1)\frac{i-1}{I}$$

$$y_{i,j} = g(x_{i,j}) + (f(x_{i,j}) - g(x_{i,j}))\frac{j-1}{J}$$

$$i = 1 \text{ to } I+1,\ j = 1 \text{ to } J+1$$

第6章 计算流体力学的数值方法

6.1 计算流体力学的发展简史

6.2 计算流体力学的基本过程

6.3 区域离散方法

6.4 有限差分法

6.5 有限体积法

6.6 非定常项的离散格式

6.7 代数方程组求解方法

6.8 对流扩散方程的编程算例

6.4.1 Taylor展开式与有限差分

任意阶光滑函数$f(x)$在x_0附近可展开为Tayler级数形式：

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}f^{''}(x_0)\Delta x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)\Delta x^3$$

$$+.....+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n+O(\Delta x^{n+1})$$

$$f(x_0+2\Delta x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)2\Delta x+\frac{2^2}{2!}f^{''}(x_0)\Delta x^2+\frac{2^3}{3!}f^{(3)}(x_0)\Delta x^3$$

$$+.....+\frac{2^n}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n+O(\Delta x^{n+1})$$

$$f(x_0-\Delta x)=f(x_0)-f^{'}(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f^{''}(x_0)\Delta x^2-\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)\Delta x^3$$

$$+.....+\frac{(-1)^m}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n+O(\Delta x^{n+1})$$

6.4.1 Taylor展开式与有限差分

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-\frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x+\ldots\ldots=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+O(\Delta x^1)$$

上式右端第一项为一阶导数的有限差分，其逼近一阶导数的精度，或者差分格式的精度为一阶，这种格式叫做一阶导数的一阶前向差分。

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+O(\Delta x^1),$$ 一阶导数的一阶前向差分

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}+O(\Delta x^1),$$ 一阶导数的一阶后向差分

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}+O(\Delta x^2),$$ 一阶导数的二阶中心差分

6.4.1 Taylor展开式与有限差分

二阶导数的有限差分：

$$f''(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2)$$ 二阶导数的二阶中心差分

同样可以得到其它格式，见下个练习。

练习1：证明下列差分格式具有2阶精度：

$$f'(x_0)=\frac{3f(x_0)-4f(x_0-\Delta x)+f(x_0-2\Delta x)}{2\Delta x}+O(\Delta x^2)$$ 一阶导数的二阶后向差分

6.4.2 对流扩散方程的有限差分法

有限差分法的基本思想：将微分方程中的各项导数用相应的有限差分表示，并忽略高阶小量，从而得到有限差分方程。

例：利用有限差分法离散一维非定常对流－扩散方程：

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t}+\frac{\partial \rho u \Phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

假设ρ，u，Γ为常数，非定常项用一阶显式前向差分，对流项用一阶后向差分，扩散项用二阶中心差分来离散。

解：对流－扩散方程可写成如下非守恒形式:

$$\rho\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\rho u\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\Gamma\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

在同一节点(i，n)处，写出微分方程中的各阶导数项用的相应的有限差分为：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|(i,n)=\frac{\Phi(i,n+1)-\Phi(i,n)}{\Delta t}+O(\Delta t^1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|(i,n)=\frac{\Phi(i,n)-\Phi(i-1,n)}{\Delta x}+O(\Delta x^1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\Big|(i,n)=\frac{\Phi(i+1,n)-2\Phi(i,n)+\Phi(i-1,n)}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2)$$

代入原方程得：

$$\rho\frac{\Phi(i,n+1)-\Phi(i,n)}{\Delta t}+O(\Delta t^1)+\rho u\frac{\Phi(i,n)-\Phi(i-1,n)}{\Delta x}+O(\Delta x^1)$$

$$=\Gamma\frac{\Phi(i+1,n)-2\Phi(i,n)+\Phi(i-1,n)}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2)$$

忽略高阶小量，并利用Φ_i^{n+1}代替 $\Phi(i,n+1)$，得到有限差分方程：

$$\rho\frac{\Phi_i^{n+1}-\Phi_i^n}{\Delta t}+\rho u\frac{\Phi_i^n-\Phi_{i-1}^n}{\Delta x}=\Gamma\frac{\Phi_{i+1}^n-2\Phi_i^n+\Phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

有限差分法的几点讨论：

（1）方程（6-28）与方程（6-29）尽管形式相似，但有本质区别：前者是微分方程的等价形式，后者是代数方程。

（2）有限差分方程（6-29）具有一阶时间精度，一阶空间精度。

（3）显式格式与隐式格式的区别：前者不需求解代数方程组，后者需求解代数方程组，但方程个数与变量个数相等。

（4）有限差分法计算整场数值解的步骤。

（5）有限差分格式和格式模板的关系：格式精度越高，模板长度越大。

6.4.3 有限差分方程的数学特性

误差由下列因素引起的：

（1）网格划分（网格质量，网格数量），由区域离散引起

（2）差分格式和边界条件（格式精度），由方程离散引起

（3）舍入误差（不完全迭代，计算机字长），由代数方程组求解引起。

6.4.3 有限差分方程的数学特性

问题：设微分方程$L(\Phi)=0$的精确解为 $\Phi(i,n)$，

差分方程$L_h(\Phi)=0$的精确解为 Φ_i^n

差分方程$L_h(\Phi)=0$的数值解解为$\hat{\Phi}_i^n$

求：$\Phi(i,n)-\hat{\Phi}_i^n=$？或者当$h\to 0$时，$\Phi(i,n)-\hat{\Phi}_i^n\to 0$是否成立？

相容性分析 $\lim\limits_{h\to 0}\left\|\underbrace{L(\Phi_i^n)-L_h(\Phi_i^n)}_{\text{截断误差}}\right\|=0$

$$\Phi(i,n)-\hat{\Phi}_i^n=\underbrace{(\Phi(i,n)-\Phi_i^n)}_{\text{离散误差}}+\underbrace{(\Phi_i^n-\hat{\Phi}_i^n)}_{\text{舍入误差}}$$

稳定性分析 $\varepsilon_i^n=\underbrace{\Phi_i^n-\hat{\Phi}_i^n}_{\text{舍入误差}}$ $\quad\left\|\varepsilon_i^{n+1}\right\|\le\left\|\varepsilon_i^n\right\|$

收敛性分析 $\lim\limits_{h\to 0}\left\|\underbrace{\Phi(i,n)-\Phi_i^n}_{\text{离散误差}}\right\|=0$

Lax等价定理：对于线性的微分方程的初值问题，如差分方程是相容的，则收敛性的充要条件是稳定性。

6.4.3 有限差分方程的数学特性

约翰·冯·诺依曼，1903.12~1957.2，美籍匈裔人，20世纪最重要的数学家之一、计算机之父、博弈论之父。1933年任普林斯顿高级研究院六教授之一，曾任原子弹顾问、导弹顾问委员会主席。研究过湍流、激波、数值方法及其稳定性。

Peter LAX，1926.5~，美国匈裔数学家，1941年底随家人逃到美国，1972-1980任Courant研究所所长，1987年获 Wolf奖。主要研究双曲型偏微分方程、数值方法、泛函分析以及流体力学，提出Lax-Wendroff差分格式、Lax等价性定理。

第6章 计算流体力学的数值方法

6.1 计算流体力学的发展简史

6.2 计算流体力学的基本过程

6.3 区域离散方法

6.4 有限差分法

6.5 有限体积法

6.6 非定常项的离散格式

6.7 代数方程组求解方法

6.8 对流扩散方程的编程算例

6.5.1 有限体积法的基本步骤

(1) 积分：将守恒型控制方程在任意一个有限控制体积及时间间隔内积分；

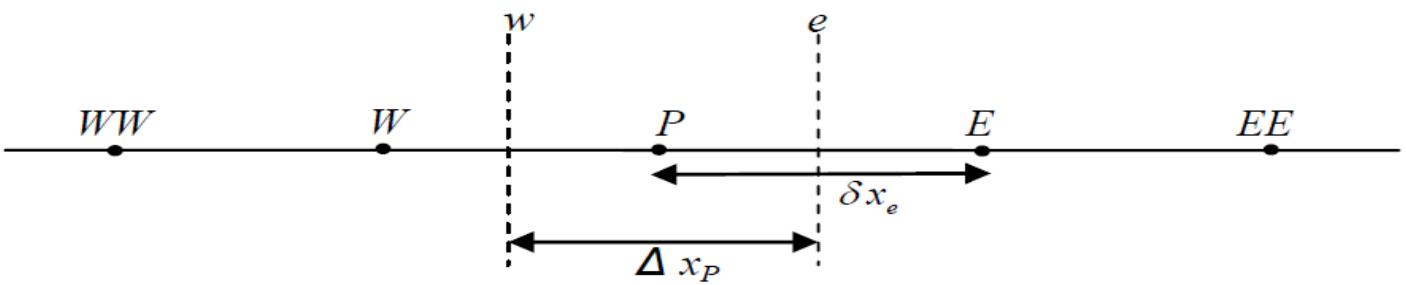
(2) 选型：选定Φ及其导数 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ 对时间及空间坐标的分布曲线，从而确定界面上的变量值和导数值；

(3) 整理：整理离散方程组，形成代数方程组。

例6-6. 利用有限体积法，推导一维非定常的对流—扩散方程的离散形式：

$$\frac{\partial \rho\Phi}{\partial t}+\frac{\partial \rho u\Phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}+S$$

解:（1）积分,取有限控制体为P,积分区域为[w, e]×[t, t+Δt]。



$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\left(\frac{\partial \rho\Phi}{\partial t}+\frac{\partial \rho u\Phi}{\partial x}\right)dxdt=\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\left(\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)dxdt+\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e Sdxdt$$

利用积分公式，上式可写成：

$$\int_w^e(\rho^{t+\Delta t}\Phi^{t+\Delta t}-\rho^t\Phi^t)dx+\int_t^{t+\Delta t}\left(\rho u\Phi\big|_e-\rho u\Phi\big|_w\right)dt$$

$$=\int_t^{t+\Delta t}\left(\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_e-\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_w\right)dt+\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e Sdxdt$$

（2）选型

非定常项：Φ对x呈阶梯函数变化

$$\int_w^e (\rho^{t+\Delta t}\Phi^{t+\Delta t} - \rho^t \Phi^{t+\Delta t})dx = (\rho_P^{t+\Delta t}\Phi_P^{t+\Delta t} - \rho_P^t \Phi_P^t)\Delta x$$

对流项：Φ对时间呈隐式阶梯变化函数分布，对空间坐标呈分段线性函数分布

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\rho u \Phi\big|_e - \rho u \Phi\big|_w\right)dt = \left(\rho u \Phi\Big|_e^{t+\Delta t} - \rho u \Phi\Big|_w^{t+\Delta t}\right)\Delta t$$

$$= (\rho u\Big|_e^{t+\Delta t} \frac{(\Phi_P^{t+\Delta t} + \Phi_E^{t+\Delta t})}{2} - \rho u\Big|_w^{t+\Delta t} \frac{(\Phi_W^{t+\Delta t} + \Phi_P^{t+\Delta t})}{2})\Delta t$$

扩散项：Φ对时间呈隐式阶梯变化函数分布，对空间坐标呈分段线性函数分布

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_e - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_w\right)dt = (\Gamma_e^{t+\Delta t} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_e^{t+\Delta t} - \Gamma_w^{t+\Delta t} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_w^{t+\Delta t})\Delta t$$

$$= (\Gamma_e^{t+\Delta t} \frac{\Phi_E^{t+\Delta t} - \Phi_P^{t+\Delta t}}{\delta x_e} - \Gamma_w^{t+\Delta t} \frac{\Phi_P^{t+\Delta t} - \Phi_W^{t+\Delta t}}{\delta x_w})\Delta t$$

源项：S对时间呈显式阶梯变化函数分布，对空间坐标呈阶梯函数分布

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e S dxdt = S_P^t \Delta x \Delta t$$

将上述各项代入方程,并且两端同时除以Δt

$$(\rho_P^{t+\Delta t}\Phi_P^{t+\Delta t} - \rho_P^t \Phi_P^t)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \rho u\Big|_e^{t+\Delta t}\frac{\Phi_P^{t+\Delta t} + \Phi_E^{t+\Delta t}}{2} - \rho u\Big|_w^{t+\Delta t}\frac{\Phi_W^{t+\Delta t} + \Phi_P^{t+\Delta t}}{2}$$

$$= \Gamma_e^{t+\Delta t}\frac{\Phi_E^{t+\Delta t} - \Phi_P^{t+\Delta t}}{\delta x_e} - \Gamma_w^{t+\Delta t}\frac{\Phi_P^{t+\Delta t} - \Phi_W^{t+\Delta t}}{\delta x_w} + S_P^t \Delta x$$

（3） 整理：写成标准的有限体积法形式，得到如下代数方程（忽略掉上标t＋Δt，以下同）

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W + b$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} - \frac{\rho_e u_e}{2} = D_e - \frac{1}{2}F_e$$

$$a_W = D_w + \frac{1}{2}F_w$$

$$a_P = a_E + a_W + F_e - F_w + \rho_P\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$b = S_P\Delta x + \rho\frac{\Delta x}{\Delta t}\Phi_P^t$$

F为界面上的流量，D为扩导系数。二者之比为网格Peclet数：

$$P_\Delta = \frac{F}{D} = \frac{\rho u \delta x}{\Gamma}$$

表示对流能力与扩散能力的相对大小。在计算相邻节点对P节点的影响系数（a_E，a_W），即在选型时候需要考虑P_Δ的影响。

例： 利用有限体积法，离散二维对流—扩散方程

$$\frac{\partial \rho\Phi}{\partial t}+\frac{\partial \rho u\Phi}{\partial x}+\frac{\partial \rho v\Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial y}+S$$

其中Φ随时间呈隐式阶梯函数变化，随空间呈分段线性函数变化。

解： （1）积分：[t, t+Δt]×[w, e]×[s, n]

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial \rho\Phi}{\partial t})dxdydt$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial \rho u\Phi}{\partial x})dxdydt+\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial \rho v\Phi}{\partial y})dxdydt$$

$$=\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x})dxdydt+\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial y})dxdydt++\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n Sdxdydt$$

（2）选型：

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial \rho\Phi}{\partial t})dxdydt=\int_w^e\int_s^n\int_t^{t+\Delta t}\left(\frac{\partial \rho\Phi}{\partial t}\right)dtdydx$$

$$=\int_w^e\int_s^n(\rho\Phi-\rho^t\Phi^t)dydx=(\rho_P\Phi_P-\rho_P^t\Phi_P^t)\Delta x\Delta y$$

非定常项

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial \rho u\Phi}{\partial x}\right)dxdydt=\int_t^{t+\Delta t}\int_s^n\left(\rho u\Phi\big|_e-\rho u\Phi\big|_w\right)dydt$$

$$=\left(\rho u\Delta y\Phi\big|_e-\rho u\Delta y\Phi\big|_w\right)\Delta t=\left(F_e\frac{\Phi_P+\Phi_E}{2}-F_w\frac{\Phi_W+\Phi_P}{2}\right)\Delta t$$

x方向对流项

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial \rho v\Phi}{\partial y}\right)dxdydt=\left(F_n\frac{\Phi_P+\Phi_N}{2}-F_s\frac{\Phi_S+\Phi_P}{2}\right)\Delta t$$

y方向对流项

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)dxdydt=\int_t^{t+\Delta t}\int_s^n\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_e-\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_w\right)dydt$$

$$=\left(\frac{\Gamma_e\Delta y}{\delta x_e}(\Phi_E-\Phi_P)-\frac{\Gamma_w\Delta y}{\delta x_w}(\Phi_P-\Phi_W)\right)\Delta t$$

$$=\left(D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_e(\Phi_P-\Phi_W)\right)\Delta t$$

x方向扩散项

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n\left(\frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dxdydt=\left(D_n(\Phi_N-\Phi_P)-D_s(\Phi_P-\Phi_S)\right)\Delta t$$

y方向扩散项

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n S\,dxdydt=S_P\Delta x\Delta y\Delta t$$

源项

（3）整理：有限体积法标准形式

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W + a_N\Phi_N + a_S\Phi_S + b$$

$$a_E = D_e - \frac{1}{2}F_e, \quad D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{\delta x_e}, \quad F_e = \rho u_e \Delta y$$

$$a_W = D_w + \frac{1}{2}F_w, \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{\delta x_w}, \quad F_w = \rho u_w \Delta y$$

$$a_N = D_n - \frac{1}{2}F_n, \quad D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{\delta y_n}, \quad F_n = \rho v_n \Delta x$$

$$a_S = D_s + \frac{1}{2}F_s, \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{\delta y_s}, \quad F_s = \rho v_s \Delta x$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + (F_e - F_w + F_n - F_s) + \frac{\rho_P \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$b = S_P^t \Delta x \Delta y + \frac{\rho_P^t \Delta x \Delta y}{\Delta t}\Phi_P^t$$

6.5.2 对流扩散方程的基本离散格式

- 讨论的对象：定常无源项的一维对流扩散方程的各种离散格式，该方程既具备一般对流扩散方程的基本性质，又具有解析解，便于数值解与精确解比较。

- 问题：

$$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx} \qquad x\in(0,L)$$

边界条件 $\Phi(0)=\Phi_0,\Phi(L)=\Phi_L$

ρ，u，Γ为常数，求Φ＝？

解：对自变量x与求解变量Φ做如下变换：

$$\begin{cases}\tilde{x} = x / L \\ \tilde{\Phi} = \dfrac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_L - \Phi_0}\end{cases}$$

其反变换为：

$$\begin{cases}x = \tilde{x} L \\ \Phi = \Phi_0 + \tilde{\Phi}(\Phi_L - \Phi_0)\end{cases}$$

则原问题的无量纲形式为：

$$\frac{d^2\tilde{\Phi}}{d\tilde{x}^2} = \mathrm{Pe}\frac{d\tilde{\Phi}}{d\tilde{x}} \quad \tilde{x} \in (0,1) \qquad B.C. \begin{cases}\tilde{\Phi}(0) = 0 \\ \tilde{\Phi}(1) = 1\end{cases}$$

方程的通解为：

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}) = C_1 + C_2 e^{Pe\tilde{x}}$$

问题的特解为：

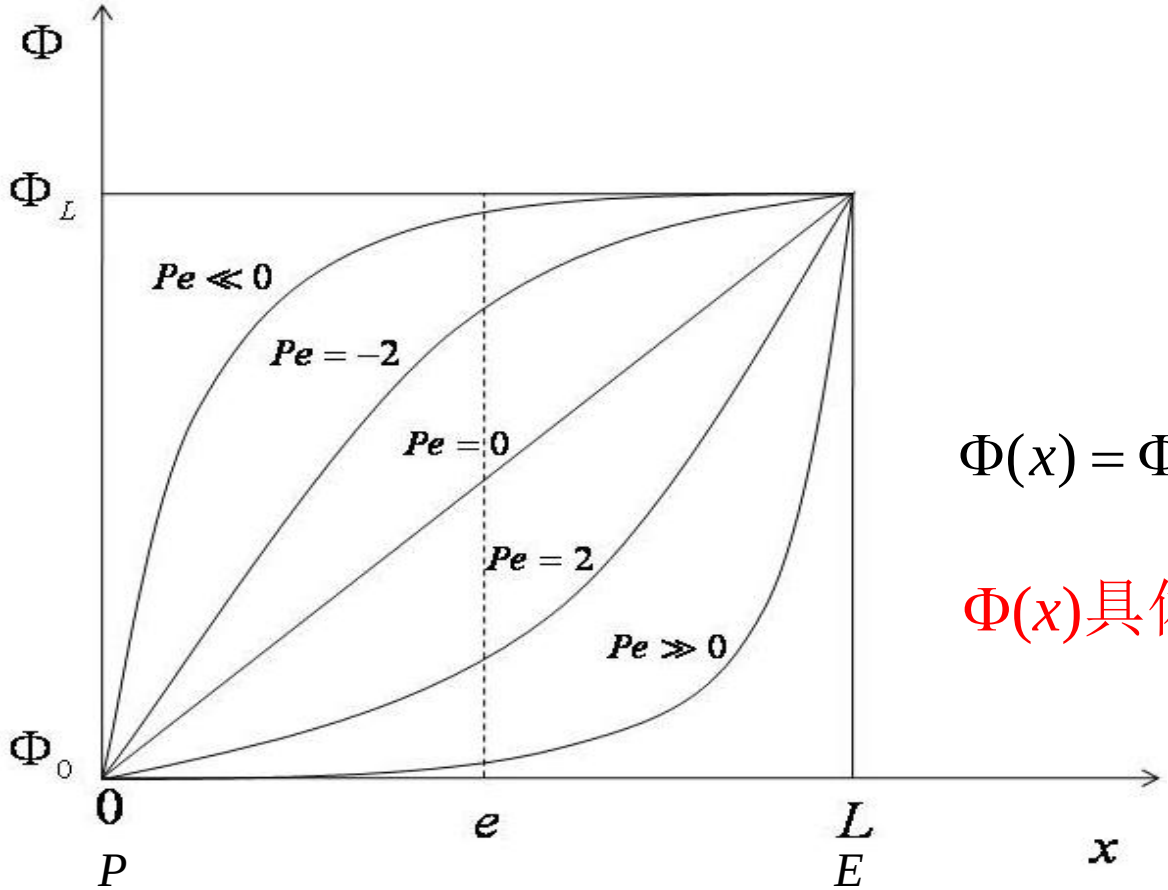
$$\tilde{\Phi} = \frac{e^{\mathrm{Pe}\tilde{x}} - 1}{e^{\mathrm{Pe}} - 1}$$

原问题的解析解为：

$$\Phi(x) = \Phi_0 + (\Phi_L - \Phi_0)\frac{e^{\mathrm{Pe}x/L} - 1}{e^{\mathrm{Pe}} - 1}$$

$$Pe = \frac{\rho u L}{\Gamma}$$

其为指数函数



$$\Phi(x)=\Phi_0+(\Phi_L-\Phi_0)\frac{e^{\mathrm{Pe}x/L}-1}{e^{\mathrm{Pe}}-1}$$

$\Phi(x)$具体分布与Pe有关 !!!

$$Pe=\frac{\rho uL}{\Gamma}$$

几种特例：

（1）当$Pe=0$时，退化为线性分布，中心格式足够精确；

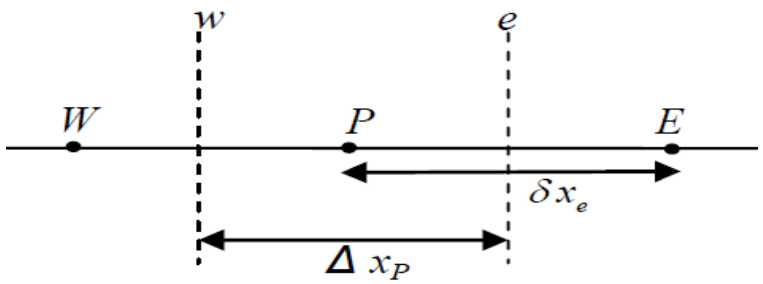
（2）当ABS(Pe)=∞时，退化为边界层分布，迎风格式适合；

（3）当Pe取其它值时，介于上述二者之间，为指数分布。

1. 中心格式

选型：规定界面上的变量值与界面上的导数值均按分段线性函数确定

$$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx}$$



(1) 积分：$\int_w^e \frac{d\rho u\Phi}{dx}dx=\int_w^e \frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx}dx$

$$\rho u\Phi\big|_e-\rho u\Phi\big|_w=\Gamma\frac{d\Phi}{dx}\Big|_e-\Gamma\frac{d\Phi}{dx}\Big|_w$$

(2) 选型：$F_e\frac{\Phi_P+\Phi_E}{2}-F_w\frac{\Phi_W+\Phi_P}{2}=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$

(3) 整理：$a_P\Phi_P=a_E\Phi_E+a_W\Phi_W$

$$a_E=D_e-\frac{1}{2}F_e,a_W=D_w+\frac{1}{2}F_w$$

$$a_P=a_E+a_W+(F_e-F_w)$$

例. $\dfrac{d\rho u\Phi}{dx}=\dfrac{d}{dx}\Gamma\dfrac{d\Phi}{dx},\quad x\in(0,1)$

$\Phi(0)=100,\quad \Phi(1)=200$

$\rho=1,\ u=2,\ \Gamma=1$

采用内节点法对(0,1)二等分，采用中心格式求Φ_2和Φ_3，

并与精确解比较。

解：$F_e\Phi_e-F_w\Phi_w=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$

对于节点2:

$$F_e\frac{\Phi_P+\Phi_E}{2}-F_w\Phi_W=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$$

$$a_E=D_e-\frac{1}{2}F_e=1,a_W=D_w+F_w=6,a_P=a_E+a_W+(F_e-F_w)=7$$

$$7\Phi_2=\Phi_3+600$$

对于节点3:

$$F_e\Phi_E - F_w\frac{\Phi_W+\Phi_P}{2} = D_e(\Phi_E-\Phi_P) - D_w(\Phi_P-\Phi_W)$$

$$a_E = D_e - F_e = 2,\ a_W = D_w + \frac{1}{2}F_w = 3,\ a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) = 5$$

$$5\Phi_3 = 3\Phi_2 + 400$$

联立方程 $\begin{cases} 7\Phi_2 = \Phi_3 + 600 \\ 5\Phi_3 = 3\Phi_2 + 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_2 = 106.25 \\ \Phi_3 = 143.75 \end{cases}$

精确解：$\Phi(x) = 100 + (200-100)\times\dfrac{e^{Pex/L}-1}{e^{Pe}-1} = 100 + 100\times\dfrac{e^{2x}-1}{e^2-1}$

$\Phi(0.25) = 110.15,\qquad \Phi(0.75) = 154.50$

误差分析

	Φ_2	Φ_3
中心格式	106.25	143.75
精确解	110.15	154.50
相对误差	3.1%	7.0%

作业 $$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx},x\in(0,1)$$

$$\Phi(0)=10,\Phi(1)=20$$

$$\rho=1,u=2,\Gamma=1$$

采用内节点法对(0,1)三等分，采用中心格式求Φ_2，Φ_3，Φ_4，并与精确解比较。

中心格式的条件稳定性：

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W$$

$$a_E = D_e - \frac{1}{2}F_e, a_W = D_w + \frac{1}{2}F_w$$

$$a_P = a_E + a_W + F_e - F_w$$

对于均匀网格，且ρ，u,Γ为常数：

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} = \frac{\Gamma}{\delta x} = \frac{\Gamma_w}{\delta x_w} = D_w = D$$

$$F_e = \rho u = F_w = F$$

$$P_\Delta = \frac{F}{D} = \frac{\rho u \delta x}{\Gamma}$$

$$a_E = D(1 - \frac{1}{2}P_\Delta), \quad a_W = D(1 + \frac{1}{2}P_\Delta), \quad a_P = 2D$$

$$\Phi_P = \frac{(1 - P_\Delta/2)\Phi_E + (1 + P_\Delta/2)\Phi_W}{2}$$

举例: Φ_W＝100, Φ_E＝200,

P_Δ	中心格式Φ_P	精确解Φ_P
0	150	150
1	125	126.9
2	100	111.9
4	50	101.8

分析：对于P_Δ＝4，Φ_P＝50，这在物理上是不合理，因为对于一个定常无源项的对流扩散问题，Φ_P必须介于Φ_W和 Φ_E,

原因：当$|P_\Delta|>2$，a_W或a_E小于0

结论：中心格式只能适合于$|P\Delta|<=2$

2. 迎风格式

界面上的变量值取上游节点处的变量值（阶梯变化函数）

界面上的导数值均按分段线性函数确定

$$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx}$$

$$F_e\Phi_e-F_w\Phi_w=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$$

$$\Phi_e=\begin{cases}\Phi_P & 当F_e\geq 0\\ \Phi_E & 当F_e<0\end{cases}\qquad \Phi_w=\begin{cases}\Phi_W & 当F_w\geq 0\\ \Phi_P & 当F_w<0\end{cases}$$

$$F_e\Phi_e=\Phi_P[|F_e,0|]-\Phi_E[|-F_e,0|]$$

$$F_w\Phi_w=\Phi_W[|F_w,0|]-\Phi_P[|-F_w,0|]$$

$$\Phi_P[|F_e,0|]-\Phi_E[|-F_e,0|]-\Phi_W[|F_w,0|]+\Phi_P[|-F_w,0|]$$

$$=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$$

整理为：$a_P\Phi_P=a_E\Phi_E+a_W\Phi_W$

$$a_E=D_e+[|-F_e,0|],\qquad a_W=D_w+[|F_w,0|],$$

$$a_P=a_E+a_W+F_e-F_w$$

特点：

1.对于任意的P_Δ，a_E，a_W均大于0；

2.精度为1阶。

中心格式具有2阶精度的说明：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_P = \frac{1}{\Delta x}\int_w^e \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx = \frac{1}{\Delta x}(\Phi_e - \Phi_w)$$

$$= \frac{1}{\Delta x}(\frac{1}{2}(\Phi_P + \Phi_E) - \frac{1}{2}(\Phi_W + \Phi_P)) = \frac{1}{2\Delta x}(\Phi_E - \Phi_W) = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\Big|_i = \frac{1}{\Delta x}\int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx = \frac{1}{\Delta x}(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_e - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_w)$$

$$= \frac{1}{\Delta x}(\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta x_e} - \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta x_w}) = \frac{\Phi_E - 2\Phi_P + \Phi_W}{\Delta x^2} = \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

假设均匀网格$\Delta x = \delta x_e = \delta x_w$

迎分格式具有1阶精度的说明：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_i = \frac{1}{\Delta x}\int_w^e \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx = \frac{1}{\Delta x}(\Phi_e - \Phi_w) = \frac{1}{\Delta x}(\Phi_P - \Phi_W) = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x}$$

假设$u \geq 0$

例 $$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx},x\in(0,1)$$

$$\Phi(0)=100,\Phi(1)=200$$

$$\rho=1,u=2,\Gamma=1$$

采用内节点法对(0,1)二等分，利用迎分格式求Φ_2和Φ_3，并与中心格式和精确解比较

解：$$F_e\Phi_e-F_w\Phi_w=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$$

对于节点2:

$$F_e\Phi_P-F_w\Phi_W=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$$

$$a_E=D_e=2,a_W=D_w+F_w=4+2=6,a_P=8$$

$$8\Phi_2=2\Phi_3+600$$

对于节点3:

$$F_e\Phi_E - F_w\Phi_W = D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W)$$

$$a_E = D_e - F_e = 4 - 2 = 2, \quad a_W = D_w + F_w = 2 + 2 = 4, \quad a_P = 6$$

$$6\Phi_3 = 4\Phi_2 + 400$$

联立方程$\begin{cases} 8\Phi_3 = 2\Phi_2 + 600 \\ 6\Phi_3 = 4\Phi_2 + 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_2 = 110 \\ \Phi_3 = 140 \end{cases}$

	Φ_2	Φ_3
精确解	110.15	154.50
中心格式计算值	106.25	143.75
相对误差	3.1%	7.0%
迎风格式计算值	110	140
相对误差	0.136%	9.39%

作业 $$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx},x\in(0,1)$$

$$\Phi(0)=10,\Phi(1)=20$$

$$\rho=1,u=2,\Gamma=1$$

采用内节点法对(0,1)三等分，采用一阶迎风格式求Φ_2，Φ_3，Φ_4，并与精确解比较。

3.混合格式：综合了中心格式和迎风格式的优点。

$$a_E / D_e = \begin{cases} 0, & 当 P_\Delta > 2 \\ 1 - \frac{1}{2} P_{\Delta e}, & 当 -2 \le P_\Delta \le 2 \\ -P_{\Delta e}, & 当 P_\Delta < -2 \end{cases}$$

写成紧凑形式：

$$a_E / D_e = \left[\left| -P_{\Delta e},\ 1 - \frac{1}{2} P_{\Delta e},\ 0 \right| \right]$$

$$a_W / D_w = \left[\left| P_{\Delta w},\ 1 + \frac{1}{2} P_{\Delta w},\ 0 \right| \right]$$

特点：

1.影响系数恒为正

2.当$|P_\Delta|>2$时，完全忽略了上游的影响，包括扩散影响

3.当$|P_\Delta|\le 2$时，等价于中心格式

4.格式精度总体为1阶

4. 指数格式

模型方程有解析解，
为什么不利用解析解计算界面上的变量值和导数值？

$$(\rho u\Phi - \Gamma\frac{d\Phi}{dx})_e = (\rho u\Phi - \Gamma\frac{d\Phi}{dx})_w$$

利用精确解

$$\Phi(x) = \Phi_0 + (\Phi_L - \Phi_0)\frac{e^{Pex/L} - 1}{e^{Pe} - 1}$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = (\Phi_L - \Phi_0)\frac{P_e}{L}\frac{e^{Pex/L}}{e^{Pe} - 1}$$

$$\rho u_e(\Phi_P + (\Phi_E - \Phi_P)\frac{e^{0.5P_{\Delta e}} - 1}{e^{P_{\Delta e}} - 1}) - \Gamma_e\frac{P_{\Delta e}}{\delta x_e}(\Phi_E - \Phi_P)\frac{e^{0.5P_{\Delta e}}}{e^{P_{\Delta e}} - 1}$$

$$= \rho u_w(\Phi_W + (\Phi_P - \Phi_W)\frac{e^{0.5P_{\Delta w}} - 1}{e^{P_{\Delta w}} - 1}) - \Gamma_w\frac{P_{\Delta w}}{\delta x_w}(\Phi_P - \Phi_W)\frac{e^{0.5P_{\Delta w}}}{e^{P_{\Delta w}} - 1}$$

整理得：

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W$$

$$a_E = \frac{F_e}{e^{P_{\Delta e}} - 1}, \quad a_W = \frac{F_w e^{P_{\Delta w}}}{e^{P_{\Delta w}} - 1},$$

$$a_P = a_W + a_W + F_e - F_w$$

特点：

1.对于模型方程，指数格式是精确的格式，但对于其它情形（如u不是常数），它也是一种近似的离散格式

2.指数运算的计算量大

5.乘方格式：由Patankar提出的，与指数格式的计算结果十分接近，但计算工作量小得多，定义为：

$$a_E / D_e = \begin{cases} -P_{\Delta e}, & 当 P_{\Delta e} < -10 \\ (1+0.1P_{\Delta e})^5 - P_{\Delta e}, & 当 -10 \le P_{\Delta e} \le 0 \\ (1-0.1P_{\Delta e})^5, & 当 0 \le P_{\Delta e} \le 10 \\ 0, & 当 P_{\Delta e} > 10 \end{cases}$$

写成紧凑形式

$$a_E / D_e = \left[\left|0,\ (1-0.1P_{\Delta e})^5\right|\right] + \left[\left|0,\ -P_{\Delta e}\right|\right]$$

5种格式的小结：

（1）每种格式均有自己的特点

（2）中心格式与迎风格式是将对流作用与扩散作用分开来考虑的，且扩散项均用分段线性选型

（3）混合格式、指数格式和乘方格式是将对流和扩散作用联合起来考虑

（4）每种格式的定义均可以用a_E/D_e给出

5种格式的a_E / D_e

中心格式	$1-\frac{1}{2}P_{\Delta e}$
迎分格式	$1+[\,\vert -P_{\Delta e},\ 0\,\vert]$
混合格式	$[\,\vert -P_{\Delta e},\ 1-\frac{1}{2}P_{\Delta e},\ 0\,\vert]$
指数格式	$\frac{P_{\Delta e}}{e^{P_{\Delta e}}-1}$
乘方格式	$[\,\vert 0,\ (1-0.1\,\vert P_{\Delta e}\,\vert)^5\,\vert]+[\,\vert 0,\ -P_{\Delta e}\,\vert]$

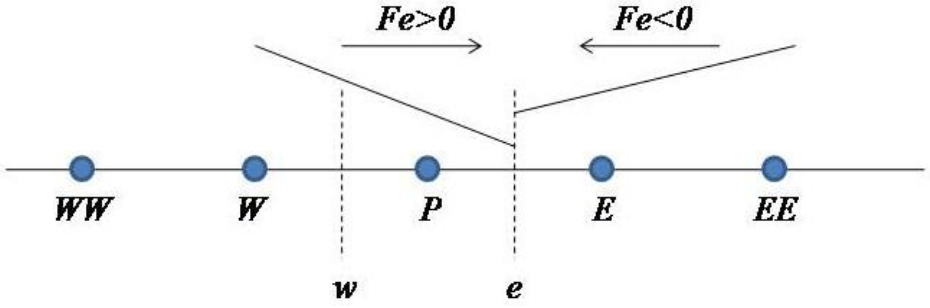
6.5.3 对流扩散方程的高阶离散格式

（6）二阶迎风格式

规定界面上的变量值采用迎风线性外推，界面上的导数值还是按照分段线性函数计算。

$$\Phi_e = \begin{cases} 1.5\Phi_P - 0.5\Phi_W & 当 F_e \geq 0 \\ 1.5\Phi_E - 0.5\Phi_{EE} & 当 F_e < 0 \end{cases}$$

$$\Phi_w = \begin{cases} 1.5\Phi_W - 0.5\Phi_{WW} & 当 F_w \geq 0 \\ 1.5\Phi_P - 0.5\Phi_E & 当 F_w < 0 \end{cases}$$



特点：

（1）五节点二阶精度格式：$a_P\Phi_P = a_{WW}\Phi_{WW} + a_W\Phi_W + a_E\Phi_E + a_{EE}\Phi_{EE}$

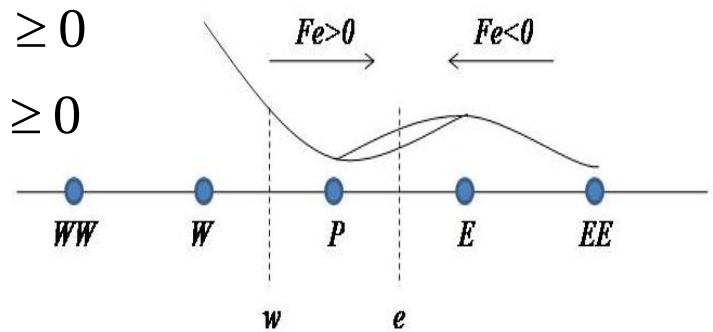
（2）绝对稳定格式：a_E, a_W 恒大于等于0

6.5.3 对流扩散方程的高阶离散格式

（7） QUICK格式（Quadratic Upwinding Interpolation of Convective Kinematics）：规定界面上对流项采用偏迎风二次插值，界面上的导数值还是按照分段线性函数计算。

$$\Phi_e = \begin{cases} 0.5(\Phi_P + \Phi_E) - 1/8(\Phi_W - 2\Phi_P + \Phi_E) & 当 F_e \geq 0 \\ 0.5(\Phi_P + \Phi_E) - 1/8(\Phi_P - 2\Phi_E + \Phi_{EE}) & 当 F_e \geq 0 \end{cases}$$

$$\Phi_w = \begin{cases} 0.5(\Phi_W + \Phi_P) - 1/8(\Phi_{WW} - 2\Phi_W + \Phi_P) & 当 F_w \geq 0 \\ 0.5(\Phi_W + \Phi_P) - 1/8(\Phi_W - 2\Phi_P + \Phi_E) & 当 F_w \geq 0 \end{cases}$$



特点：

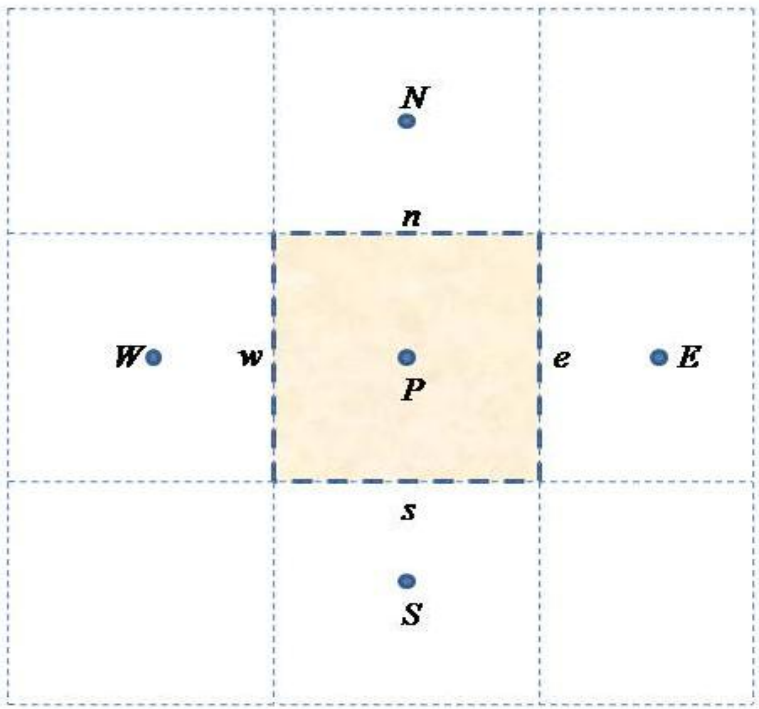
（1）五节点二阶精度格式：$a_P\Phi_P = a_{WW}\Phi_{WW} + a_W\Phi_W + a_E\Phi_E + a_{EE}\Phi_{EE}$

（2）稳定性条件：$|P_\Delta| \leq \frac{8}{3}$

6.5.4 高维对流扩散方程的离散格式

问题：利用有限体积法，对二维对流扩散方程进行离散

$$\frac{\partial \rho\Phi}{\partial t}+\frac{\partial \rho u\Phi}{\partial x}+\frac{\partial \rho v\Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial y}+S$$



（1）中心格式

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W + a_N\Phi_N + a_S\Phi_S + b$$

$$a_E = D_e - \frac{1}{2}F_e, \quad D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{\delta x_e}, \quad F_e = \rho u_e \Delta y$$

$$a_W = D_w + \frac{1}{2}F_w, \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{\delta x_w}, \quad F_w = \rho u_w \Delta y$$

$$a_N = D_n - \frac{1}{2}F_n, \quad D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{\delta y_n}, \quad F_n = \rho v_n \Delta x$$

$$a_S = D_s + \frac{1}{2}F_s, \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{\delta y_s}, \quad F_s = \rho v_s \Delta x$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + (F_e - F_w + F_n - F_s) + \frac{\rho_P \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

$$b = S_P^t \Delta x \Delta y + \frac{\rho_P^t \Delta x \Delta y}{\Delta t}\Phi_P^t$$

（2）迎风格式

$$a_E = D_e + [|-F_e,\ 0|]$$

$$a_W = D_w + [|F_w,\ 0|]$$

$$a_N = D_n + [|-F_n,\ 0|]$$

$$a_S = D_s + [|F_s,\ 0|]$$

其它同中心格式

（3）混合格式

$$a_E = [|-F_e,\ D_e - \frac{1}{2}F_e,\ 0|]$$

$$a_W = [|F_w,\ D_w + \frac{1}{2}F_w,\ 0|]$$

$$a_N = [|-F_n,\ D_n - \frac{1}{2}F_n,\ 0|]$$

$$a_S = [|F_s,\ D_s + \frac{1}{2}F_s,\ 0|]$$

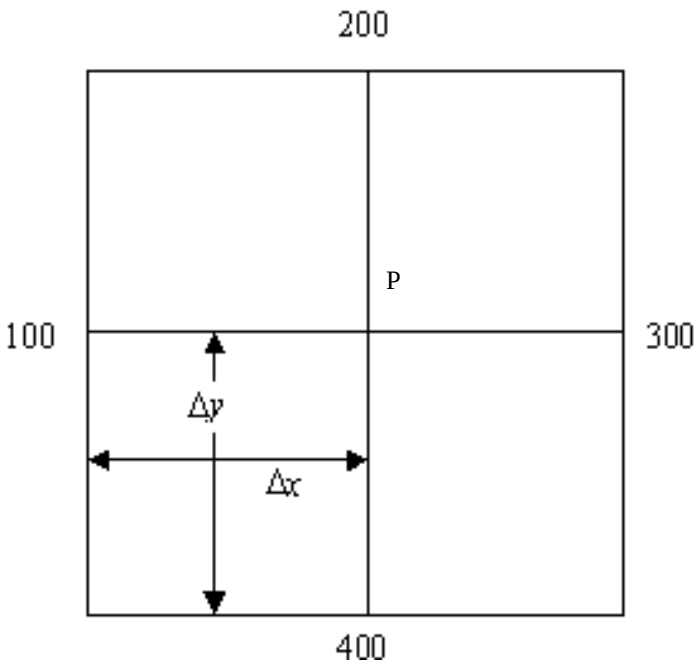
其它同中心格式

作业：二维定常对流—扩散方程：

$$\frac{\partial \rho u \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \rho v \Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

边界条件如图所示，其中：

$$\rho=1, u=3, v=5, \Gamma=0.5, \Delta x=\Delta y=0.2$$



利用二阶中心格式及一阶迎风格式分别计算出节点P处的Φ值。

导热问题的有限体积法：

对流扩散问题

一维：$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t}+\frac{\partial \rho u \Phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}+S$

二维：$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t}+\frac{\partial \rho u \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \rho v \Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial y}+S$

导热问题

一维：$\frac{\partial \rho T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{k}{c_P}\frac{\partial T}{\partial x}+S$

二维：$\frac{\partial \rho T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{k}{c_P}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{k}{c_P}\frac{\partial T}{\partial y}+S$

结论：

（1）导热问题是对流速度为0的一个特殊的对流扩散问题。

（2）5种格式中令P_Δ=0，就可以得到导热问题的离散形式。

（3）5种离散格式均蜕化为中心格式。

第6章 计算流体力学的数值方法

6.1 计算流体力学的发展简史

6.2 计算流体力学的基本过程

6.3 区域离散方法

6.4 有限差分法

6.5 有限体积法

6.6 非定常项的离散格式

6.7 代数方程组求解方法

6.8 对流扩散方程的编程算例

6.6 非定常项的离散格式

经过空间导数项的离散后，形成如下半离散格式：

$$\frac{d\Phi}{dt} = f(\Phi)$$

时间导数项一般利用有限差分格式离散，主要分为三类：

（1）简单离散格式；
（2）多步格式；
（3）双重时间格式；

每类的具体格式参见教材。

第6章 计算流体力学的数值方法

6.1 计算流体力学的发展简史

6.2 计算流体力学的基本过程

6.3 区域离散方法

6.4 有限差分法

6.5 有限体积法

6.6 非定常项的离散格式

6.7 代数方程组求解方法

6.8 对流扩散方程的编程算例

6.7 代数方程组求解方法

CFD中代数方程组的特点

(1)线性代数方程组：$A\vec{\Phi}=\vec{b}$,

其中$A=(a_{ij})_{N\times N}$, $\vec{\Phi}=(\Phi_j)_N^T$, $\vec{b}=(b_i)_N^T$

(2)系数矩阵A为大型稀疏带状矩阵，

三对角矩阵

$$A_i\Phi_i=B_i\Phi_{i+1}+C_i\Phi_{i-1}+D_i,\quad i=1,N$$

五对角矩阵

$$A_i\Phi_i=B_i\Phi_{i+2}+C_i\Phi_{i+1}+D_i\Phi_{i-1}+E_i\Phi_{i-2}+F_i,\quad i=1,N$$

（3）系数矩阵A对角占优。

1.TDMA方法(Tri-Diagonal Matrix Algebraic Equations)

适合于一维三节点格式

$$A_i\Phi_i = B_i\Phi_{i+1} + C_i\Phi_{i-1} + D_i, \quad i = 1, N$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & -B_1 & & & & \\ -C_2 & A_2 & -B_2 & & & \\ & -C_3 & A_3 & -B_3 & & \\ & & & & & \\ & & & -C_{N-1} & A_{N-1} & -B_{N-1} \\ & & & & -C_N & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ . \\ \Phi_{N-1} \\ \Phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ . \\ D_{N-1} \\ D_N \end{pmatrix}$$

$$A_i\Phi_i = B_i\Phi_{i+1} + C_i\Phi_{i-1} + D_i \qquad (1)$$

消元

$$\Phi_i = P_i\Phi_{i+1} + Q_i \qquad (2)$$

$$\Phi_{i-1} = P_{i-1}\Phi_i + Q_{i-1} \qquad (3)$$

$$(3)\times C_i + (1):$$

$$A_i\Phi_i = B_i\Phi_{i+1} + C_iP_{i-1}\Phi_i + C_iQ_{i-1} + D_i$$

整理为

$$\Phi_i = \frac{B_i}{A_i - C_iP_{i-1}}\Phi_{i+1} + \frac{C_iQ_{i-1} + D_i}{A_i - C_iP_{i-1}} \qquad (4)$$

对照（2）、（4），得到：

$$P_i = \frac{B_i}{A_i - C_iP_{i-1}}, \qquad Q_i = \frac{C_iQ_{i-1} + D_i}{A_i - C_iP_{i-1}} \qquad (5)$$

$$A_1\Phi_1 = B_1\Phi_2 + D_1 \Rightarrow P_1 = \frac{B_1}{A_1},\ Q_1 = \frac{D_1}{A_1} \qquad (6)$$

消元是一个递归过程

回代：

N: $\Phi_N = Q_N$

$N-1 \to 1$: 利用（2）计算

TDMA计算步骤：

$$1^{\circ}\quad P_1 = \frac{B_1}{A_1},\quad Q_1 = \frac{D_1}{A_1}$$

$$2^{\circ}\quad P_i = \frac{B_i}{A_i - C_i P_{i-1}},\ Q_i = \frac{C_i Q_{i-1} + D_i}{A_i - C_i P_{i-1}},\ i = 2,\ N$$

$$3^{\circ}\quad \Phi_N = Q_N$$

$$4^{\circ}\quad \Phi_i = P_i \Phi_{i+1} + Q_i,\ i = N-1,\ 1$$

2.PDMA方法(Penta-Diagonal Matrix Algebraic Equations)

适合于一维高阶格式，如二阶迎风格式，QUICK格式等

$$A_i\Phi_i = B_i\Phi_{i+2} + C_i\Phi_{i+1} + D_i\Phi_{i-1} + E_i\Phi_{i-2} + F_i$$

$$\Phi_i = P_i\Phi_{i+2} + Q_i\Phi_{i+1} + R_i$$

$$P_i = ?$$

$$Q_i = ?$$

$$R_i = ?$$

PDMA方法的计算步骤？

3.ADI方法（Alternate Direction Iterative Method）

适合于多维问题

$$a_{i,j}\Phi_{i,j} = a_{i+1,j}\Phi_{i+1,j} + a_{i-1,j}\Phi_{i-1,j} + a_{i,j+1}\Phi_{i,j+1} + a_{i,j-1}\Phi_{i,j-1} + b_{i,j}$$

基本思想：

（1）给定初始值，先逐行扫描求解，再逐列扫描求解，完成一轮迭代；

（2）进入下一轮迭代，直至满足误差收敛指标；

（3）在每行（或列）扫描求解中利用TDMA或者PDMA直接求解方法。

4.迭代方法（Iterative Method）

适合于任意代数方程组：$a_P\Phi_P=\sum a_{nb}\Phi_{nb}+b$

计算步骤：(1) $\mathrm{k}=0,$给定初始值$\Phi_P^0, P=1,N$

(2) $\Phi_P^{k+1}=\dfrac{\sum a_{nb}\Phi_{nb}^k+b}{a_P}, P=1,N$

(3) 判断$\max\left|a_P\Phi_P^{k+1}-(\sum a_{nb}\Phi_{nb}^{k+1}+b)\right|<\varepsilon$?

如是，则迭代结束；否则$k=k+1$，转（2）

上述迭代法为Jacobi迭代法；如果在(2)中的 Φ_{nb}^k 用尽可能最新的 Φ_{nb} 计算，则为Gauss－Sediel方法。

松弛迭代法：$\dfrac{a_P}{\alpha}\Phi_P=\sum a_{nb}\Phi_{nb}+b-\dfrac{1-\alpha}{\alpha}a_P\Phi_P^k$

5. CG方法(Conjugate Gradient Method)，是一种最优化方法，如ILDU(0)-CGS方法。

第6章 计算流体力学的数值方法

6.1 计算流体力学的发展简史

6.2 计算流体力学的基本过程

6.3 区域离散方法

6.4 有限差分法

6.5 有限体积法

6.6 非定常项的离散格式

6.7 代数方程组求解方法

6.8 对流扩散方程的编程算例

上机作业：
$$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx},x\in(0,1)$$
$$\Phi(0)=100,\Phi(1)=200$$
$$\rho=1,u=2,\Gamma=1$$

采用外节点法对(0,1)进行100等分，利用中心格式求Φ_2到Φ_{100}，并与精确解比较

Flowchart

1d steady convective and diffusive problem

$$\frac{d\rho u\Phi}{dx} = \frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx}, x \in (0,1),$$

$$\Phi(0) = 100, \Phi(1) = 200$$

$$\rho = 1, u = 2, \Gamma = 1$$

100 equal spacing nodes: X(i)=0+(i-1)/100,i=1,101

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W + b$$

TDMA: Φ=?

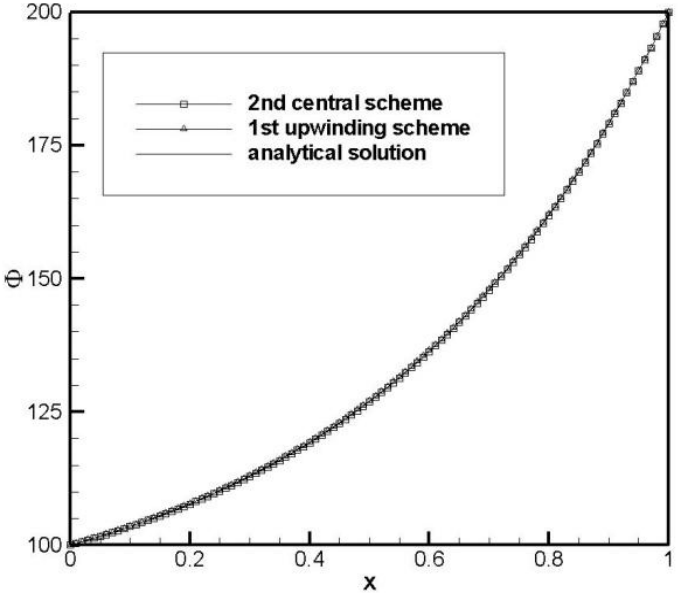
Comparison

```
        PROGRAM CFDtutorial
! SOLVE 1D STEADY CONVECTIVE-DIFFUSIVE EQUATION USING FVM
! DATA STRUCTURE
        REAL X(200),F(200),AP(200),AE(200),AW(200),B(200),P(200),Q(200)
        REAL X0,XL,RHO,U,DIFF
        INTEGER N
! MODEL PARAMETERS: GEOMETRICAL, FLOW AND NUMERICAL ONES
        N=101
        X0=0.
        XL=1.
        RHO=1.
        U=2.
        DIFF=1.0
        F(1)=100.
        F(N)=200.
        PE=RHO*U*XL/DIFF
```

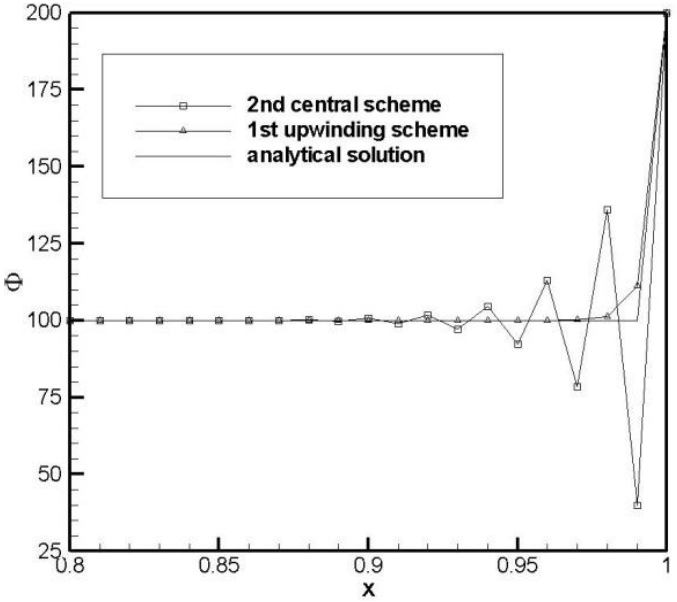
```
! DOMAIN DISCRETIZATION
        DO I=1,N
        X(I)=X0+(XL-X0)*(I-1.)/(N-1)
        ENDDO
! EQUATION DISCRETIZTION
        DO I=2,N-1
        DXE=X(I+1)-X(I)
        FE=RHO*U
        DE=DIFF/DXE
        AE(I)=DE-0.5*FE
        DXW=X(I)-X(I-1)
        FW=RHO*U
        DW=DIFF/DXW
        AW(I)=DW+0.5*FW
        AP(I)=AE(I)+AW(I)+FE-FW
        B(I)=0.
        ENDDO
```

```
! BOUNDARY CONDITIONS
        AE(1)=0.
        AW(1)=0.
        AP(1)=1.
        B(1)=F(1)
        AE(N)=0.
        AW(N)=0.
        AP(N)=1.
        B(N)=F(N)
! ALGEBRIC EQUATIONS SOLUTION BY TDMA
        P(1)=AE(1)/AP(1)
        Q(1)=B(1)/AP(1)
        DO I=2,N
        P(I)=AE(I)/(AP(I)-AW(I)*P(I-1))
        Q(I)=(AW(I)*Q(I-1)+B(I))/(AP(I)-AW(I)*P(I-1))
        ENDDO
        F(N)=Q(N)
        DO I=N-1,1,-1
        F(I)=P(I)*F(I+1)+Q(I)
        ENDDO
```

```
! OUTPUT
        OPEN(11,FILE="RESULT.DAT",STATUS="UNKNOWN")
        DO I=1,N
        FA=F(1)+(F(N)-F(1))*(EXP(PE*X(I)/XL)-1)/(EXP(PE)-1)
        WRITE(11,*)X(I),F(I),FA
        ENDDO
        CLOSE(11)
        END PROGRAM CFDtutorial
```



$P_\Delta=0.02$



$P_\Delta=8$

二阶中心格式与一阶迎风格式计算值

边界条件的处理方法

问题：
$$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx}\qquad x\in(0,L)$$

边界条件 $-\Gamma\frac{d\Phi}{dx}+\rho u\Phi\Big|_0=q_0,\qquad \Phi\Big|_L=\Phi_L$

其中ρ，u，Γ为常数。

求：$\Phi=?$

答案：
$$\Phi=q_0\frac{L}{\Gamma}\frac{1}{Pe}+(\Phi_L-q_0\frac{L}{\Gamma}\frac{1}{Pe})e^{Pe(x/L-1)}$$

练习：$\dfrac{d\rho u\Phi}{dx}=\dfrac{d}{dx}\Gamma\dfrac{d\Phi}{dx}\qquad x\in(0,1)$

边界条件 $-\Gamma\dfrac{d\Phi}{dx}+\rho u\Phi\Big|_0=150,\qquad \Phi\Big|_L=200$

$\rho=1$，$u=2$，$\Gamma=1$，

将(0,1)采用内节点法二等分，利用一阶迎风格式求Φ_2和Φ_3

答案：$\Phi=75+125e^{2(x-1)}$

$$\begin{cases}4\Phi_2=2\Phi_3+150\\6\Phi_3=4\Phi_2+400\end{cases}\qquad\begin{cases}\Phi_2=106.3\\\Phi_3=137.5\end{cases}$$

第7章 时间推进法及其应用

7.1 气动方程组

7.2 Spalart-Allmaras湍流模型

7.3 定解条件

7.4 数值方法

7.5 跨音速轴流压缩机转子内流计算

本书内容介绍

每章名称	重点与难点
第1章 绪论	流体机械内流的五个特点及研究方法
第2章 张量基本概念及运算	$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$
第3章 流体机械内部三维流动的基本方程	绝对流动与相对流动之间的五个关系
第4章 基于两类流面的准三维流动理论	准三维反问题的流线曲率法
第5章 平面叶栅二维流动理论	特征分析与定解条件
第6章 计算流体力学的数值方法	对流扩散方程的有限体积法
第7章 时间推进法及应用	Jameson的Runge-Kutta时间推进法
第8章 全速度压力修正法及应用	非结构化网格上的全速度压力修正法

7.1 气动方程组

相对坐标系下的绝对流动速度方程的张量形式

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}=0$$

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\rho\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}+\nabla\cdot\mathbf{P}$$

$$\rho\frac{De_0}{Dt}=\nabla\cdot\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot k\nabla T$$

利用到的公式：

（1）矢量全导数在两类坐标系下的关系：

$$\frac{D_a\mathbf{v}}{Dt}=\frac{D\mathbf{v}}{Dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$$

（2）相对坐标系下的全导数公式：

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{w}\cdot\nabla$$

（3）优点：提高显式格式的稳定性

7.1 气动方程组

笛卡尔坐标系下的流动控制方程组

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial z}=\frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{H}_v}{\partial z}+\mathbf{I}$$

其中**Q**为守恒型求解向量， $\mathbf{F}_c$、$\mathbf{G}_c$、$\mathbf{H}_c$为沿着x、y、z方向上的对流向量， $\mathbf{F}_v$、$\mathbf{G}_v$、$\mathbf{H}_v$为粘性向量，**I**为源项。

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho v_x\\ \rho v_y\\ \rho v_z\\ \rho e_0\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_c=\begin{bmatrix}\rho w_x\\ \rho w_x v_x+p\\ \rho w_x v_y\\ \rho w_x v_z\\ \rho w_x h_0-p\omega y\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}_c=\begin{bmatrix}\rho w_y\\ \rho w_y v_x\\ \rho w_y v_y+p\\ \rho w_y v_z\\ \rho w_y h_0+p\omega x\end{bmatrix},\quad \mathbf{H}_c=\begin{bmatrix}\rho w_z\\ \rho w_z v_x\\ \rho w_z v_y\\ \rho w_z v_z+p\\ \rho w_z h_0\end{bmatrix}$$

$$e_0=\frac{p}{\rho(\gamma-1)}+\frac{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2}$$

$$h_0=e_0+\frac{p}{\rho}$$

7.1 气动方程组

$$\mathbf{F}_v=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \beta_x\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}_v=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{yx}\\ \tau_{yy}\\ \tau_{yz}\\ \beta_y\end{bmatrix},\quad \mathbf{H}_v=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{zx}\\ \tau_{zy}\\ \tau_{zz}\\ \beta_z\end{bmatrix},\quad \mathbf{I}=\begin{bmatrix}0\\ \rho\omega v_y\\ -\rho\omega v_x\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} w_x=v_x+\omega y\\ w_y=v_y-\omega x\\ w_z=v_z\end{cases}\qquad \begin{cases} \beta_x=v_x\tau_{xx}+v_y\tau_{xy}+v_z\tau_{xz}+k\dfrac{\partial T}{\partial x}\\ \beta_y=v_x\tau_{yx}+v_y\tau_{yy}+v_z\tau_{yz}+k\dfrac{\partial T}{\partial y}\\ \beta_z=v_x\tau_{zx}+v_y\tau_{zy}+v_z\tau_{zz}+k\dfrac{\partial T}{\partial z}\end{cases}$$

$$\mu=\mu_l+\underline{\mu_t}$$

$$\mu_l=\mu_0(T/T_0)^{1.5}(T_0+T_s)/(T+T_s)$$

$$k=c_p(\mu_l/\mathrm{Pr}_l+\mu_t/\mathrm{Pr}_t)$$

$$\mathrm{Pr}_l=0.72\quad \mathrm{Pr}_t=0.90$$

气动方程组的关键：如何计算湍流粘性系数？

湍流的基本概念

（1）粘性流动：随着Re增大，出现层流、过渡流和湍流。

（2）层流：也称为稳流或片流，流体分层流动，互不混合

（3）湍流：又称为乱流、扰流或紊流，流体中有许多小涡，层流被破坏，相邻流层间不但有滑动，还有混合。

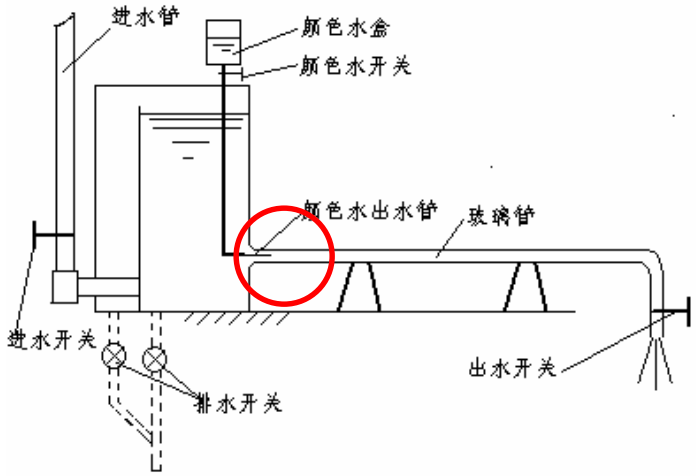
（4）湍流的后果：增大了流体导热系数、粘性系数，即强化传热、增加流阻。

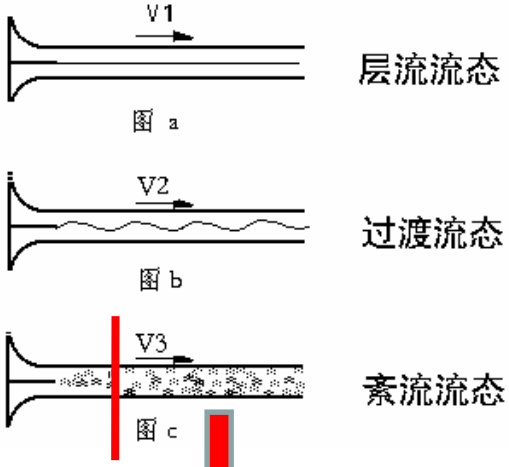
（5）原因：湍流涡粘性远大于分子粘性。

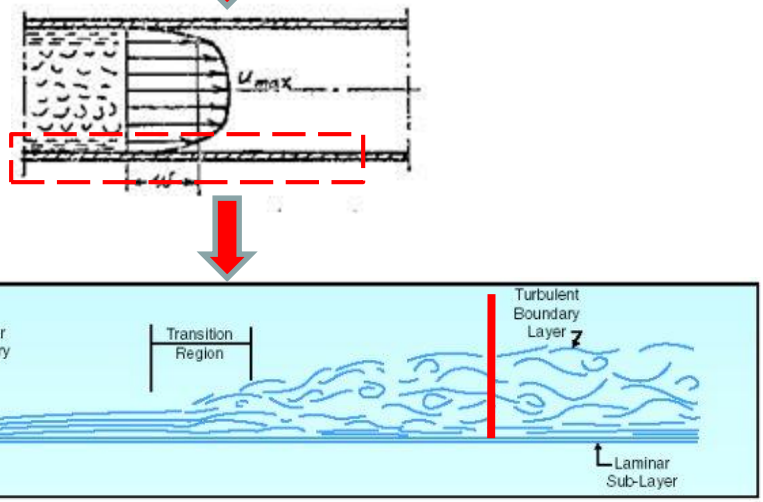
Hinze J O. Turbulence[M]. NY: McGraw-Hill, 1975.

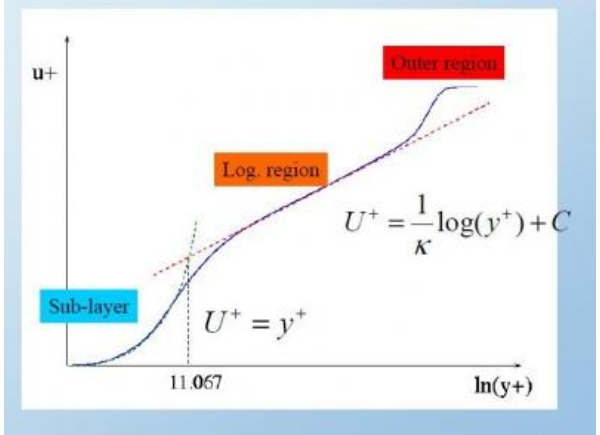
湍流的基本研究方法：实验

1883年英国科学家雷诺（Reynolds）的圆管内部流动实验；
我的圆柱绕流LIF实验录像。









湍流的基本研究方法：实验

雷诺(O. Reynolds)，1842.8~1912，英国力学家、物理学家、实验科学家和工程师。1883年发表了经典论文《决定水流为直线或曲线运动的条件以及在平行水槽中的阻力定律的探讨》，1895年在湍流中引入有关应力的概念。

普朗特(Ludwig Prandtl)，1875.2～1953，德国物理学家、近代力学奠基人之一。建立普朗特流体力学研究所。在边界层理论、风洞实验技术、机翼理论、紊流理论等方面都做出了重要的贡献，被称作空气动力学之父、现代流体力学之父。

湍流的基本研究方法：理论

（1）雷诺平均NS方程：也叫做RANS(Reynolds Averaged Navier-Stokes)方程、雷诺方程；

（2）两个基本假设条件：

- 湍流仍然满足Navier-Stokes方程；
- 湍流变量由一个时均量和一个脉动量组成。

（3）湍流NS方程：$$\frac{\partial \rho(\bar{v}_i + v_i')}{\partial t} + \frac{\partial \rho(\bar{v}_i + v_i')(\bar{v}_j + v_j')}{\partial y_j} = -\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial y_i} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}')}{\partial y_j}$$

（4）RANS方程：$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial y_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y_i} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{ij} \boxed{-\rho \overline{v_i' v_j'}})}{\partial y_j}$$

（5）湍流涡粘性假设：$$\boxed{-\rho \overline{v_i' v_j'}} = -\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} + \mu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial y_i} \right)$$

湍流的基本研究方法：计算

（1）分类：计算量从小到大，依次为

- 湍流模型(Turbulence Model)
- 大涡模拟(Large Eddy Simulation, LES)
- 直接数值模拟(Direct Numerical Simulation, DNS)

（2）湍流模型：应用最广为**S-A模型**、k-ε模型、k-ω模型

（3）LES：LES有望在未来10年左右应用在流体机械设计中

（4）DNS：目前还停留在简单湍流计算中

7.2 Spalart-Allmaras湍流模型

（1）S-A模型：由波音公司Spalart和Allmaras1992年提出。

（2）建模思想：经验总结、量纲分析、验证改进。

（3）一方程：关于涡粘性变量$\tilde{\upsilon}$的对流扩散方程，该变量在粘性底层内经过壁面衰减处理才是湍流运动粘性系数υ_t 。

（4）模型六要素：湍流输运方程，湍流粘性系数计算公式，湍流生成项，湍流破环项，针对特定湍流问题的改进模型，湍流模型常数。

7.2 Spalart-Allmaras湍流模型

7.2.1 湍流输运方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{\nu})+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\tilde{\nu}w_i)=G_{\tilde{\nu}}+\frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{(\mu_l+\rho\tilde{\nu})\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_i}\right\}+\rho C_{b2}\left(\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_i}\right)^2\right]-Y_{\tilde{\nu}}$$

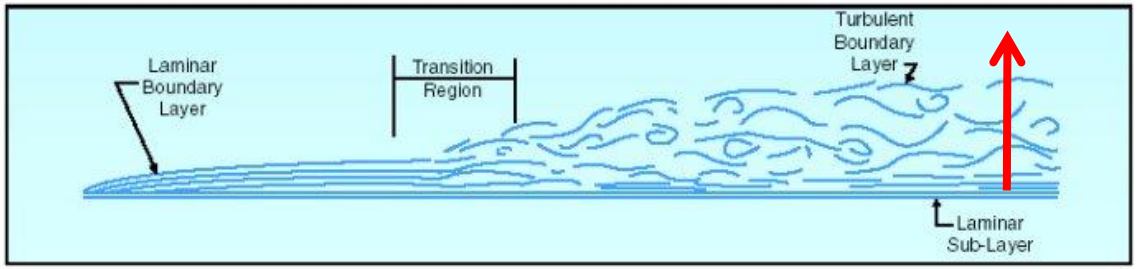
非定常项　对流项　生成项　扩散项　破坏项

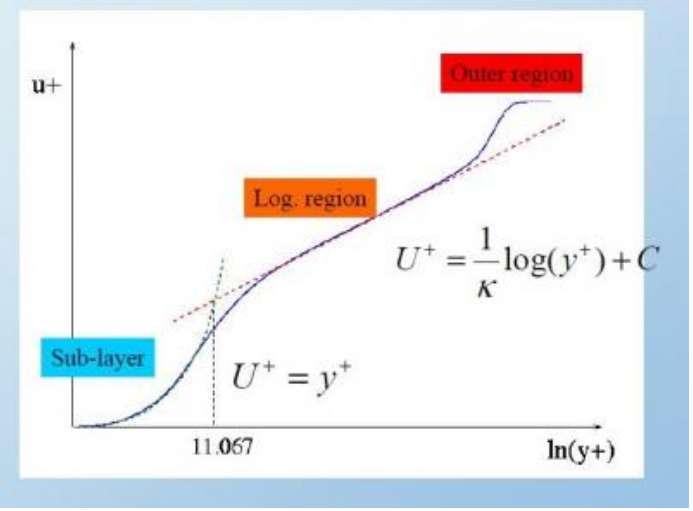
该方程为有源项的非定常对流扩散方程，可以按照一般对流扩散方程的数值方法求解。

7.2 Spalart-Allmaras湍流模型

7.2.2 湍流粘性系数计算公式

（1）边界层结构：沿固壁法向，边界层可进一步细分为粘性底层、过渡层、湍流旺盛层、外层。





（2）计算公式：

$$\mu_t = \rho \upsilon_t \longleftarrow \upsilon_t = \tilde{\upsilon} f_{v1} \longleftarrow f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \longleftarrow \chi = \frac{\tilde{\upsilon}}{\upsilon_l}$$

其中 f_{v1} 为壁面衰减函数或阻尼函数（damping function），取值在0~1之间。

7.2 Spalart-Allmaras湍流模型

7.2.3 湍流生成项

（1）方法：经验加量纲分析

（2）经验：认为当地流动的涡量越大，湍流强度也越大

（3）标准S-A模型公式：

$$G_{\tilde{\nu}} = C_{b1}\rho\tilde{S}\tilde{\nu} \qquad \tilde{S} = Sf_{v3} + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}$$

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \qquad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1+\chi f_{v1}} \qquad f_{v3} = 1.0$$

（4）缺点：$\tilde{S}$可能出现负值

补救方法：

对$\tilde{S}$计算公式稍作修改：

$$\tilde{S} = Sf_{v3} + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}$$

$$f_{v2} = \left(1 + \frac{\chi}{C_{v2}}\right)^{-3}$$

$$f_{v3} = \frac{(1+\chi f_{v1})(1-f_{v2})}{\chi}$$

$$C_{v2} = 5$$

$$\chi = \max(\chi, 10^{-4})$$

这样保证了$\chi, f_{v2}, f_{v3}, \tilde{S}$非负。

7.2 Spalart-Allmaras湍流模型

7.2.4 湍流破环项

计算公式：

$$Y_{\tilde{\nu}} = C_{w1}\rho f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2$$

$$f_w = g\left[\frac{1+C_{w3}^6}{g^6+C_{w3}^6}\right]^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{g^{-6}+C_{w3}^{-6}}{1+C_{w3}^{-6}}\right)^{-\frac{1}{6}}$$

$$g = r + C_{w2}(r^6 - r)$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2}$$

7.2.5 旋转和弯曲的改进模型

Spalart和Shur1997年引入了修正湍流生成项的旋转-曲率函数：

$$f_{r1}(r^*, \tilde{\rho}) = (1+C_{r1})\frac{2r^*}{1+r^*}[1 - C_{r3}\tan^{-1}(C_{r2}\tilde{\rho})] - C_{r1}$$

$$r^* = S/\Omega$$

$$\tilde{\rho} = 2\Omega_{ik}S_{jk}\left(\frac{DS_{ij}}{Dt} + \left(\varepsilon_{imn}S_{jn} + \varepsilon_{jmn}S_{in}\right)\omega_m\right)\Big/ D^4$$

这两项的经验性更强！

7.2 Spalart-Allmaras湍流模型

7.2.6 模型常数

取值方法：少部分由理论分析得到，绝大部分是试凑值；详见教材。

湍流方程组：粘性流动方程+湍流模型方程，统一写成有源项的非定常对流扩散方程形式，方程数目6个，未知量6个。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial z}=\frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{H}_v}{\partial z}+\mathbf{I}$$

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho v_x\\ \rho v_y\\ \rho v_z\\ \rho e_0\\ \rho \tilde{\nu}\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_c=\begin{bmatrix}\rho w_x\\ \rho w_x v_x+p\\ \rho w_x v_y\\ \rho w_x v_z\\ \rho w_x h_0-p\omega y\\ \rho w_x \tilde{\nu}\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}_c=\begin{bmatrix}\rho w_y\\ \rho w_y v_x\\ \rho w_y v_y+p\\ \rho w_y v_z\\ \rho w_y h_0+p\omega x\\ \rho w_y \tilde{\nu}\end{bmatrix},\quad \mathbf{H}_c=\begin{bmatrix}\rho w_z\\ \rho w_z v_x\\ \rho w_z v_y\\ \rho w_z v_z+p\\ \rho w_z h_0\\ \rho w_z \tilde{\nu}\end{bmatrix}$$

7.3 定解条件

（1）方程：微分方程和求解变量均为6个，故方程组封闭。

（2）定解条件：初始和边界条件，给法依据：特征理论。

（3）涡粘性变量ϑ给法：

- 初始条件：$\tilde{\upsilon}=10\sim50\upsilon$；
- 进口条件：$\tilde{\upsilon}=10\sim50\upsilon$；
- 出口条件：$\partial\tilde{\upsilon}/\partial l=0$ ；
- 周期性条件：相等即可；
- 固壁条件：$\tilde{\upsilon}=0$，但在离散动量方程中出现的壁面剪切力按照壁面函数法计算。

7.4 数值方法

7.4.1 二阶中心格式

对流扩散方程：$\dfrac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\dfrac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial y}+\dfrac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial z}=\dfrac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial y}+\dfrac{\partial \mathbf{H}_v}{\partial z}+\mathbf{I}$

（1）积分：对节点(i, j, k)的控制体积$Vol_{i,j,k}$ 积分上式得

$$\frac{d}{dt}(Vol_{i,j,k}\mathbf{Q}_{i,j,k})+\mathbf{B}_{c,i,j,k}-\mathbf{B}_{v,i,j,k}=Vol_{i,j,k}\mathbf{I}_{i,j,k}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{c,i,j,k}&=\sum_{f=1}^{6}(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{S})_f\\&=(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{S})_{i+\frac{1}{2},j,k}+(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{S})_{i,j+\frac{1}{2},k}+(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{S})_{i,j,k+\frac{1}{2}}\\&\quad-(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{S})_{i-\frac{1}{2},j,k}-(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{S})_{i,j-\frac{1}{2},k}-(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{S})_{i,j,k-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{v,i,j,k}&=\sum_{f=1}^{6}(\mathbf{E}_v\cdot\mathbf{S})_f\\&=(\mathbf{E}_v\cdot\mathbf{S})_{i+\frac{1}{2},j,k}+(\mathbf{E}_v\cdot\mathbf{S})_{i,j+\frac{1}{2},k}+(\mathbf{E}_v\cdot\mathbf{S})_{i,j,k+\frac{1}{2}}\\&\quad-(\mathbf{E}_v\cdot\mathbf{S})_{i-\frac{1}{2},j,k}-(\mathbf{E}_v\cdot\mathbf{S})_{i,j-\frac{1}{2},k}-(\mathbf{E}_v\cdot\mathbf{S})_{i,j,k-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_c=\mathbf{F}_c\mathbf{i}+\mathbf{G}_c\mathbf{j}+\mathbf{H}_c\mathbf{k}$$

$$\mathbf{E}_v=\mathbf{F}_v\mathbf{i}+\mathbf{G}_v\mathbf{j}+\mathbf{H}_v\mathbf{k}$$

7.4 数值方法

7.4.1 二阶中心格式

对流扩散方程：$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial z}=\frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{H}_v}{\partial z}+\mathbf{I}$

（2）选型：二阶中心格式

$$\frac{d}{dt}(Vol_{i,j,k}\mathbf{Q}_{i,j,k})+\mathbf{B}_{c,i,j,k}-\mathbf{B}_{v,i,j,k}=Vol_{i,j,k}\mathbf{I}_{i,j,k}$$

界面对流项计算公式

$$q_f=\frac{1}{2}(\mathbf{w}_A+\mathbf{w}_B)\cdot\mathbf{S} \qquad m_f=\frac{1}{2}q_f(\rho_A+\rho_B)$$

$$\mathbf{Q}_f=\frac{1}{2}q_f[(\rho\mathbf{v})_A+(\rho\mathbf{v})_B] \qquad \mathbf{p}_f=\frac{1}{2}(p_A+p_B)\mathbf{S}$$

$$H_f=\frac{1}{2}q_f[(\rho h_0)_A+(\rho h_0)_B]$$

界面扩散项计算公式

$$(\nabla\Phi)_f=\frac{1}{Vol_f}\oint\Phi\mathbf{n}\cdot d\mathbf{S}$$

7.4 数值方法

7.4.1 二阶中心格式

对流扩散方程：$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial z}=\frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{H}_v}{\partial z}+\mathbf{I}$

（3）整理：半离散方程

$$\frac{d}{dt}(Vol_{i,j,k}\mathbf{Q}_{i,j,k})+\mathbf{B}_{c,i,j,k}-\mathbf{B}_{v,i,j,k}=Vol_{i,j,k}\mathbf{I}_{i,j,k}$$

7.4 数值方法

7.4.2 人工粘性

二阶显式中心格式绝对不稳定，需要引入人工粘性项：

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(Vol_{i,j,k}\mathbf{Q}_{i,j,k})}_{\text{非定常项}}+\underbrace{\mathbf{B}_{c,i,j,k}}_{\text{对流项}}-\underbrace{\mathbf{B}_{v,i,j,k}}_{\text{扩散项}}-\underbrace{\mathbf{D}_{i,j,k}}_{\text{人工粘性}}=\underbrace{Vol_{i,j,k}\mathbf{I}_{i,j,k}}_{\text{源项}}$$

Denton1974年提出的人工粘性项为：

$$\mathbf{D}_{i,j,k}=(D_x^2+D_y^2+D_z^2-D_x^4-D_y^4-D_z^4)\mathbf{Q}_{i,j,k}$$

$$D_x^2\mathbf{Q}_{i,j,k}=\nabla_x\left[(\lambda_{i+\frac{1}{2},j,k}\varepsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j,k})\Delta_x\right]\mathbf{Q}_{i,j,k} \qquad D_x^4\mathbf{Q}_{i,j,k}=\nabla_x\left[(\lambda_{i+\frac{1}{2},j,k}\varepsilon^{(4)}_{i+\frac{1}{2},j,k}\Delta_x\nabla_x\Delta_x\right]\mathbf{Q}_{i,j,k}$$

$$\varepsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j,k}=k^{(2)}\max(\theta_{i+1,j,k},\theta_{i,j,k}) \qquad \theta_{i,j,k}=\left|\frac{p_{i+1,j,k}-2p_{i,j,k}+p_{i-1,j,k}}{p_{i+1,j,k}+2p_{i,j,k}+p_{i-1,j,k}}\right| \qquad \varepsilon^{(4)}_{i+\frac{1}{2},j,k}=\max\left[0,(k^{(4)}-\varepsilon^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j,k})\right]$$

7.4 数值方法

7.4.3 显式时间推进

（1）半离散方程： $\frac{d}{dt}(Vol_{i,j,k}\mathbf{Q}_{i,j,k})+\mathbf{B}_{c,i,j,k}-\mathbf{B}_{v,i,j,k}-\mathbf{D}_{i,j,k}=Vol_{i,j,k}\mathbf{I}_{i,j,k}$

（2）五步Runge-Kutta法：

$$\begin{cases}\mathbf{Q}^{(k+1)}=\mathbf{Q}^{(0)}-\alpha_{k+1}\dfrac{\Delta t}{Vol}\left(\mathbf{B}^{(k)}-\sum_{r=0}^{k}\gamma_{kr}\mathbf{D}^{(r)}\right)\\ \mathbf{B}^{(k)}=\mathbf{B}_c^{(k)}-\mathbf{B}_v^{(0)}\end{cases}$$

（3）算法中的经验参数：

$\alpha_1=1/4$ $\alpha_2=1/6$ $\alpha_3=3/8$ $\alpha_4=1/2$ $\alpha_5=1$

$\sum\gamma_{kr}=1$

7.4 数值方法

7.4.4 加速收敛技巧

（1）当地时间步长：在定常计算中，并不关心每个时间层上的精确值，只关心时间趋于无穷的定常解。采用最大当地时间步长，可以加快流场信息传递，加速收敛过程。

（2）隐式残差光顺：公式（7-89）右端残差项趋于0，将之光顺可以快速抹平残差：

$$\left(1-\varepsilon_x\delta_x^2\right)\left(1-\varepsilon_y\delta_y^2\right)\left(1-\varepsilon_z\delta_z^2\right)\mathbf{R}_{i,j,k}=\mathbf{R}^*_{i,j,k}$$

（3）多重网格方法：根据计算方法知识，迭代法可以快速有效地抹平高频残差分量，但很难剔除低频残差分量。在不同疏密的网格层次上循环求解代数方程，可使不同频率的误差分量都能够得到有效的衰减，从而获得更快的收敛速度。

7.5 跨音速转子内流计算

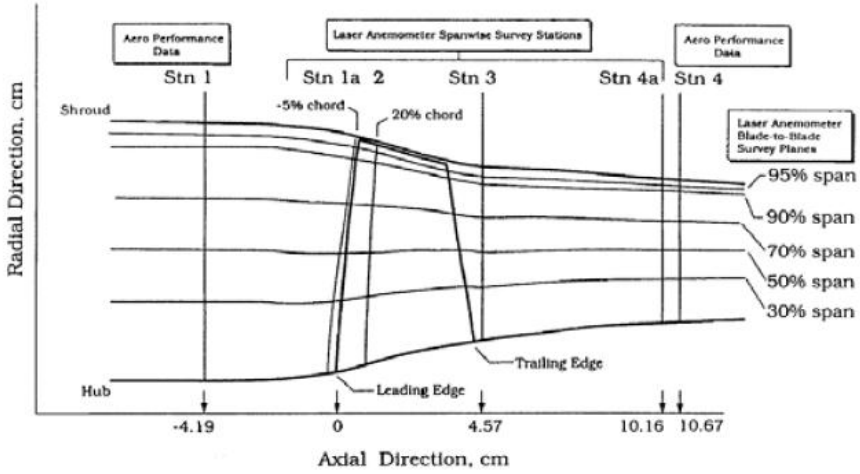
7.5.1 NASA Rotor37简介

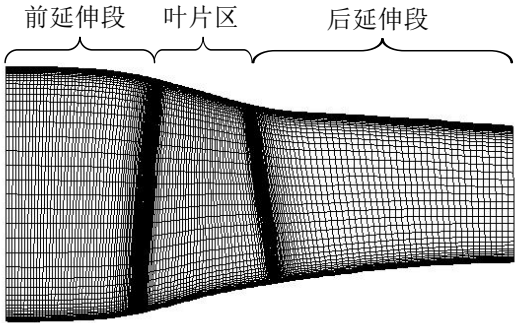
（1）NASA Stage系列：在70年代，NASA设计制造了四个低展弦比跨音速轴流压缩机进口级，分别命名为NASA Stage35、36、37、38。

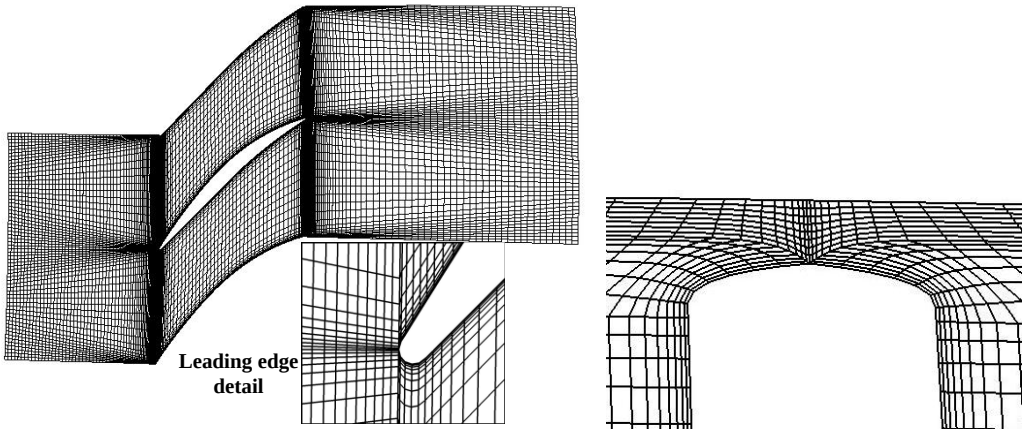
（2）NASA Rotor系列：1978年，NASA采用探针和激光测速仪对四个孤立转子Rotor35、36、37、38的气动性能和内部流场进行了详细测量。

（3）NASA Rotor37影响：1994年，ASME-GT分会选为CFD的盲测对象，随后NASA、GE、DLR、CU等利用该算例验证完善CFD。总之，NASA Rotor37是跨音速轴流压缩机的经典算例。

参数	数值
叶片数	36
转速/(rpm)	17188
叶顶间隙/(mm)	0.356
进口总温/(K)	288.15
进口总压/(Pa)	101325
设计流量/(kg/s)	20.19
设计压比	2.106
叶尖速度/(m/s)	454.14
叶尖稠度	1.29
展弦比(平均叶高/叶根轴向弦长）	1.56
进口叶根/叶顶直径比	0.7







7.5 跨音速转子内流计算

7.5.2 计算程序及参数设置

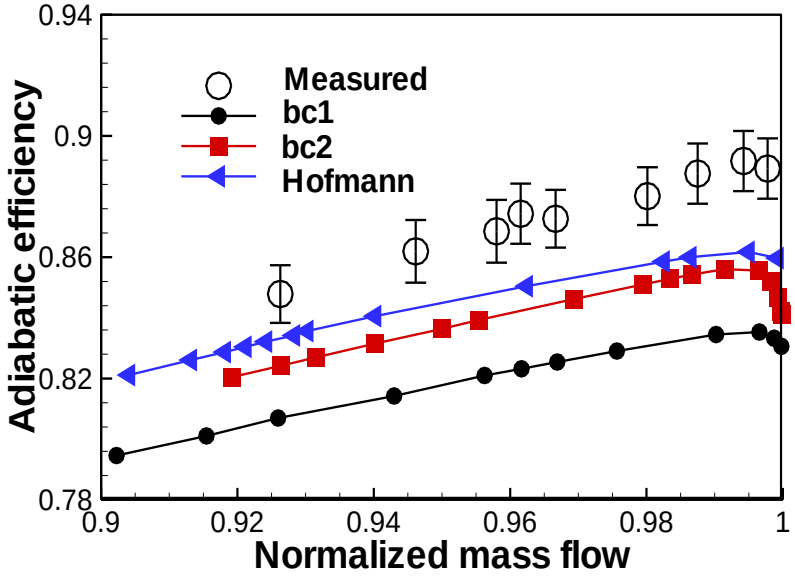
（1）三个模块：3DMesh、3DMarch和3DOutput，分别为前处理、求解器和后处理模块。

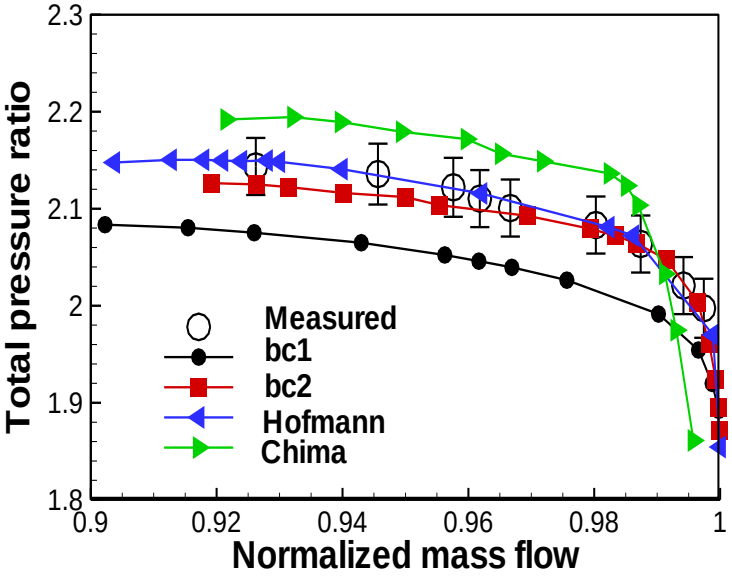
（2）边界条件：特征分析理论和机器具体设计参数。

（3）网格：流向×展向×周向=129×53×41，约为28万。在叶顶间隙区内沿展向布置9个网格点。

7.5 跨音速转子内流计算

7.5.3 气动性能曲线





（1）效率：与Hofmann相当，比实验值低约2.5%。

（2）压比：与Hofmann相当，精度优于Chima

（3）流量：设计流量基本符合，堵塞流量误差0.53%

7.5 跨音速转子内流计算

7.5.4 流场分析

（1）工况：设计流量、近喘振流量。

（2）对象：S1、S2、S3面上的等值线、线上的X-Y Plot。

（3）详见：教材。

（4）结论：该算法和程序能够用于跨音速轴流压缩机气动分析与设计，效率误差在2.5%左右，满足工程设计要求。

（5）展望：进一步提高算法精度、计算效率、便捷应用。

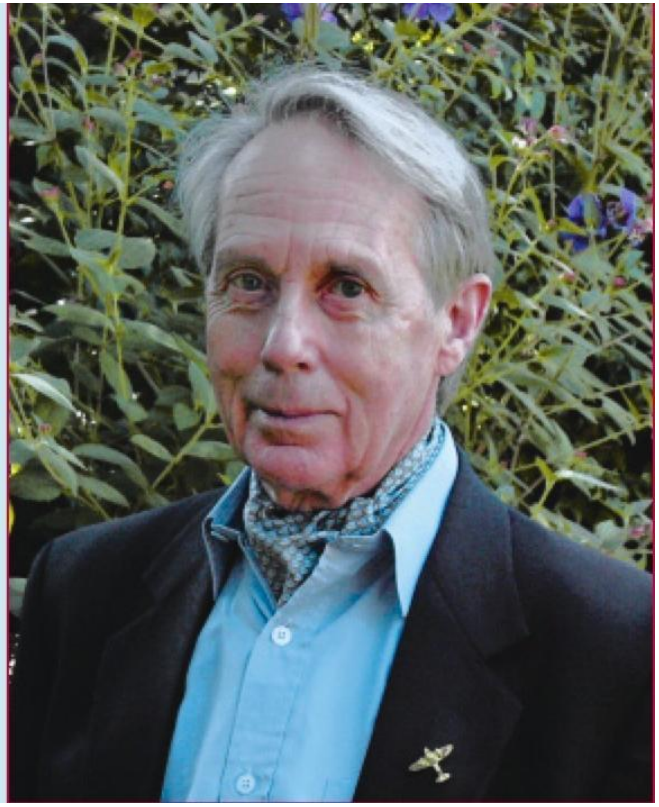
经典文献

（1）Jameson A, Schmidt W, Turkel E. Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Scheme[C]. AIAA-81-1259, 1981.

（2）Jameson A. Solution of the Euler Equations for Two Dimensional Transonic Flow by a Multigrid Method[J]. Applied Mathematics and Computation, 1983, 13(3): 327-355.

（3）Jameson A. Time Dependent Calculations Using Multigrid with Applications to Unsteady Flows Past Airfoils and Wings[C]. AIAA-91-1596, 1991.

（4）Liu F, Jameson A. Multigrid Navier-Stokes Calculations for Three-Dimensional Cascades[J]. AIAA Journal, 1993, 31(10): 1785-1791.



Antony JAMESON，1934~，美国计算流体力学专家、气动优化专家。剑桥大学三一学院本硕博毕业，1974年起分别在Courant研究所、普林斯顿大学、斯坦福大学任教授。研究跨音速流动、CFD、压气机优化设计、非定常流动等。

第8章 全速度压力修正法及应用

8.1 气动方程及定解条件

8.2 全速度SIMPLE算法

8.3 离心叶轮内部粘性流动及性能分析

本书内容介绍

每章名称	重点与难点
第1章 绪论	流体机械内流的五个特点及研究方法
第2章 张量基本概念及运算	$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$
第3章 流体机械内部三维流动的基本方程	绝对流动与相对流动之间的五个关系
第4章 基于两类流面的准三维流动理论	准三维反问题的流线曲率法
第5章 平面叶栅二维流动理论	特征分析与定解条件
第6章 计算流体力学的数值方法	对流扩散方程的有限体积法
第7章 时间推进法及应用	Jameson的Runge-Kutta时间推进法
第8章 全速度压力修正法及应用	非结构化网格上的全速度压力修正法

Fluent简介

Fluent安装过程

Fluent安装过程

（1）安装Exceed

（2）安装Gambit

（3）安装Fluent

（4）copy license.dat

（5）安装Gambit帮助文档

（6）安装Fluent帮助文档

注（5）、（6）两步可以不安装

Gambit用法

利用Gambit建立几何模型及网格划分基本步骤

（1）建立或导入几何模型（点、线、面、体及其布尔运算）

（2）划分网格（二维的三角形、四边形及其混合网格，三维的四面体、三棱柱、五面体、六面体及其混合网格）

（3）指定求解器（Fluent \uns, Fluent5.0，Ansys等）

（4）指定边界类型（进入口，固壁，以及介质类型）

（5）输出网格数据文件

Fluent用法

利用Fluent求解流场及后处理

（1）导入网格数据文件　File > Read > case…

（2）设定模型选项　Define > Models

（3）给定物性参数　Define > Materials

（4）给定边界条件　Define > Boundary Conditions

（5）指定计算格式　Solve > Controls > Solutions

（6）设定初始流场　Solve > Initialize

（7）设定收敛指标　Solve > Monitors > Residuals

（8）开始流场计算　Solve > Iterate

（9）后处理　Display, Plot, Report

CFD应用算例

1. 方腔内部二维流动

目的：学习软件的用法，观察旋涡随Re的变化过程

Re=100,1000,10000

2. 双列圆柱非定常涡脱落过程

目的：利用CFD软件计算经典流体力学问题Re=100

3. 二维多翼式前向叶轮离心风机

主要参数：

$$Nz = 36$$

$$D_1 = 0.113m$$

$$D_2 = 0.150m$$

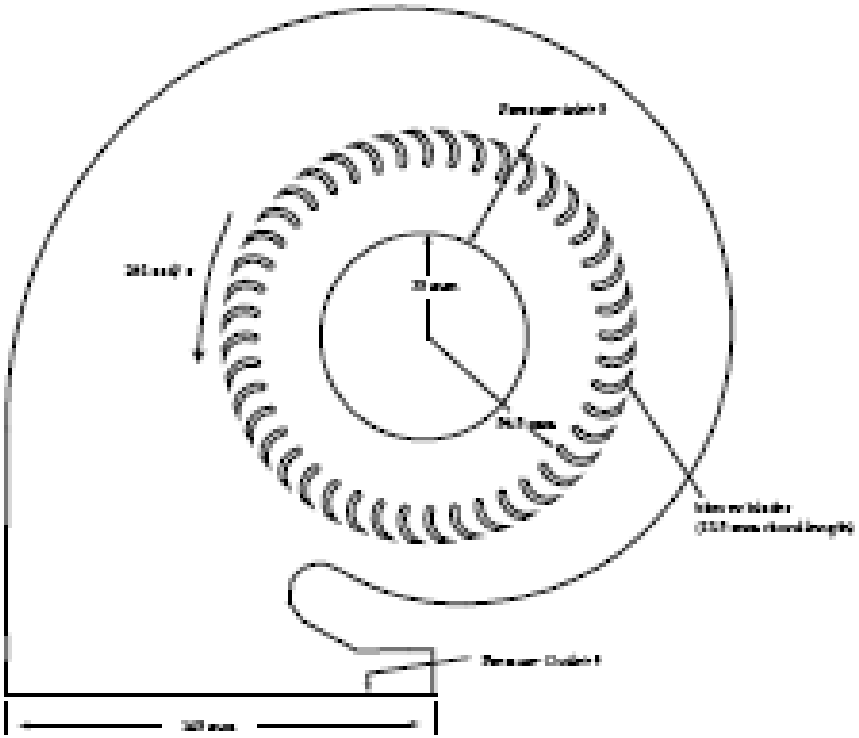
$$n = 2492rpm$$

$$Pt_{in} = 200Pa$$

$$Ps_{out} = 0Pa$$

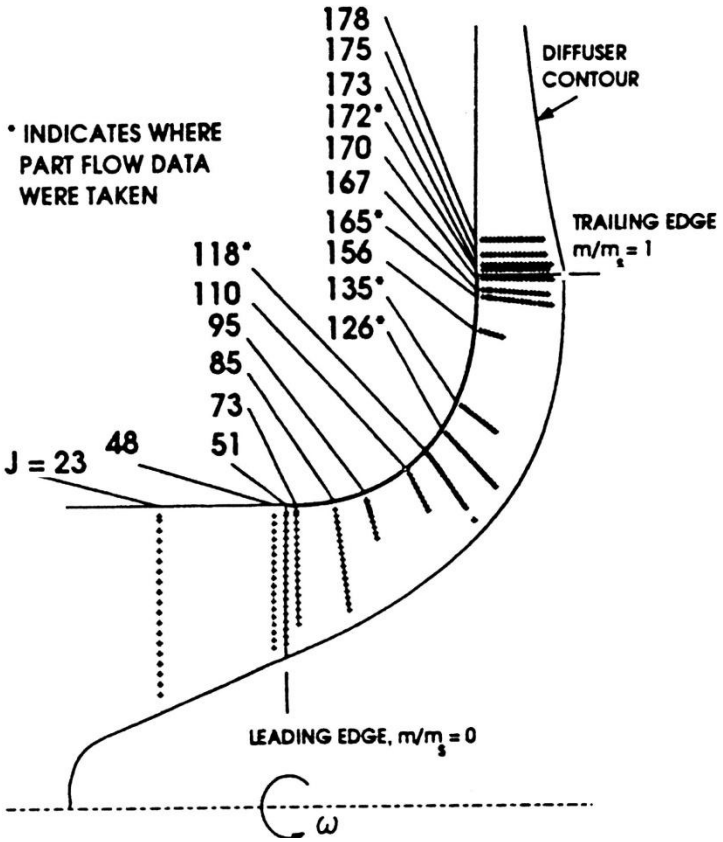
$$\Delta x = 0.004$$

$$\Delta t = 0.0001$$

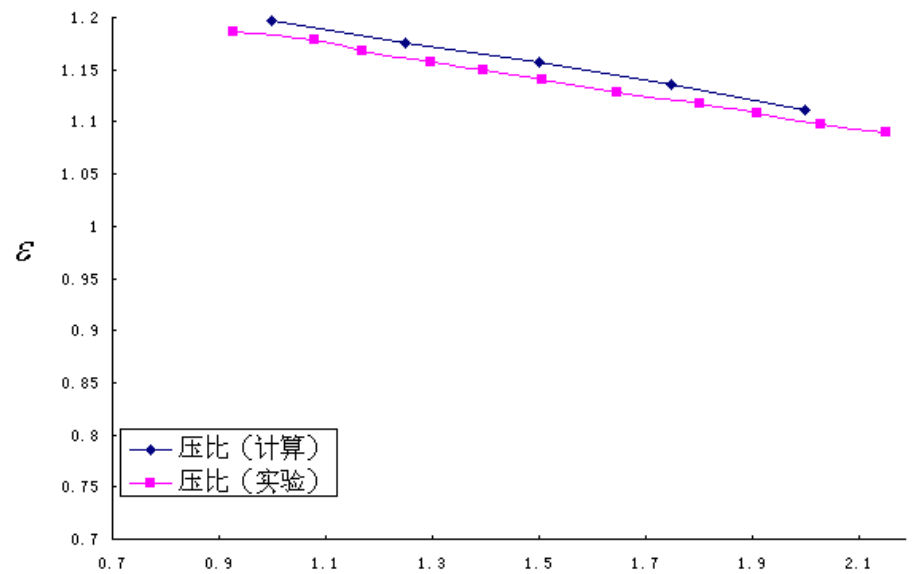


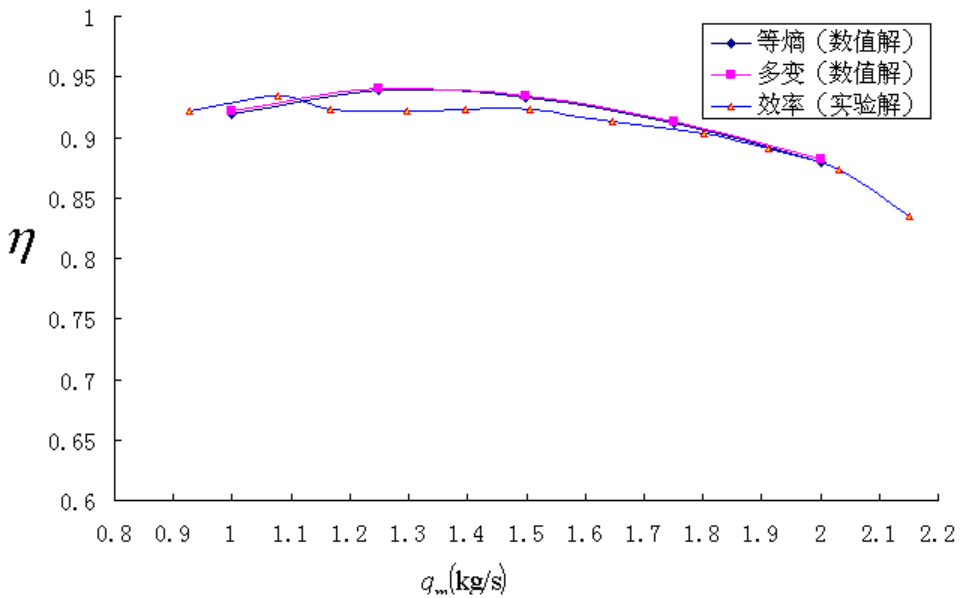
4. 三维离心叶轮内部流场及性能预测

主要参数：LSCC叶轮

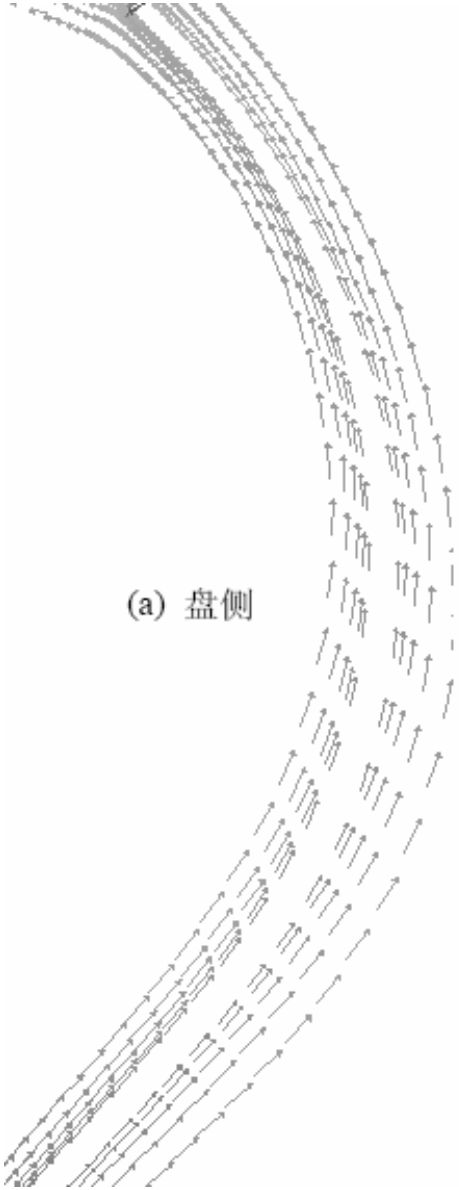


叶轮出口直径(m)， D_2	1.524
叶轮进口直径(m)， D_1	0.87
叶轮出口宽度(m)， b_2	0.141
叶轮进口宽度(m)， b_1	0.218
叶轮进口总温(K)， T_{in}	293
叶片数， Z	20
叶片出口角(Degree)， β_2	35
叶顶间隙(m)， a	0.00254
设计质量流量(kg/s)， m	30
设计转速(rpm)， N	1862
叶尖速度(m/s)， U_2	148.5
级总压比，	1.166

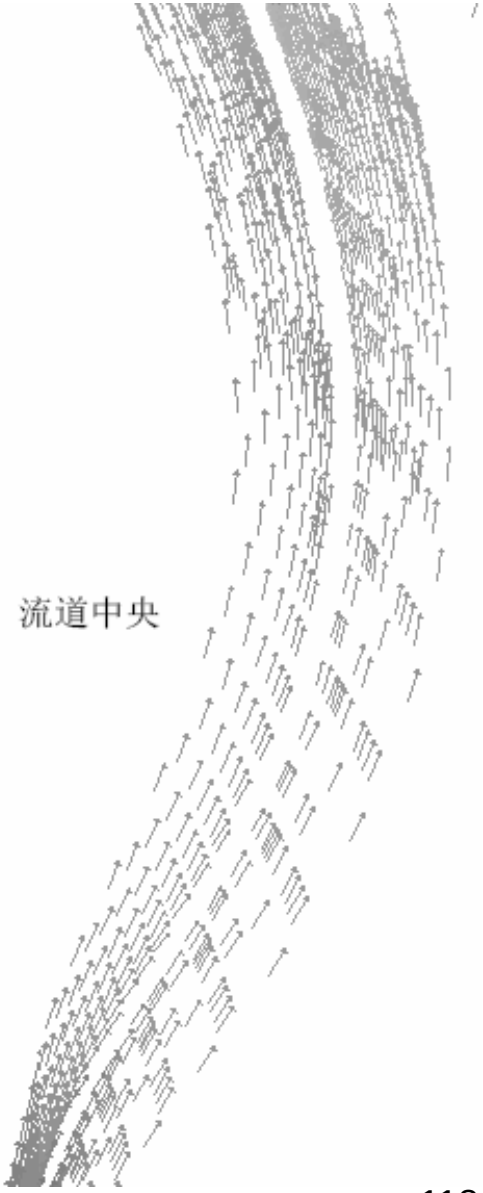




相对速度分布

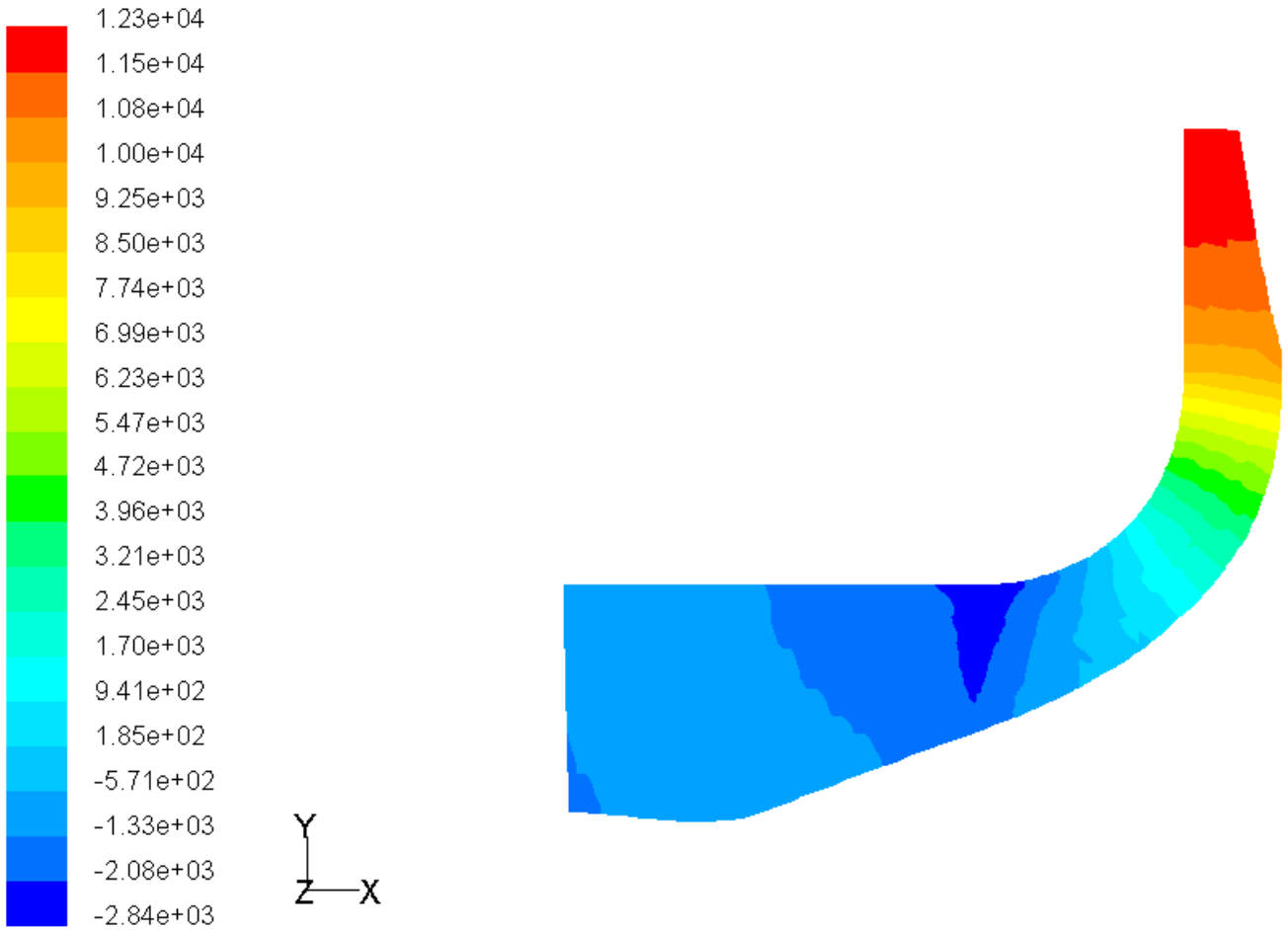


(a) 盘侧

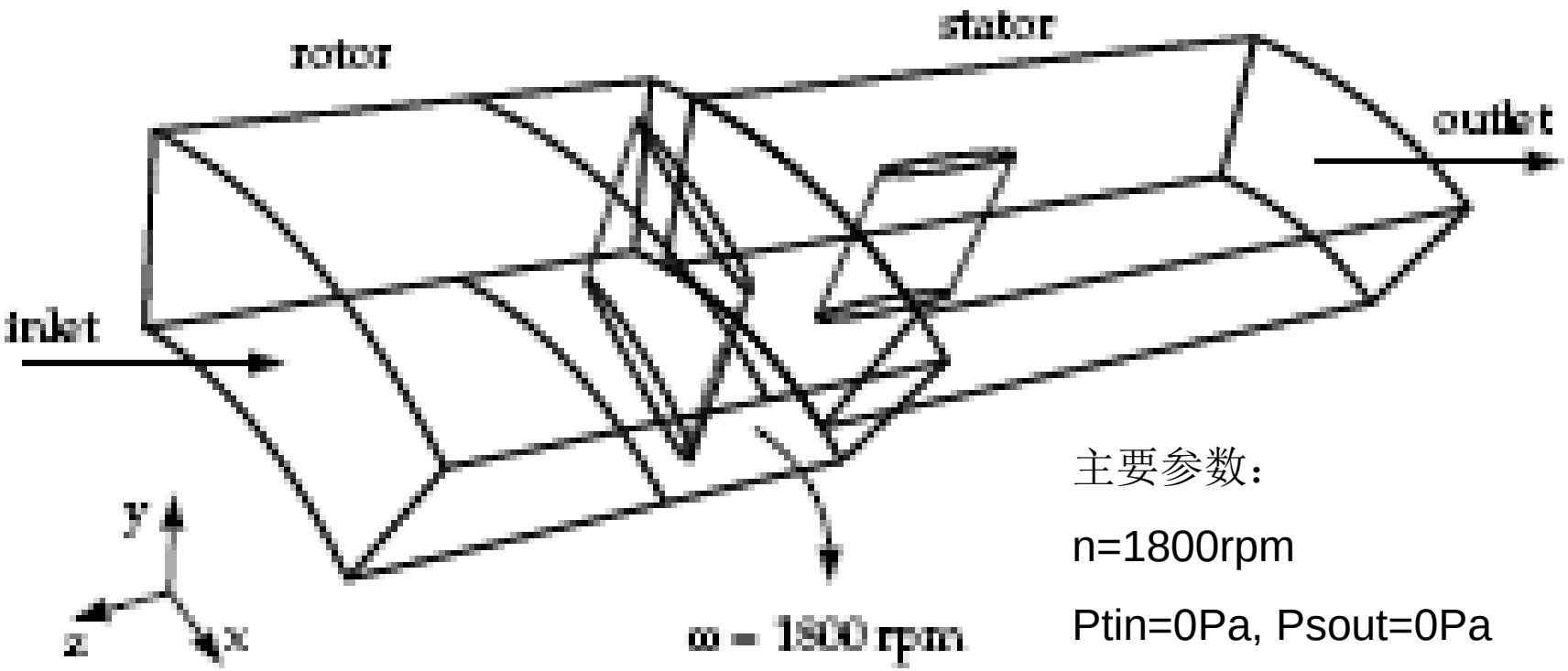


(b) 流道中央

子午面上的静压分布


1.23e+04
1.15e+04
1.08e+04
1.00e+04
9.25e+03
8.50e+03
7.74e+03
6.99e+03
6.23e+03
5.47e+03
4.72e+03
3.96e+03
3.21e+03
2.45e+03
1.70e+03
9.41e+02
1.85e+02
-5.71e+02
-1.33e+03
-2.08e+03
-2.84e+03
Y
Z
X

5. 单级轴流风机三维定常流动计算



主要参数：

n=1800rpm

Ptin=0Pa, Psout=0Pa

D1=206mm, D2=280mm

Nzrotor=9, Nzstator=12

6. 单级轴流透平机二维非定常流动计算

主要参数：

R=0.684m

n=410rpm

u=29.4m/s

Lx=0.1524m

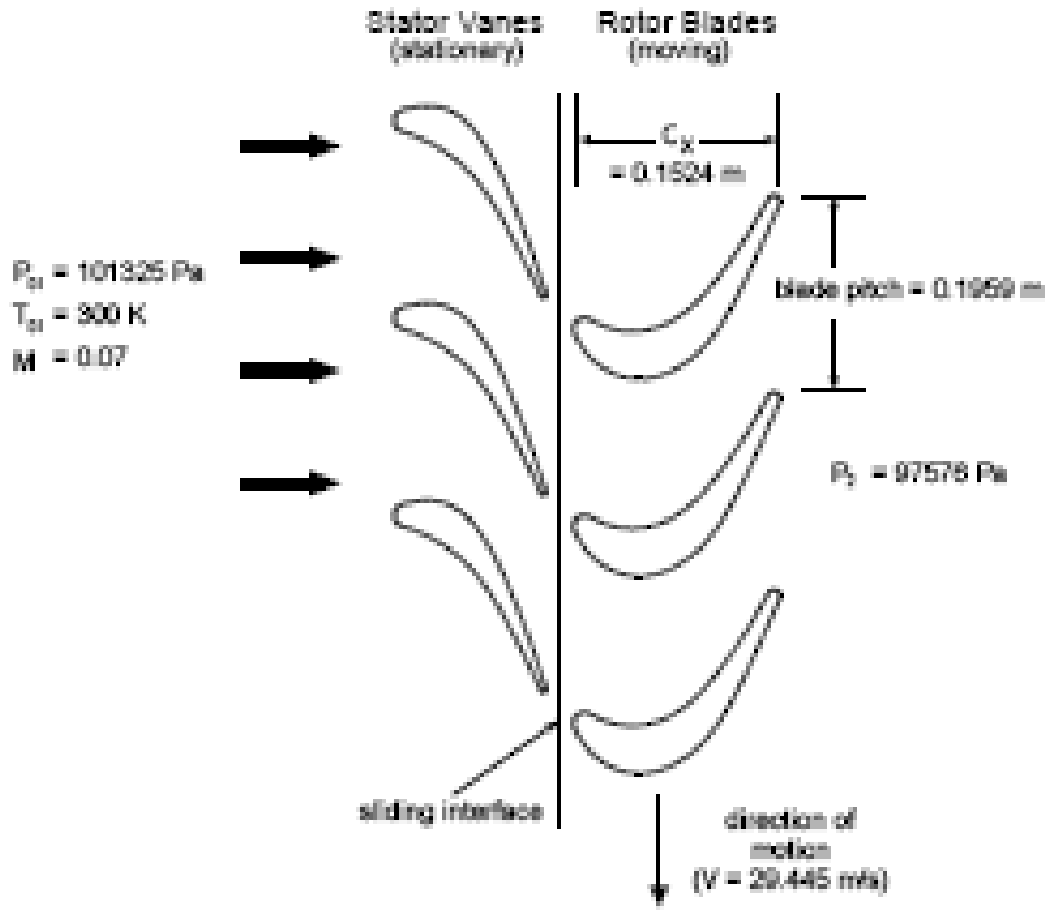
t=0.1959m

Ptin=101326Pa

Ttin=300K

Main=0.07

Psout=97576



Note: mesh is created in inch unit

正确评价商业流体动力学软件

（1）通用性好、使用方便

（2）精度？可扩展性？

上机作业：

对二维对称突扩槽道内的不可压缩流动进行数值计算。

几何条件：细槽道高度1,长度5，宽槽道高度3，长度60，

流动条件：进口速度为1，密度1，Re=10,100,1000,10000

提交结果：

（1）压力等值线图

（2）流线、速度矢量全局图及角区局部图

CFD复习

1．计算流体力学基础

（1）计算流体力学基本步骤；

（2）区域离散的两种方法：内节点法，外节点法；

（3）方程离散的两种方法：

有限差分法

一阶导数，二阶导数的各类差分格式（截断误差）的精度；

非守恒型对流扩散方程的有限差分法，截断误差的精度；

数值计算误差分析

有限体积法

基本步骤(a)积分（b）选型（c）整理

（4）代数方程组的求解方法：TDMA，PDMA，ADI，迭代法，CG法；

2．一维定常常系数无源项对流扩散方程的有限体积法

（1）问题：

$$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx},\quad x\in(0,L)$$

$$B.C.\ \Phi(0)=\Phi_0,\quad \Phi(L)=\Phi_L$$

$$-\Gamma\frac{d\Phi}{dx}+\rho u\Phi\ \Big|_0=q_0,\qquad \Phi\ \Big|_L=\Phi_L$$

ρ,u,Γ为常数

（2）模型方程的精确解

$$\Phi(x)=\Phi_0+(\Phi_L-\Phi_0)\frac{e^{P_e x/L}-1}{e^{Pe}-1}$$

$$\Phi=q_0\frac{L}{\Gamma}\frac{1}{Pe}+(\Phi_L-q_0\frac{L}{\Gamma}\frac{1}{Pe})e^{Pe(x/L-1)}$$

（3）模型方程的离散格式

离散过程及离散方程

5种三节点离散格式+2种五节点离散格式

中心格式及迎风格式的数值计算，与精确解比较

3. 高维对流扩散方程的离散过程
（1）二维、三维控制方程形式
（2）利用5种基本格式推导离散方程
（3）导热问题的数值解法

4. NS方程的SIMPLE算法
（1）二维不可压粘性流动的控制方程组
（2）数值求解NS方程组的3个困难点
（3）推导交错网格上的压力修正方程
（4）SIMPLE算法的基本步骤

5. 利用Gambit及Fluent计算流体力学商业软件求解流动问题的基本过程。

6. 利用Numeca计算流体力学软件求解流体机械内部流动的基本过程

进一步提高：

（1）计算流体动力学最新进展；

（见教材6.1节）

（2）计算格式的数学特性，主要是稳定性分析；

（见教材6.4.3）

（3）高精度计算格式，有限差分法？有限体积法？有限元法？谱方法？

导数的矩阵-向量乘积表示法

（4）高效率计算格式

并行计算流体力学：Linux+Fortran+MPI+CUDA or MIC

（5）CFD软件的自主化与实现

（6）非线性代数方程组的有效解法

（7）“三流”分析： 非定常流，多相流，非牛顿流

（8）多重尺度的流动分析：宏观连续介质假设什么情况下成立？

第一原理？MD? DSMC？DPD? LBM? SPH? NS？