能源与动力工程专业本科生课程

流体机械原理

（三元流部分：8学时）

张楚华

西安交通大学流体机械及工程系
电子信箱：chzhang@xjtu.edu.cn
手机号码：13088960570

教师联系方式

张楚华：流体机械及工程系教授、博导

办公地点：工程馆208

办公电话：82668723

手机：13088960570

Email：chzhang@mail.xjtu.edu.cn

研究方向：

- 流体机械内流理论与设计
- 并行计算流体力学

教材及参考文献

（1）教学用书：张楚华，琚亚平，流体机械内流理论与计算，机械工业出版社，2016

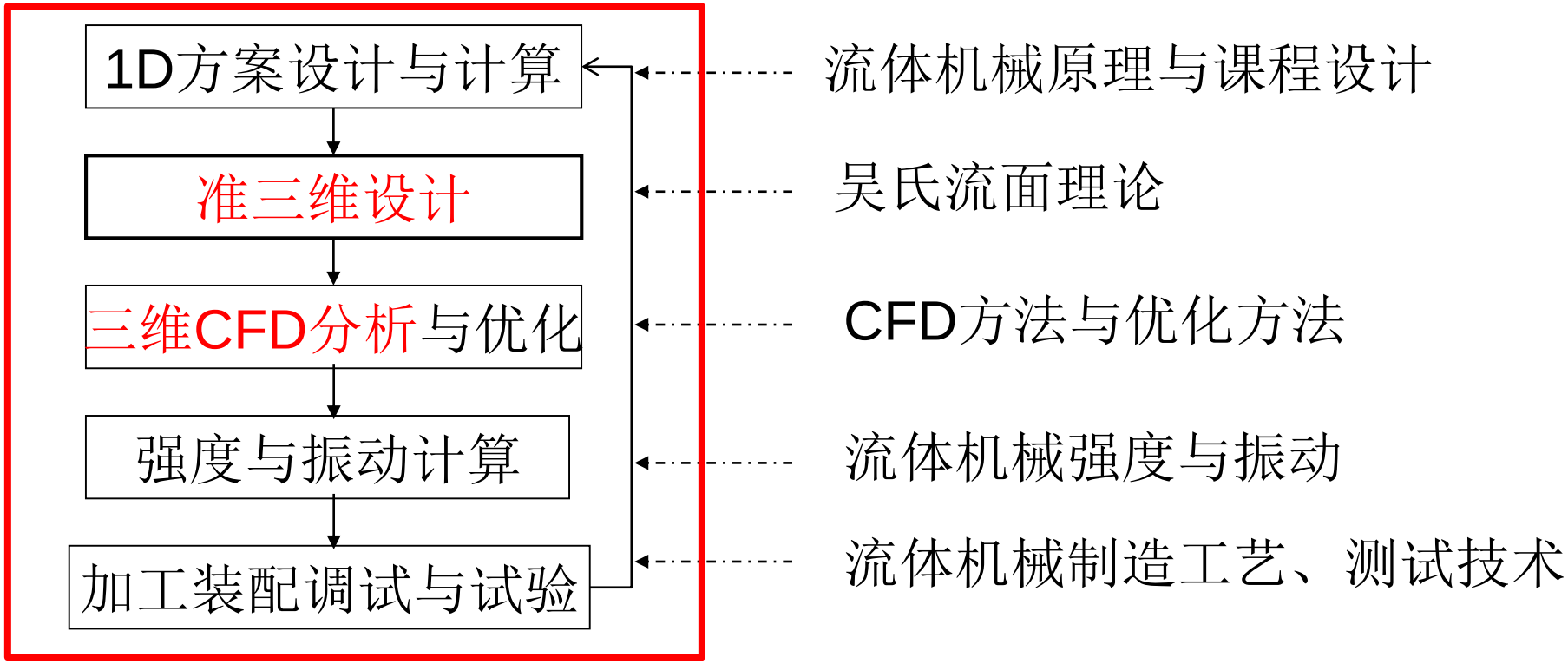
（2）权威期刊论文：

- ASME-JOT
- ASME-JEGTP
- ASME-JFE
- AIAA-JPP

（3）前沿会议论文：

- ASME-GT
- ASME-FED
- AIAA-CFD

流体机械全新研发过程　　相关理论与方法



教材内容

第1章 绪论

第2章 张量基本概念及运算

第3章 流体机械内部三维流动的基本方程

第4章 流体机械内部准三维流动理论

第5章 平面叶栅二维流动理论

理论篇

第6章 计算流体力学的数值方法

第7章 时间推进法及其应用

第8章 全速度压力修正法及其应用

计算篇

三元流部分教学重点：前4章，CFD入门

先修课程

必修课程：

（1）高等数学

（2）流体力学、工程热力学

（3）离心式压缩机原理或轴流式压缩机原理

选修知识：

（4）数学物理方程

（5）程序设计语言

第1章 绪 论

1.1 流体机械内流的特点

1.2 流体机械内流的研究方法

1.3 流体机械内流理论的发展

1.4 流体机械内流计算的作用

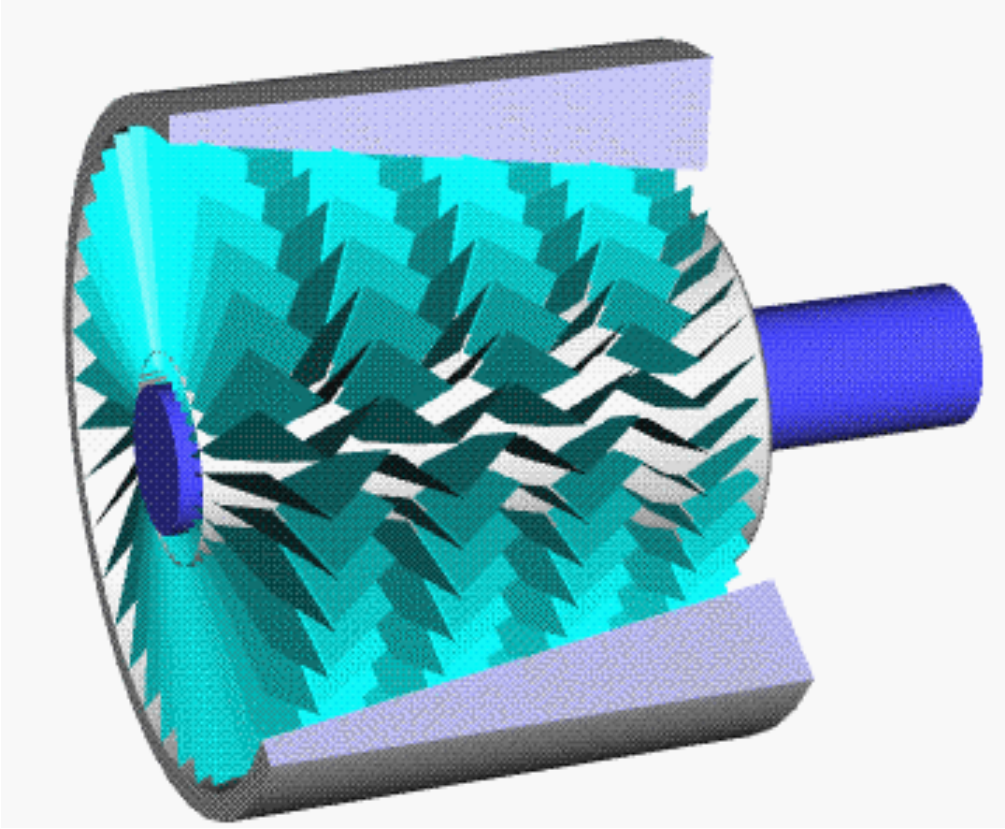
本书内容介绍

每章名称	重点与难点
第1章 绪论	流体机械内流的五个特点及研究方法
第2章 张量基本概念及运算	$\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$
第3章 流体机械内部三维流动的基本方程	绝对流动与相对流动之间的五个关系
第4章 流体机械内部准三维流动理论	准三维反问题的流线曲率法
第5章 平面叶栅二维流动理论	特征分析与定解条件
第6章 计算流体力学的数值方法	对流扩散方程的有限体积法
第7章 时间推进法及其应用	Jameson的Runge-Kutta时间推进法
第8章 全速度压力修正法及其应用	非结构化网格上的全速度压力修正法

流体机械运行特点

- 流体机械主要类型：叶片式压缩机、鼓风机、通风机和泵，俗称“三机一泵”。

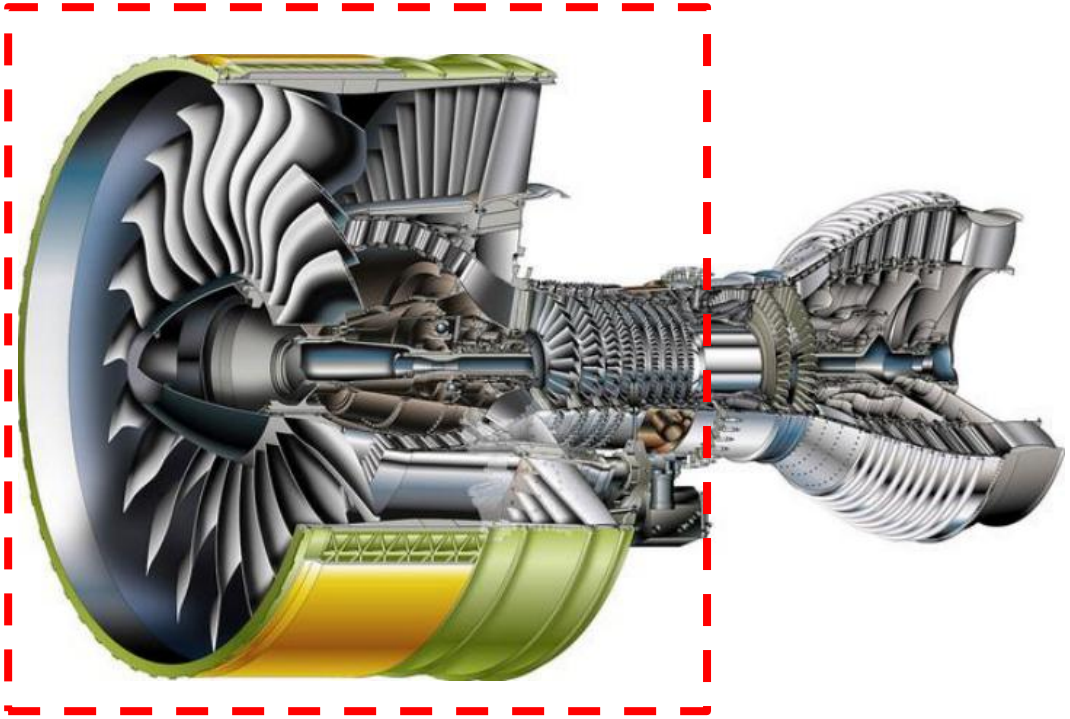
- 运行特点或者区别于其它机械的工作条件：旋转、弯曲、逆压。



导致流体机械内部流动非常复杂

流体机械运行特点

- 举例：航空发动机



- 运行特点：

风扇/压气机：

旋转、弯曲、逆压

燃烧室：

燃料、燃烧、高温

驱动/推进涡轮：

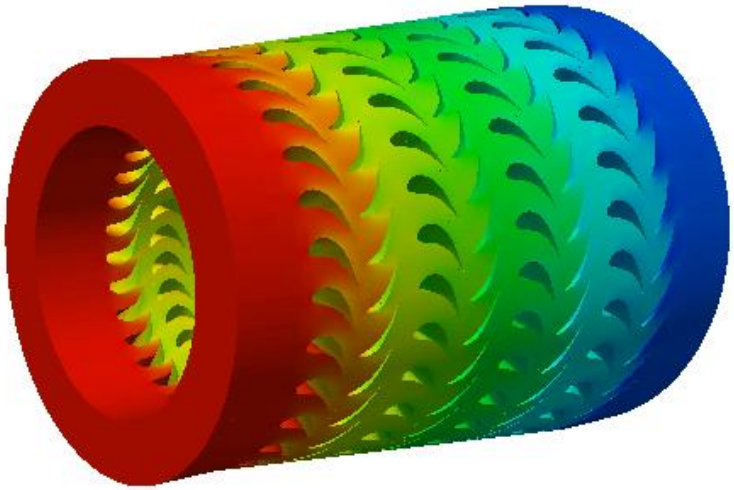
旋转、弯曲、高温

1.1 流体机械内流的特点

1. 三维流动

指流动参数为三个空间坐标的函数：$\Phi = \Phi(r, \varphi, z)$

不仅大小沿着叶高方向、旋转方向和流动方向上都有变化，而且流动速度的方向也是三维函数。



空间流动模型	典型离心压缩机效率
一维方法	80%左右
准三维方法	80－82%
全三维方法	82－86%
全三维非定常方法	预计86－89%

1.1 流体机械内流的特点

2. 粘性流动

粘性直接影响流动损失。

轴流压缩机流动损失：

- 叶型损失
  - 摩擦损失
  - 冲击损失
  - 分离损失
  - 尾迹损失
  - 激波损失
- 二次流损失
  - 通道涡损失
  - 角区涡损失
  - 叶顶间隙流损失
- 环端面损失

粘性流动模型有：

（1）近似粘性流动模型（如无粘方程+边界层方程）；

（2）完全粘性流动模型：Navier-Stokes方程，按照湍流模型来分，又可分为：

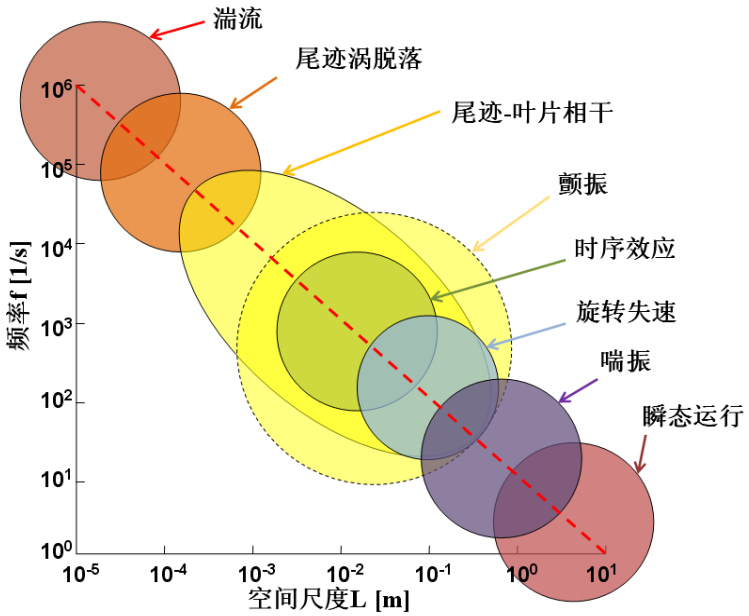
- 雷诺平均模型(RANS)
- 大涡模拟(LES)
- 直接数值模拟(DNS)

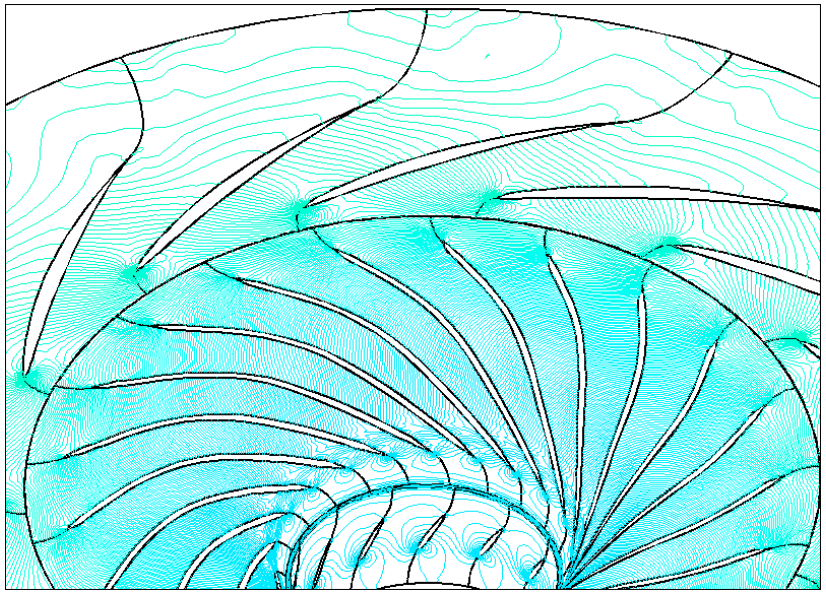
1.1 流体机械内流的特点

3. 非定常流动

流动参数还是时间的函数：$\Phi = \Phi(r, \varphi, z, t)$

非定常模型：混合平面法、叶道平均法和滑移网格法





1.1 流体机械内流的特点

4. 可压缩性

当流动马赫数高于0.3时需要考虑流动的可压缩性。按照马赫数从小到大，风机内部流动可分为：

不可压缩流动（Ma<0.3）；

亚音速流动（0.3<Ma<1.0）；

跨音速流动（Ma在1附近）；

超音速流动（Ma>1）。

跨/超音速流中出现激波，通过激波逆压梯度大，更易诱导叶片边界层分离，激波损失是主要流动损失。

1.1 流体机械内流的特点

5. 多相流动：

（1）在化工、空分、制冷低温等行业中的离心压缩机，其工作介质的热物性偏离理想气体，需要考虑实际气体效应；

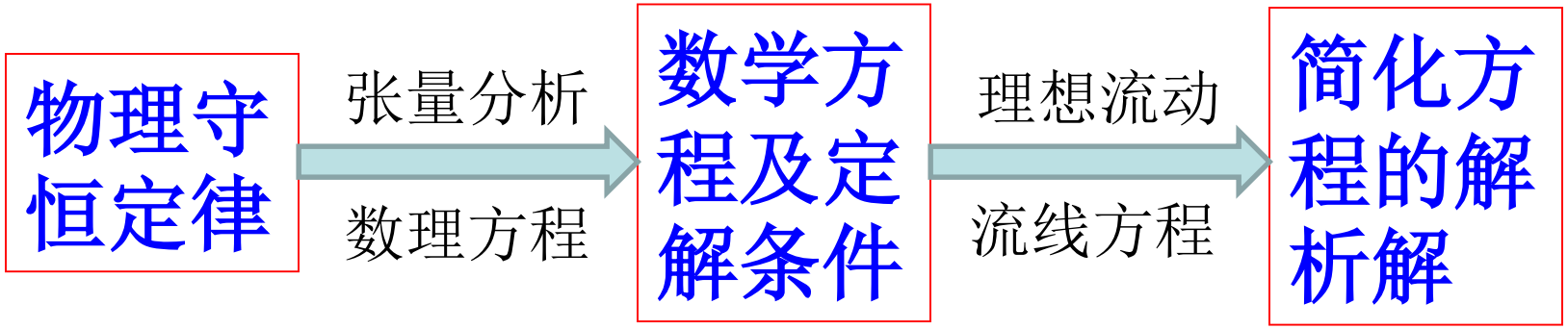
（2）在冶金、水泥等行业中风机内部气流还夹带着粉尘和固体颗粒，需要考虑气固两相流动问题；

（3）在泵中还会发生气蚀现象，需要考虑气液两相流动问题。

1.2 流体机械内流的研究方法

1. 流体机械内流理论

从质量、动量、能量三大物理守恒定律出发，利用张量分析、数学物理方程等数学工具，并针对流体机械动静叶片排相间排列的特点，建立起流体机械内部绝对流动和相对流动的控制方程组和定解条件，并试图简化方程得到解析解。



1.2 流体机械内流的研究方法

2. 流体机械内流测试技术

在实验室环境下，利用压力传感器、温度传感器、探针、热线仪、激光多普勒测速仪、图像粒子测速仪、压敏涂层技术等流场测试仪器，通过放大、缩小或原型实验，获得流体机械内流场的实验数据。

美国NASA、德国DLR相对厚道，解密了多台离心、轴流压气机的详细几何、运行、实验数据，已成为标模压气机，详见第一章参考文献[7-20]。

1.2 流体机械内流的研究方法

3. 流体机械内流计算方法

在计算机上，利用计算流体动力学方法离散流动方程组及其定解条件，求出流体机械内流场的近似数值解。其中两类主流计算方法是：

Patankar提出的压力修正算法。

Jameson提出的显式Runge-Kutta时间推进法。

- Denton JD. Some Limitations of Turbomachinery CFD[C]. ASME-GT2010-22540, 2010.

1.3 流体机械内流理论的发展

- 按照流动方程从低维到高维（计算量从小到大），流体机械内流理论模型有：

（1）早期的一维经验模型；

（2）叶栅/子午流道二维流动理论；

（3）基于两类流面理论的准三维流动理论；

（4）目前广泛应用的全三维流动理论；

（5）三维非定常流动理论仍处于探索阶段。

1.3 流体机械内流理论的发展

1. 一维流动模型

根据自变量的选取方式，分成如下两类：

（1）中心流线法，即所有流动参数都看成中心流线长度的函数；

（2）简单径向平衡方程，自变量取为半径，在轴流压缩机叶片排间隙内基本成立。

2. 二维流动理论

根据自变量的选取方式，分成如下两类：

（1）平面叶栅模型；

（2）通流理论，即无限多叶片理论。

这两类模型其实是S1流面和S2流面的雏形。

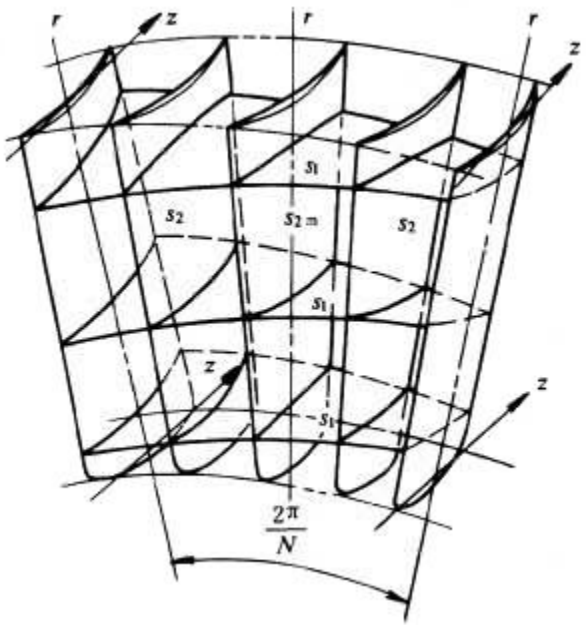
1.3 流体机械内流理论的发展

3. 准三维流动理论

吴仲华在1952年提出了基于S1流面和S2流面的三维流动理论；

S1流面是由通过圆弧线的流线形成的；S2流面是由通过径向线的流线形成的；

准三维流动理论将三维流动分解为mS1×S2m流面上的二维流动，并假设S1流面为回转面。



准三维设计软件：

- ◆ NREC-Concept
- ◆ CFturbo

1.3 流体机械内流理论的发展

4. 全三维流动理论

- 求解方程：Navier-Stokes方程+湍流模型方程；
- 流体机械内流三大商业CFD软件：
  - Ansys-Fluent （燃烧室）
  - Ansys-CFX （高压涡轮）
  - Numeca （风扇/压气机/低压涡轮）

1.4 流体机械内流计算的作用

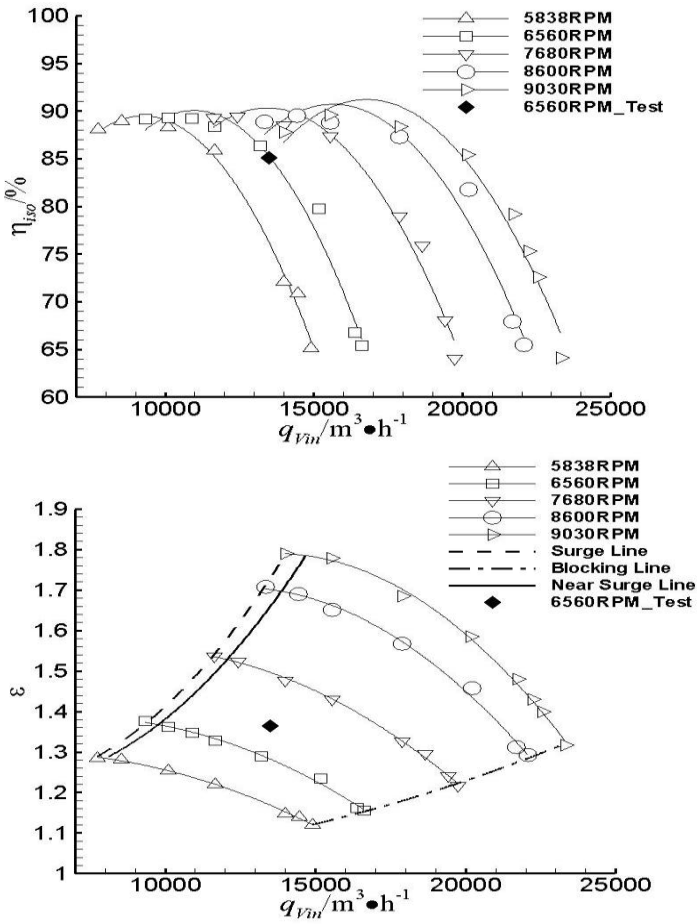
CFD是CAE的重要组成部分，在流体机械中的作用：

（1）流体机械内流机理与损失

（2）流体机械性能预测与设计

（3）流体机械安全运行与控制

（4）流体机械节能与降噪



三级天然气管线压缩机性能CFD预测

课外阅读资料

Denton JD. Some Limitations of Turbomachinery CFD[C]. ASME-GT2010-22540, 2010.

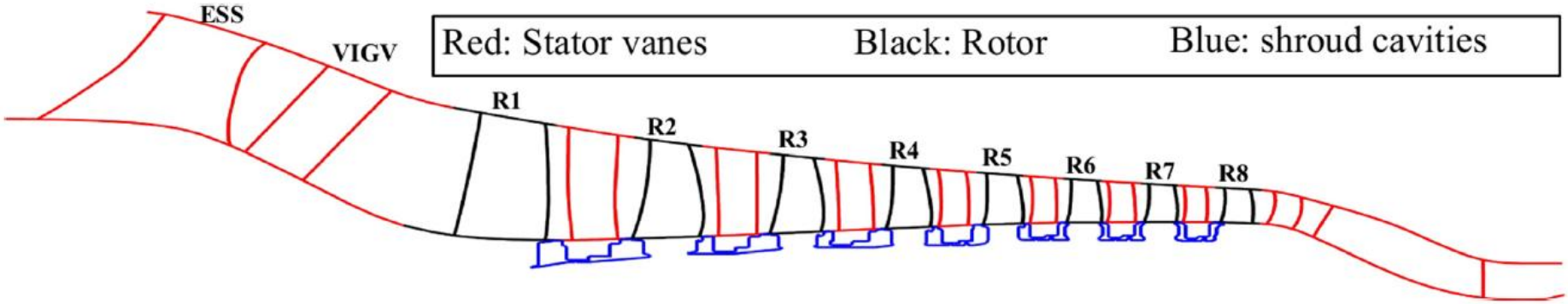
目的：

（1）掌握科技文献收集、阅读、消化和总结方法；

（2）了解目前CFD对流体机械气动性能的预测精度；

（3）了解流体机械CFD的现有不足和未来发展方向。

Wang F, et al. Simulation of Multistage Compressor at Off-Design Conditions, ASME Journal of Turbomachinery, 2018, 140(2): 021011



本章小结

1.1 流体机械内流的特点： **5个特点**

1.2 流体机械内流的研究方法： **3种方法**

1.3 流体机械内流理论的发展： **5个阶段**

1.4 流体机械内流计算的作用： **4种作用**

第2章 张量基本概念及运算

2.1 张量的定义

2.2 流体力学中常用的张量

2.3 笛卡尔张量分析

2.4 圆柱坐标系下的张量分析

为什么要学张量分析？

- **描述刚体或质点的受力、运动、动力的物理量是矢量，而连续介质的物理量如应力、应变、变形率等是二阶张量，是并矢**
- **描述旋转机械最恰当的坐标系是圆柱坐标系，不是笛卡尔坐标系，而张量本身不依赖于特定坐标系**

本书内容介绍

每章名称	重点与难点
第1章 绪论	流体机械内流的五个特点及研究方法
第2章 张量基本概念及运算	$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$
第3章 流体机械内部三维流动的基本方程	绝对流动与相对流动之间的五个关系
第4章 流体机械内部准三维流动理论	准三维反问题的流线曲率法
第5章 平面叶栅二维流动理论	特征分析与定解条件
第6章 计算流体力学的数值方法	对流扩散方程的有限体积法
第7章 时间推进法及其应用	Jameson的Runge-Kutta时间推进法
第8章 全速度压力修正法及其应用	非结构化网格上的全速度压力修正法

李克强透露中国航空发动机不行原因:数学基础不行

2015年1月27日上午，在国务院第一会议室，围坐在会场中央椭圆形桌边的分别是国务院领导，以及被邀请来中南海给《政府工作报告》提意见和建议的10位代表。

当许宁生建议政府要加大对科技创新支持时，李克强突然问：“复旦大学这几年报考纯数学的人数是多了还是少了？”

李克强说：“刚才为什么我要问纯数学？我们要搞原始创新，就必须更加重视基础研究，没有扎实的基础研究，就不可能有原始创新。国际数学界的最高奖项菲尔兹奖，中国至今没有一人获得。现在IT业发展迅猛，源代码靠什么？靠数学！我们造大飞机，但发动机还要买国外的，为什么？数学基础不行。材料我们都过关了。所以，大学要从百年大计着眼，确实要有一批人坐得住冷板凳的人。”

流体机械专业如何解读李克强总理的讲话？

2.1 张量的定义

- 张量是各种物理量在空间上的数学表示，是沟通物理模型到数学模型的桥梁。
  - 物理量：流固热声电磁光
  - 空间：欧几里德空间、黎曼空间，用坐标系基矢量描述
  - 数学表示：并矢形式、分量形式、矩阵形式
- 张量分析是研究张量的基本概念、基本运算和基本应用的方法。
- 张量表示方法的优点：
  - 物理概念清晰、数学推导严密、表达形式简洁

2.1 张量的定义

线性空间（矢量空间）

- 定义：数域P上的非空集合V，其上定义了加法和数乘运算，并对这两类运算封闭。
- 性质：n维线性空间上可以找出n个线性无关的基矢量，该空间上任意矢量都能用这n个基矢量的线性组合来表达，系数即该矢量在该组基矢量下的分量。

欧氏空间（线性内积空间）

- 定义：实数域R上的线性空间V，其上又定义了内积运算。这样就可以定义矢量的长度和夹角了。
- 性质：n维欧氏空间具有线性空间的所有性质，且可以找出n个线性无关且单位正交的基矢量。

利用坐标系定义出这n个线性无关且单位正交的基矢量

三维笛卡尔坐标系的坐标基矢量为： $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$

三维空间上任一矢量表示成： $\mathbf{a} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3$

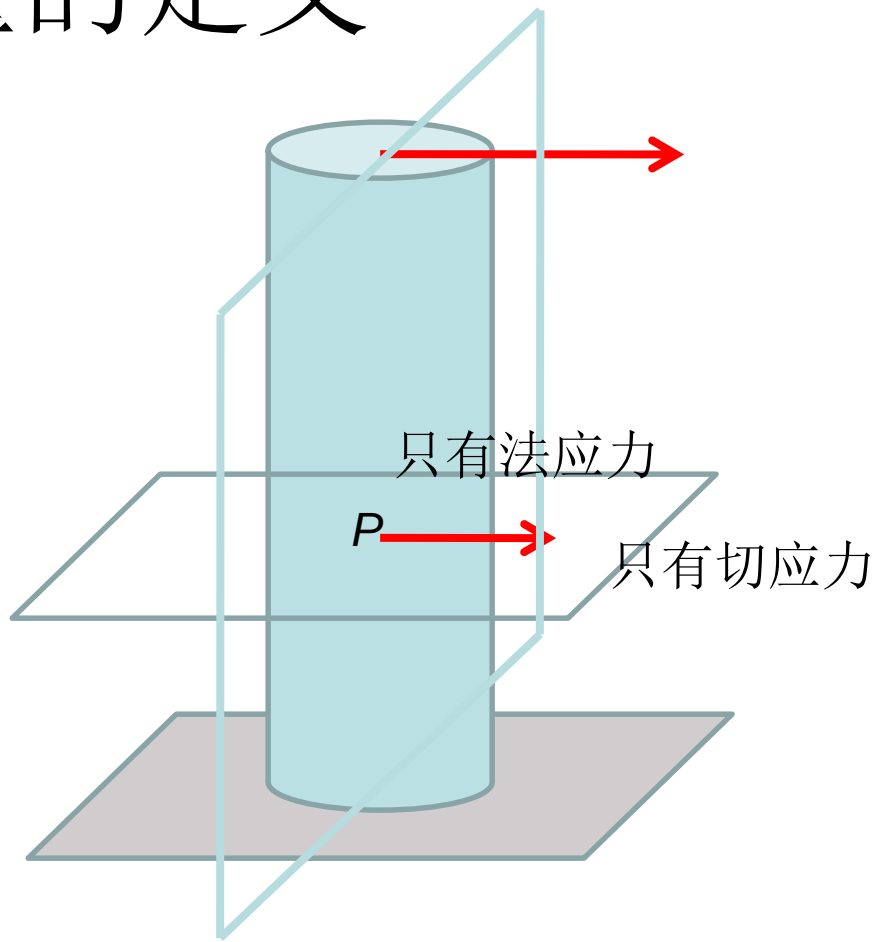
2.1 张量的定义

举例1：矢量

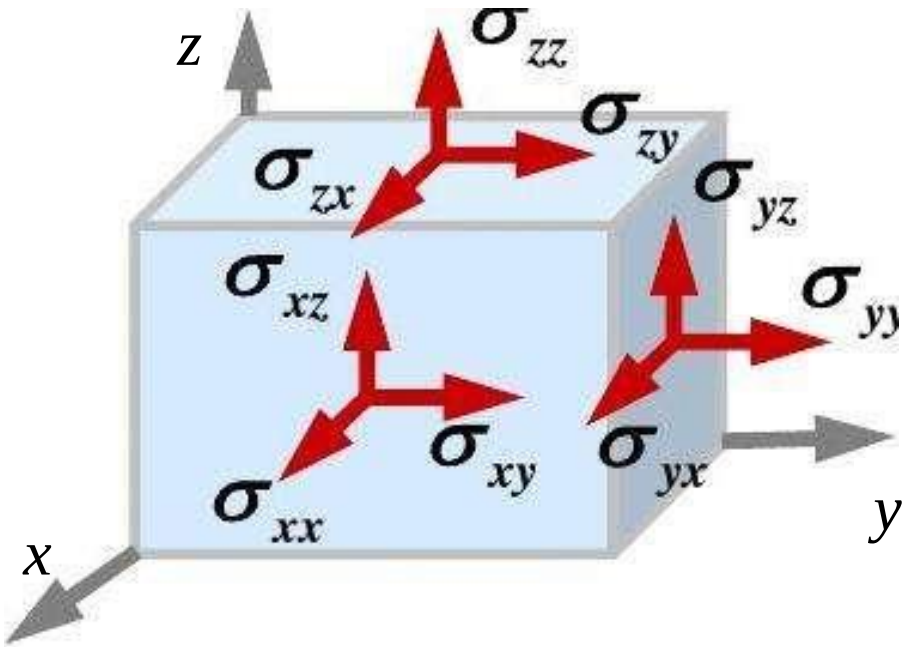
刚体质点的位置矢量、速度、加速度、力等物理量

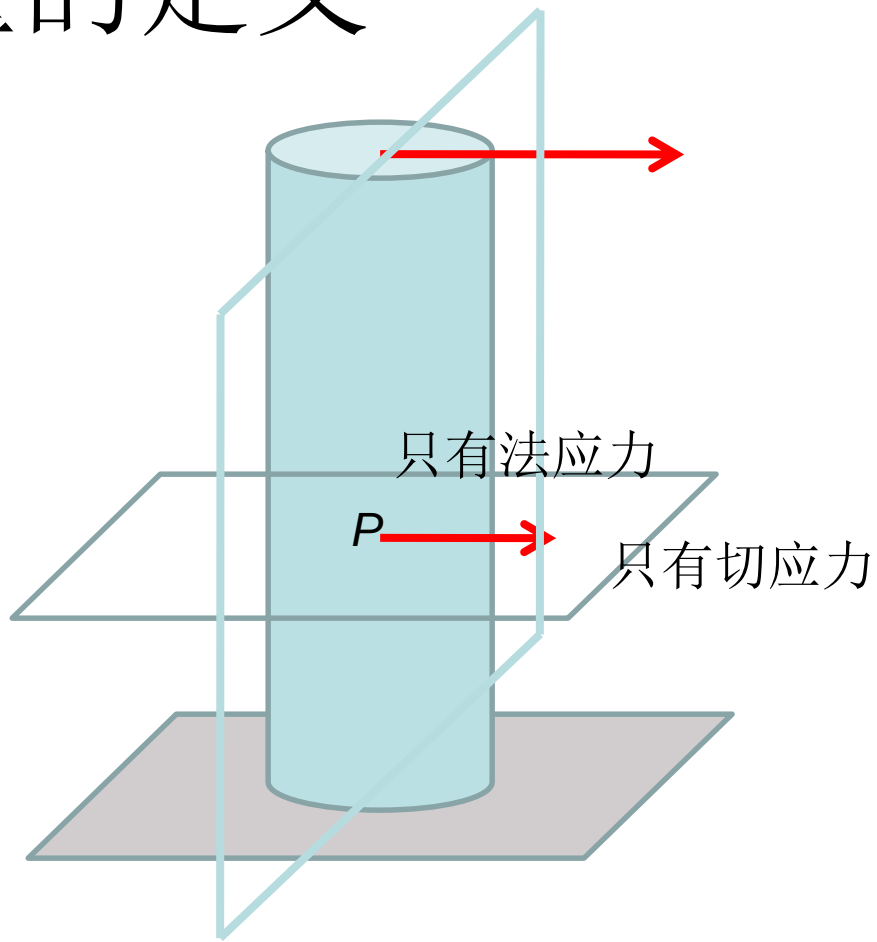
举例2：二阶应力张量

连续介质P点处的表面力不仅有大小有方向，而且和作用面的法向有关：



2.1 张量的定义





$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{u}_i \boldsymbol{\sigma}_i = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \mathbf{u}_i \sigma_{ij} \mathbf{u}_j$$

同样地，在三维欧氏空间上定义出其它二阶张量、三阶张量等

2.2 流体力学中常用的张量

- 0阶张量（标量），$\rho, T, p, s, h, c_p, c_v, \nabla\cdot\mathbf{v}$ 分量个数 3^0
- 1阶张量（矢量），$\mathbf{r}_P, \mathbf{v}, \frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \mathbf{f}, \nabla\varphi, \nabla\times\mathbf{v}, \nabla\cdot\mathbf{P}, \nabla\cdot\mathbf{S}$ 分量个数 3^1
- 2阶张量，如应力张量$\mathbf{P}$，变形率张量$\mathbf{S}$ 分量个数 3^2
- 3阶张量，如置换符号ε_{ijk} 分量个数 3^3
- 4阶张量，如线性流体的粘性系数μ_{ijkl} 分量个数 3^4

不学习张量分析基本知识，就不大可能理解粘性系数为什么有两个：第一、第二动力粘性系数；也不大可能理解粘性流动的本构方程

课后复习：景思睿，张鸣远，流体力学，4. 4和4. 5

2.3 笛卡尔张量分析

- **4个记号：**
  - 求和指标：一项中同一指标出现两次，则表示该项对该指标遍历求和

$$a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

  - 自由指标：等式两端出现同一个指标，则该等式对该指标遍历成立

$$A_{ij} x_j = b_i$$

  - 克罗尼克符号：$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & 当 i = j \\ 0, & 当 i \neq j \end{cases}$
  - 置换符号：

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & 当(i, j, k)组成偶排列，如（1,2,3） \\ -1, & 当(i, j, k)组成奇排列，如（3,2,1） \\ 0, & 当(i, j, k)不成排列，如（1,1,1） \end{cases}$$

2.3 笛卡尔张量分析

2.3.1 坐标基矢量

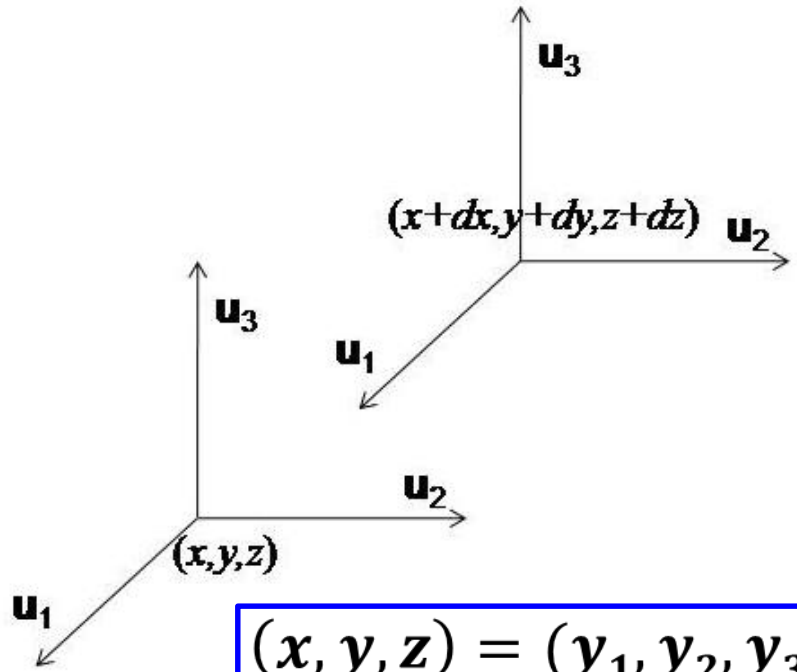
（1）单位正交性：

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$$

$$\mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k) = \varepsilon_{ijk}$$

（2）空间无关性：

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial y_j} = 0$$



$$(x, y, z) = (y_1, y_2, y_3)$$
$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$$

利用这两个性质，很容易写出笛卡尔张量的代数与微分运算式

2.3 笛卡尔张量分析

2.3.2 矢量的代数运算

1）矢量分解：

$$\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{3}a_i\mathbf{u}_i=a_i\mathbf{u}_i$$

2）矢量相等：

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}\text{当且仅当}a_i=b_i$$

3）矢量加法：

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_i+b_i)\mathbf{u}_i$$

4）矢量数乘：

$$\alpha\mathbf{a}=(\alpha a_i)\mathbf{u}_i$$

线性运算

5）矢量内积或点乘：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_i\mathbf{u}_i\cdot b_j\mathbf{u}_j=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i$$

6）矢量外积或叉乘：

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=a_i\mathbf{u}_i\times b_j\mathbf{u}_j=\varepsilon_{ijk}a_ib_j\mathbf{u}_k=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3\end{vmatrix}$$

7）线性二重积：

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=a_i\mathbf{u}_i\cdot(b_j\mathbf{u}_j\times c_k\mathbf{u}_k)=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

8）矢性二重积：

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

9）并矢：$\mathbf{ab}=a_ib_j\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j$

内积运算

2.3 笛卡尔张量分析

2.3.3 矢量的微分运算

梯度算子（哈密顿算子）：

$$\boxed{\nabla = \mathbf{u}_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \mathbf{u}_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \mathbf{u}_3 \frac{\partial}{\partial y_3} = \mathbf{u}_i \frac{\partial}{\partial y_i}}$$

– 梯度： $\nabla \varphi = \mathbf{u}_i \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i}$ $\qquad \nabla \mathbf{v} = \mathbf{u}_i \dfrac{\partial v_j \mathbf{u}_j}{\partial y_i} = \mathbf{u}_i \dfrac{\partial v_j}{\partial y_i} \mathbf{u}_j$

– 散度： $\nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_i \cdot \dfrac{\partial v_j}{\partial y_i} \mathbf{u}_j = \delta_{ij} \dfrac{\partial v_j}{\partial y_i} = \dfrac{\partial v_i}{\partial y_i} = \dfrac{\partial v_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y_2} + \dfrac{\partial v_3}{\partial y_3}$

– 旋度： $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{u}_i \times \dfrac{\partial v_j}{\partial y_i} \mathbf{u}_j = \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial v_j}{\partial y_i} \mathbf{u}_k = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial y_1} & \dfrac{\partial}{\partial y_1} & \dfrac{\partial}{\partial y_1} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

2.3 笛卡尔张量分析

2.3.4 二阶张量举例

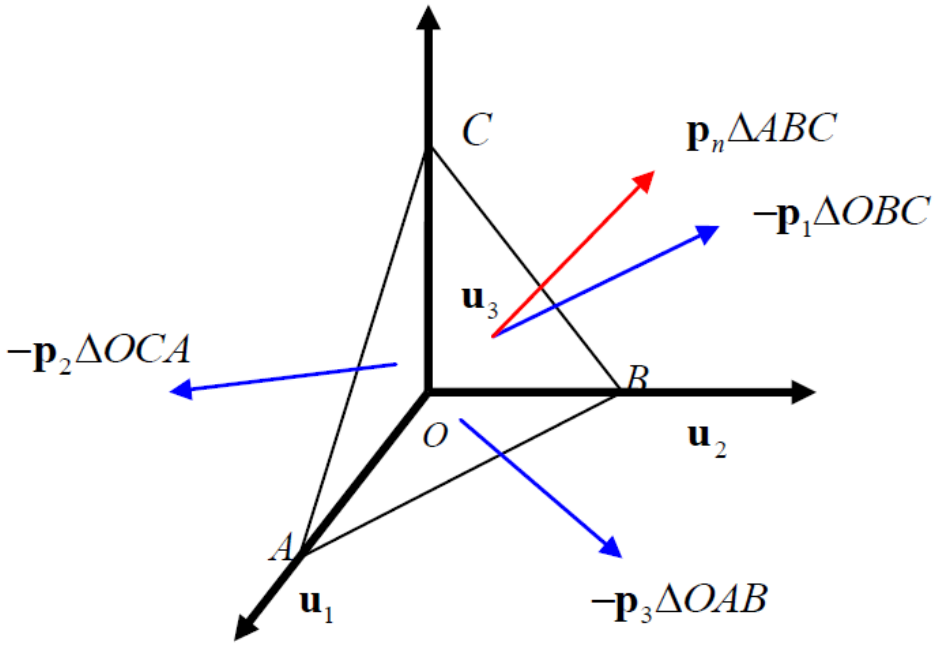
应力张量

已知：$\mathbf{u}_i$指向的流体作用在单位面积上表面力为 $\mathbf{p}_i$

求: 任意方向 $\mathbf{n}$上的表面力？

解：微元四面体*OABC*的力平衡条件：

$$\sum \text{体积力} + \sum \text{表面力} = \mathbf{0}$$



体积力为三阶小量，忽略

有些教材将表面力叫做应力矢量

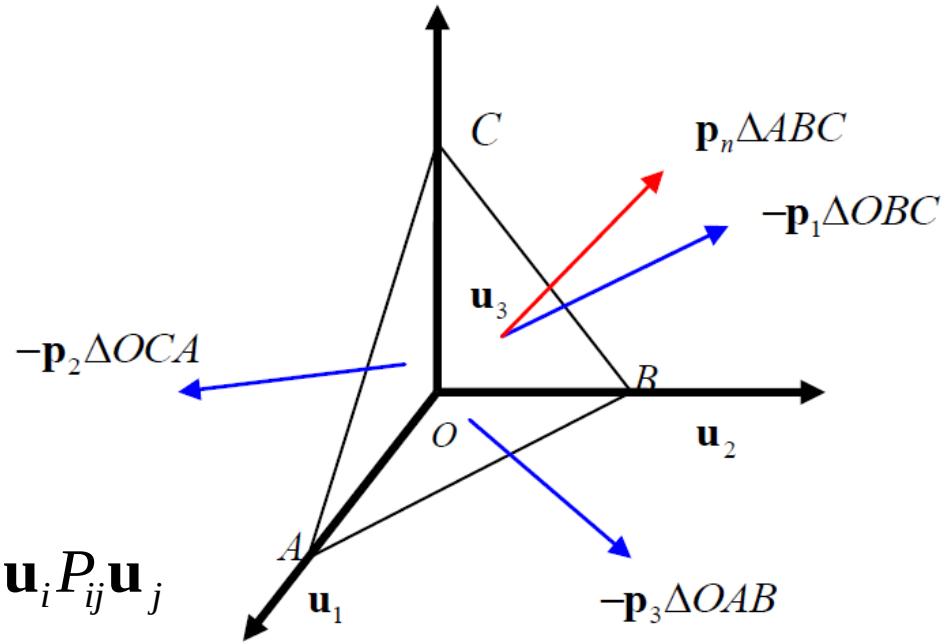
2.3 笛卡尔张量分析

$$\mathbf{p}_n \Delta ABC - \mathbf{p}_1 \Delta OBC - \mathbf{p}_2 \Delta OCA - \mathbf{p}_3 \Delta OAB = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_1 \frac{\Delta OBC}{\Delta ABC} + \mathbf{p}_2 \frac{\Delta OCA}{\Delta ABC} + \mathbf{p}_3 \frac{\Delta OAB}{\Delta ABC}$$

$$\mathbf{p}_n = n_1 \mathbf{p}_1 + n_2 \mathbf{p}_2 + n_3 \mathbf{p}_3 = n_i \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{p}_n = n_i \mathbf{p}_i = n_i P_{ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_i P_{ij} \mathbf{u}_j$$



引入二阶应力张量：$\mathbf{P} = \mathbf{u}_i \mathbf{p}_i = \mathbf{u}_i P_{ij} \mathbf{u}_j$

则得 $\mathbf{p_n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$

2.3 笛卡尔张量分析

二阶应力张量的讨论：

（1）完全描述了一点处的表面力即应力状态：

$$\mathbf{p_n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$$

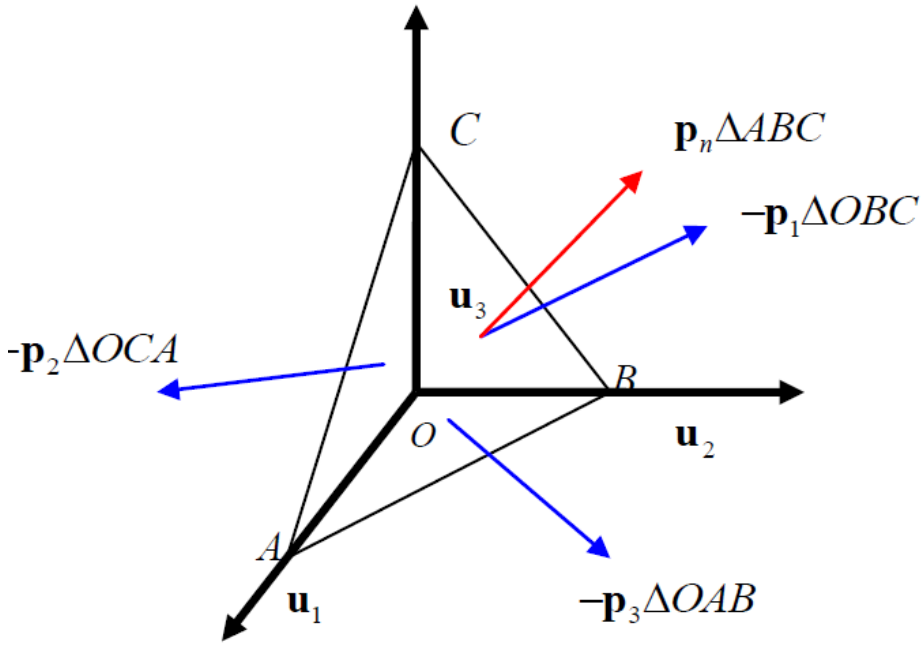
（2）根据力矩平衡条件，为二阶对称张量：

$$P_{ij} = P_{ji}$$

（3）对于理想流动，表面力只有压力，没有剪切力，即

$$\mathbf{p}_i = -p\mathbf{u}_i \quad \text{或者} \quad P_{ij} = -p\delta_{ij}$$

则 $\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_i P_{ij} \mathbf{u}_j = -n_i p \delta_{ij} \mathbf{u}_j = -p\mathbf{n}$



2.3 笛卡尔张量分析

二阶张量举例小结

	应力张量	位移张量	变形率张量
物理意义	描述连续介质应力或表面力状态	描述连续介质运动状态	描述连续介质变形程度
并矢形式	$\mathbf{P}=\mathbf{u}_i\mathbf{p}_i=\mathbf{u}_iP_{ij}\mathbf{u}_j$	$\mathbf{D}=(\nabla\mathbf{v})^T$	$\mathbf{S}=\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{v})^T+\nabla\mathbf{v}]$
分量形式	P_{ij}	$D_{ij}=\frac{\partial v_i}{\partial y_j}$	$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j}+\frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right)$
矩阵形式	$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_1}{\partial y_2} & \frac{\partial v_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial y_2} & \frac{\partial v_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial y_1} & \frac{\partial v_3}{\partial y_2} & \frac{\partial v_3}{\partial y_3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_3}+\frac{\partial v_3}{\partial y_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_2}\right) & \frac{\partial v_2}{\partial y_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial y_3}+\frac{\partial v_3}{\partial y_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y_2}+\frac{\partial v_2}{\partial y_3}\right) & \frac{\partial v_3}{\partial y_3} \end{pmatrix}$

2.3 笛卡尔张量分析

2.3.5 二阶张量的代数运算

1）分解：

$$\mathbf{A}=\mathbf{u}_i A_{ij}\mathbf{u}_j$$

2）相等：

$\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 当且仅当 $A_{ij}=B_{ij}$

3）加减法：

$$\mathbf{A}\pm\mathbf{B}=\mathbf{u}_i\left(A_{ij}\pm B_{ij}\right)\mathbf{u}_j$$

4）数乘：

$$\alpha\mathbf{A}=\mathbf{u}_i\left(\alpha A_{ij}\right)\mathbf{u}_j$$

5）并矢：

$$\mathbf{ab}=a_i b_j\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j$$

6）缩并：

$$\pi_{ii}=\pi_{11}+\pi_{22}+\pi_{33}$$

7）内积：

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{S}=\mathbf{u}_i\tau_{ik}\mathbf{u}_k\cdot\mathbf{u}_l S_{lj}\mathbf{u}_j=\mathbf{u}_i\tau_{ik}S_{kj}\mathbf{u}_j$$

8）二次并联内积：

$$\boldsymbol{\tau}:\mathbf{S}=\mathbf{u}_i\tau_{ij}\mathbf{u}_j:\mathbf{u}_k S_{kl}\mathbf{u}_l=\tau_{ij}S_{ij}$$

9）二次串联内积：

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\mathbf{S}=\mathbf{u}_i\tau_{ij}\mathbf{u}_j\cdot\cdot\mathbf{u}_k S_{kl}\mathbf{u}_l=\tau_{ij}S_{ji}$$

10）转置

$$\boldsymbol{\tau}^T=\mathbf{u}_i\tau_{ji}\mathbf{u}_j$$

2.3 笛卡尔张量分析

2.3.6 二阶张量的微分运算

在流体力学中，与二阶张量有关的微分运算式主要有两个：

1）速度的梯度：$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{u}_i \dfrac{\partial v_j}{\partial y_i} \mathbf{u}_j$

其为二阶张量，是位移张量的转置，据此可写出变形率张量

2）应力张量的散度：$\nabla \cdot \mathbf{P} = \mathbf{u}_i \cdot \dfrac{\partial}{\partial y_i} \mathbf{u}_k P_{kj} \mathbf{u}_j = \dfrac{\partial P_{ij}}{\partial y_i} \mathbf{u}_j$

其为矢量。对于理想流动 $P_{ij} = -p\delta_{ij}$

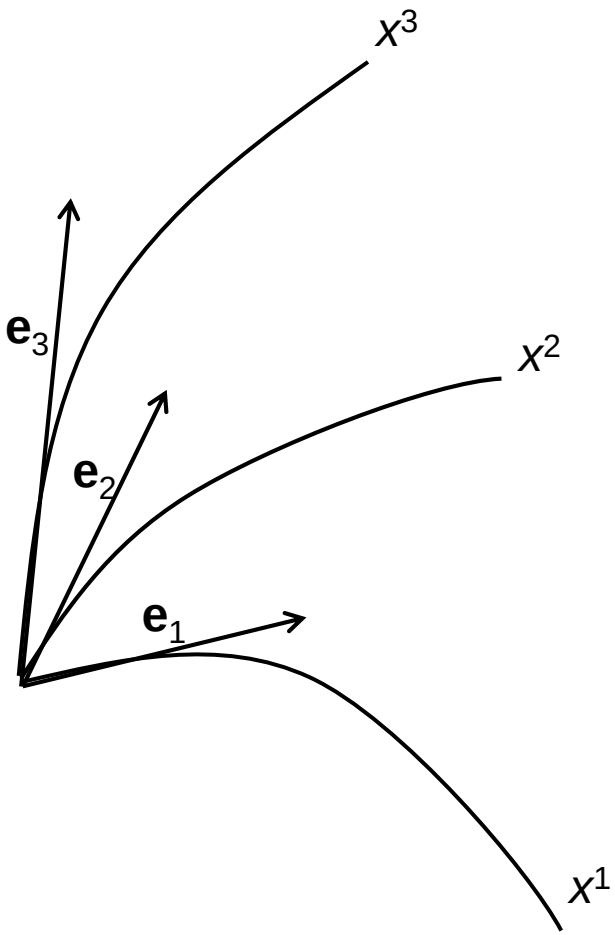
$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\partial p\delta_{ij}}{\partial y_i} \mathbf{u}_j = -\frac{\partial p}{\partial y_i} \mathbf{u}_i = -\nabla p$$

2.4 圆柱坐标系下的张量分析

任意曲线坐标系的四要素

- 定义: 在空间同一点处，笛卡尔坐标(y^1, y^2, y^3)与任意曲线坐标(x^1, x^2, x^3)之间的关系式: $x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$。
- 坐标面: $x^i = C^i$，其中(C^1, C^2, C^3)为该点的任意曲线坐标。
- 坐标线x^i: 坐标面两两相交形成的线，其上只有一个坐标改变，而另两个坐标不变。
- 坐标基本矢量:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_P}{\partial x^i}$$



2.4 圆柱坐标系下的张量分析

2.4.1 圆柱坐标系的四要素

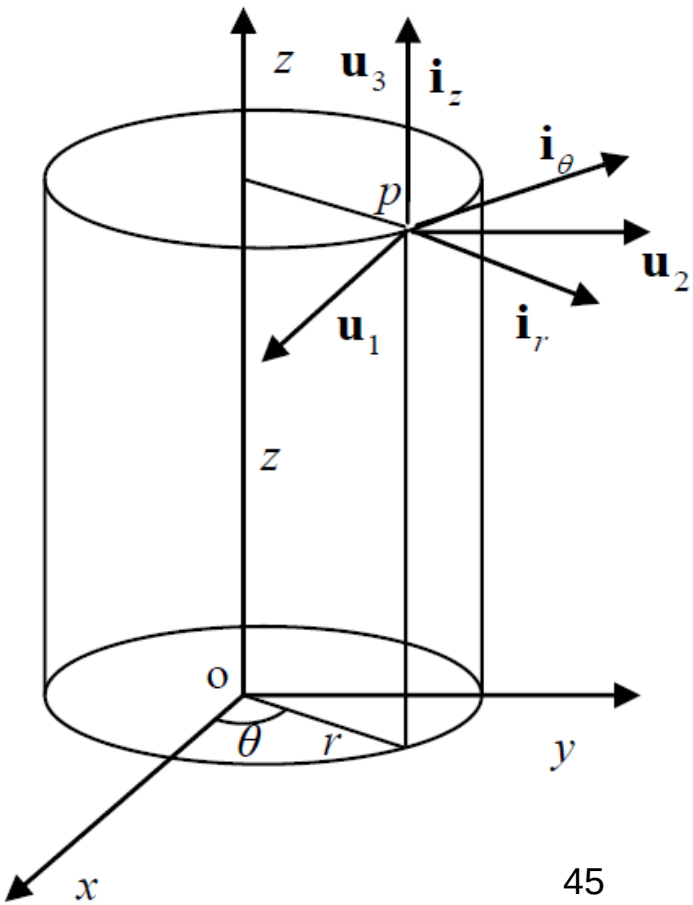
•定义: $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\mathrm{atan}(y/x) \\ z=z \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$

•坐标面: 分别为圆柱面、半平面和平面。

•坐标线: 分别为径向线、圆周线和直线。

•坐标基矢量:

$$\begin{cases} \mathbf{i}_r=\dfrac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial r}\Big/\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial r}\right|=\mathbf{u}_x\cos\theta+\mathbf{u}_y\sin\theta \\ \mathbf{i}_\theta=\dfrac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial \theta}\Big/\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial \theta}\right|=-\mathbf{u}_x\sin\theta+\mathbf{u}_y\cos\theta \\ \mathbf{i}_z=\dfrac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial z}\Big/\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial z}\right|=\mathbf{u}_z \end{cases}$$



2.4 圆柱坐标系下的张量分析

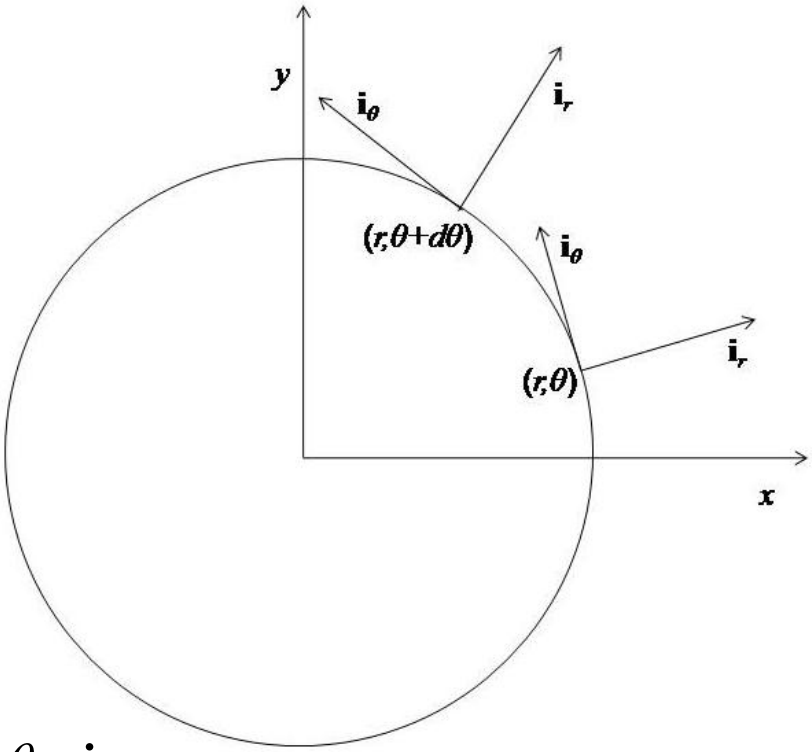
2.4.1 圆柱坐标系的四要素

坐标基矢量的性质：

（1）单位正交性：

$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \delta_{ij}$$

$$\mathbf{i}_i \cdot (\mathbf{i}_j \times \mathbf{i}_k) = \varepsilon_{ijk}$$



（2）空间相关性：

$$\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{u}_x \cos\theta + \mathbf{u}_y \sin\theta) = -\mathbf{u}_x \sin\theta + \mathbf{u}_y \cos\theta = \mathbf{i}_\theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(-\mathbf{u}_x \sin\theta + \mathbf{u}_y \cos\theta) = -\mathbf{u}_x \cos\theta - \mathbf{u}_y \sin\theta = -\mathbf{i}_r$$

代数运算与笛卡尔完全相同，微分运算需要考虑 θ 坐标线的弯曲

2.4 圆柱坐标系下的张量分析

2.4.2 张量的微分运算

梯度算子（哈密顿算子）：$\nabla = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$

- 梯度：$\nabla\varphi = \mathbf{i}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}$
- 散度：$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial r v_z}{\partial z}\right)$
- 旋度：练习

2.4 圆柱坐标系下的张量分析

2.4.2 张量的微分运算举例1：速度梯度

$$
\begin{aligned}
\nabla\mathbf{v} &= \mathbf{i}_r\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial r}+\mathbf{i}_\theta\frac{\partial\mathbf{v}}{r\partial\theta}+\mathbf{i}_z\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\\
&=\mathbf{i}_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\mathbf{i}_r+\mathbf{i}_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\mathbf{i}_\theta+\mathbf{i}_r\frac{\partial v_z}{\partial r}\mathbf{i}_z\\
&+\mathbf{i}_\theta\left(\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r}\right)\mathbf{i}_r+\mathbf{i}_\theta\left(\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{v_r}{r}\right)\mathbf{i}_\theta+\mathbf{i}_\theta\frac{\partial v_z}{r\partial\theta}\mathbf{i}_z\\
&+\mathbf{i}_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\mathbf{i}_r+\mathbf{i}_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\mathbf{i}_\theta+\mathbf{i}_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\mathbf{i}_z
\end{aligned}
$$

$$
\nabla\mathbf{v}=(\mathbf{i}_r,\mathbf{i}_\theta,\mathbf{i}_z)\begin{pmatrix}\frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{\partial r}\\ \frac{\partial v_r}{r\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_z}{r\partial\theta}\\ \frac{\partial v_r}{\partial z} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{i}_r\\ \mathbf{i}_\theta\\ \mathbf{i}_z\end{pmatrix}
$$

$$
D_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_r}{r\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z}\\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{r\partial\theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix}
$$

$$
S_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r}\right) & \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{v_r}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{r\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{r\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{pmatrix}
$$

2.4 圆柱坐标系下的张量分析

2.4.2 张量的微分运算举例2：应力张量的散度

$$(\nabla\cdot\mathbf{P})_r=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rP_{rr}\right)}{\partial r}+\frac{\partial P_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\partial\left(rP_{zr}\right)}{\partial z}\right]-\frac{P_{\theta\theta}}{r}$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{P})_\theta=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rP_{r\theta}\right)}{\partial r}+\frac{\partial P_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\left(rP_{z\theta}\right)}{\partial z}\right]+\frac{P_{\theta r}}{r}$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{P})_z=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rP_{rz}\right)}{\partial r}+\frac{\partial P_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\left(rP_{zz}\right)}{\partial z}\right]$$

练习：写出理想流动条件下的应力张量及其散度。

2.4 圆柱坐标系下的张量分析

2.4.2 张量的微分运算举例3：流动加速度

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$$

$$=(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}++v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\theta^2}{r})\mathbf{i}_r$$

$$+(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}++v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_r v_\theta}{r})\mathbf{i}_\theta$$

$$+(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial v_z}{r\partial\theta}++v_z\frac{\partial v_z}{\partial z})\mathbf{i}_z$$

$$=(\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^2}{r})\mathbf{i}_r+(\frac{Dv_\theta}{Dt}+\frac{v_r v_\theta}{r})\mathbf{i}_\theta+\frac{Dv_z}{Dt}\mathbf{i}_z$$

$$a_r=\frac{Dv_r}{Dt}-\frac{v_\theta^2}{r}$$

$$a_\theta=\frac{1}{r}\frac{Dv_\theta r}{Dt}$$

$$a_z=\frac{Dv_z}{Dt}$$

本章小结

- n维欧氏空间是实数域R上的线性内积空间V，或者是n维一阶张量空间，实数域R是n维零阶张量空间。
- 许多物理量需要利用n维m阶张量才能很好地描述，需要n^m个分量。
- 本章有三个最重要的公式，据此能够基本上建立起流体机械内流理论了。

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \qquad \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} \neq \mathbf{0} \qquad \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$$

第3章 流体机械内部三维流动的基本方程

3.1 绝对流动的控制方程组

3.2 相对流动的控制方程组

3.3 笛卡尔坐标系下的相对流动控制方程组

3.4 圆柱坐标系下的相对流动控制方程组

3.5 定解条件

本书内容介绍

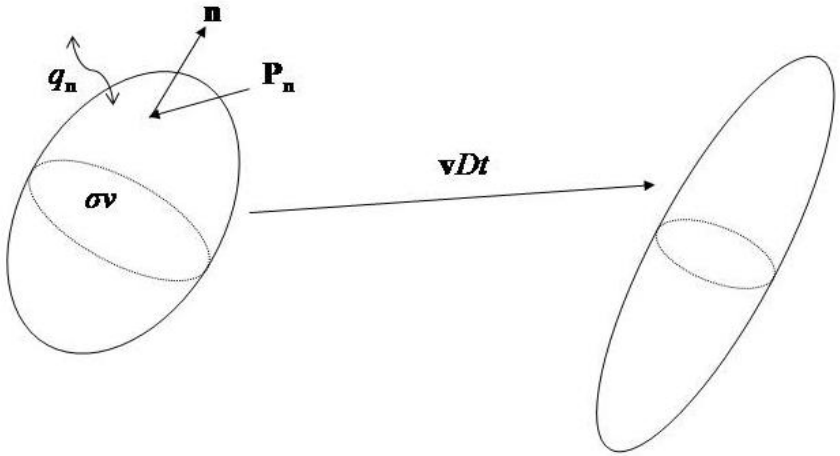
每章名称	重点与难点
第1章 绪论	流体机械内流的五个特点及研究方法
第2章 张量基本概念及运算	$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$
第3章 流体机械内部三维流动的基本方程	绝对流动与相对流动之间的五个关系
第4章 流体机械内部准三维流动理论	准三维反问题的流线曲率法
第5章 平面叶栅二维流动理论	特征分析与定解条件
第6章 计算流体力学的数值方法	对流扩散方程的有限体积法
第7章 时间推进法及其应用	Jameson的Runge-Kutta时间推进法
第8章 全速度压力修正法及其应用	非结构化网格上的全速度压力修正法

流体机械专业推公式比不过数学专业，但对公式的物理意义理解要比他们深刻得多才行！

3.1 绝对流动的控制方程组

研究对象：流体微元系统，其与外界不发生质量交换，但有动量和能量交换；

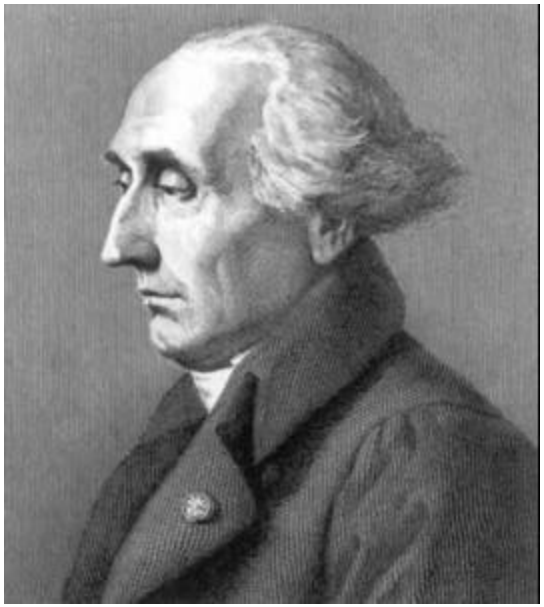
研究方法：拉格朗日法和张量方法，所得到的控制方程对任意坐标系都成立。



3.1 绝对流动的控制方程组

研究对象：流体微元系统，其与外界不发生质量交换，但有动量和能量交换；

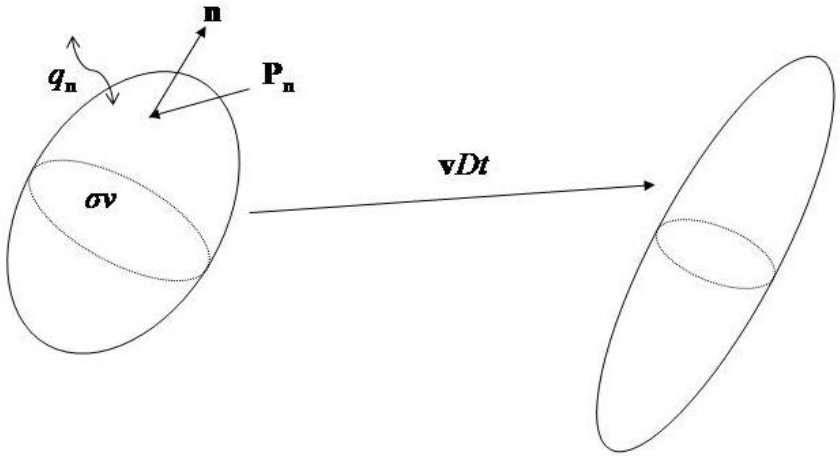
研究方法：拉格朗日法和张量方法，所得到的控制方程对任意坐标系都成立。



约瑟夫 路易斯 拉格朗日, 1735.1 ~ 1813.4，法国最杰出的数学家，在数学、力学、天文学均作出历史性贡献。对数学分析的拓展仅次于欧拉；出版巨著“分析力学”。

3.1 绝对流动的控制方程组

3.1.1 连续性方程



质量守恒定律：流体微元系统所含的质量不变化；

数学表达式： $\dfrac{D}{Dt}\int \rho \delta v = 0$

方程左端为：

$$\frac{D}{Dt}\int \rho \delta v = \int \frac{D\rho}{Dt}\delta v + \int \rho \frac{D\delta v}{Dt} = \int \frac{D\rho}{Dt}\delta v + \int \rho \frac{D\delta v}{\delta v Dt}\delta v = \int \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \delta v$$

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0}$$

特例1：不可压缩流动 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

特例2：定常流动 $\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$

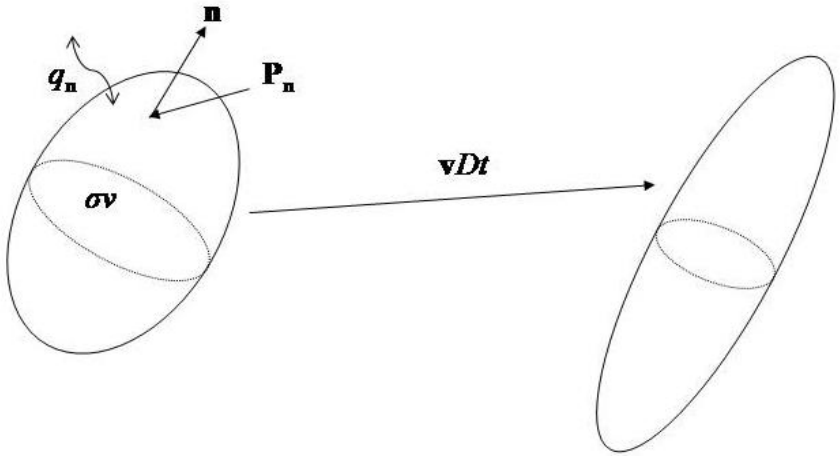
利用到的两个公式：

（1）张量公式：$\nabla \cdot \mathbf{v} = \dfrac{D\delta v}{\delta v Dt}$

（2）可变区域积分-求导公式：

3.1 绝对流动的控制方程组

3.1.2 动量方程



动量守恒定律： 流体微元系统包含的动量的变化率等于作用在该微元系统上的体积力、作用在微元系统表面上的表面力之和；

数学表达式： $\frac{D}{Dt}\int \rho \mathbf{v}\delta v = \int \rho \mathbf{f}\delta v + \oint \mathbf{P_n}\delta S$

$$\boxed{\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho\mathbf{f} + \nabla\cdot\mathbf{P}}$$

其中 $\nabla\cdot\mathbf{P}$ 代表“单位体积流体受到的表面力”

利用到的两个公式：

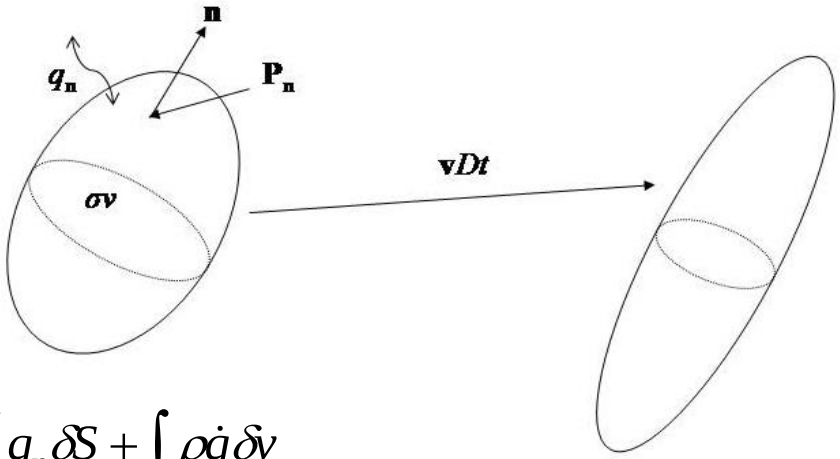
（1）应力张量公式：$\mathbf{P_n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}$

（2）Gauss积分公式：

$$\oint \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}dS = \int \nabla\cdot\mathbf{P}dv$$

3.1 绝对流动的控制方程组

3.1.3 能量方程



能量守恒定律： 热力学第一定律；

数学表达式：

$$\frac{D}{Dt}\int \rho\left(e+\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)\delta v=\int \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\delta v+\oint \mathbf{P_n}\cdot\mathbf{v}\delta S-\oint q_{\mathbf{n}}\delta S+\int \rho\dot{q}\delta v$$

$$\boxed{\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)=\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+\nabla\cdot(\mathbf{P}\cdot\mathbf{v})+\nabla\cdot k\nabla T+\rho\dot{q}}$$

右端四项分别为单位体积流体的体积力做功率、表面力做功率、导热率和其它内其热源生成率。

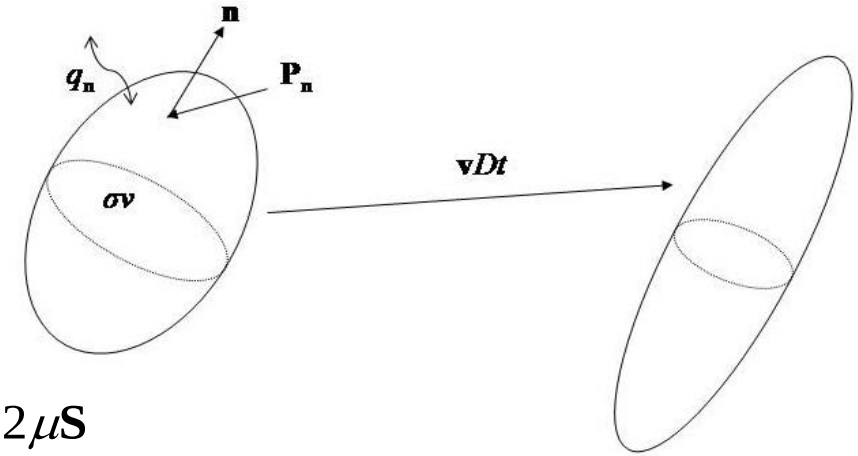
利用到的公式：

傅里叶导热定律：

$$q_{\mathbf{n}}=-\mathbf{n}\cdot k\nabla T$$

3.1 绝对流动的控制方程组

3.1.4 其它方程



状态方程（完全气体）：

$$p = \rho RT$$

本构方程（牛顿斯托克斯流体）

$$\mathbf{P} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S}$$

几何方程：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$$

上面得到的控制方程组有5个微分方程，基本求解变量有5个ρ,T,$\mathbf{v}$，方程组封闭！

牛顿斯托克斯流体的假设条件：

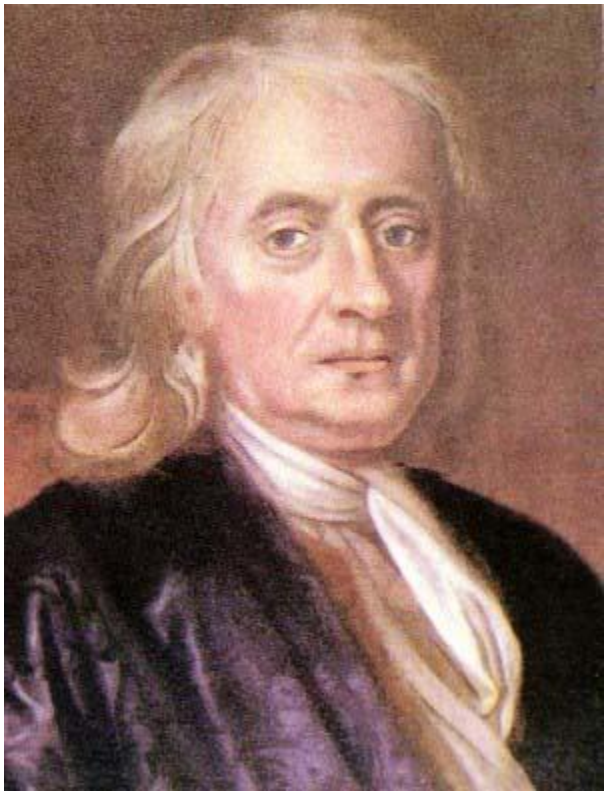
（1）牛顿流体：线性+各向同性对称

$$\tau_{ij} = \mu_{ijkl} S_{kl}$$

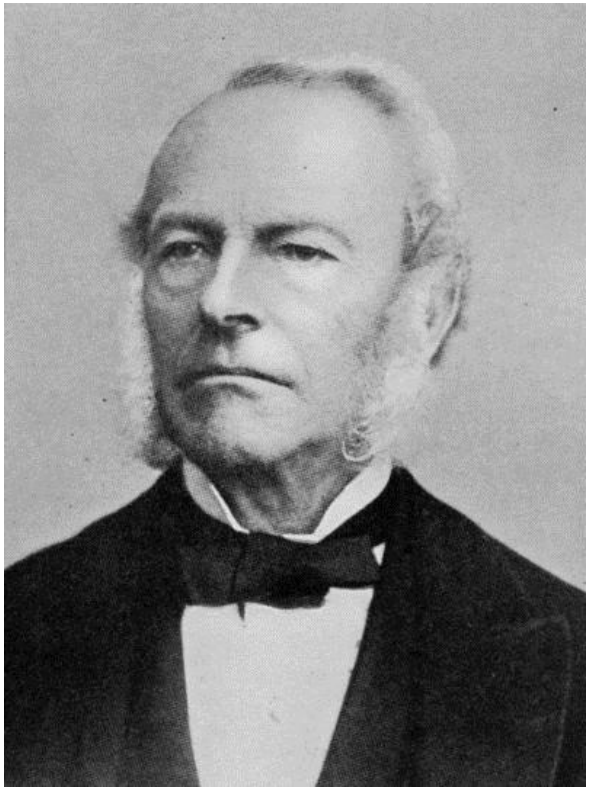
$$\mu_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

（2）Stokes流体： $\tau_{ii} = 0$

3.1 绝对流动的控制方程组



艾萨克 牛顿，1643.1~1727.3，爵士，英国科学家。影响世界100人物中排第二位；人类历史上第一个获得国葬的自然科学家，墓地位于威斯敏斯特教堂正面大厅的中央。争议：研究自然科学、神学各40年；与莱布尼茨之争；终身未婚。



斯托克斯，1819.8~1903.2，英国数学家、力学家。为牛顿之后任剑桥大学卢卡斯数学教授、皇家学会秘书长、皇家学会会长三项职务的第二个人。贡献：斯托克斯公式；Navier-Stokes方程；本构方程；弹性力学。

3.1 绝对流动的控制方程组

动量方程的多种表示形式：

（1）应力形式：
$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\rho\mathbf{f}+\underline{\nabla\cdot\mathbf{P}}$$

（2）粘性应力形式：
$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\rho\mathbf{f}\underline{-\nabla p+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}}$$

（3）速度形式：
$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\rho\mathbf{f}\underline{-\nabla p-\nabla(\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{v})+\nabla\cdot\mu\nabla\mathbf{v}+\nabla\cdot\mu(\nabla\mathbf{v})^T}$$

（4）熵焓形式：
$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\rho\mathbf{f}\underline{-\rho\nabla h+\rho T\nabla s+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}}$$

（5）Crocco形式：
$$\underline{\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\nabla\frac{1}{2}\mathbf{v}^2+(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{v}\right)}=\rho\mathbf{f}-\nabla p+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}$$

3.1 绝对流动的控制方程组

能量方程的多种表示形式：

（1）总能量方程：
$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)=\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+\nabla\cdot(\mathbf{P}\cdot\mathbf{v})+\nabla\cdot k\nabla T+\rho\dot{q}$$

（2）内能方程：
$$\rho\frac{De}{Dt}=\mathbf{P}:\mathbf{S}+\nabla\cdot k\nabla T+\rho\dot{q}$$

（3）温度方程：
$$\rho c_v\frac{DT}{Dt}=\mathbf{P}:\mathbf{S}+\nabla\cdot k\nabla T+\rho\dot{q}$$

（4）熵方程：
$$\rho T\frac{Ds}{Dt}=\phi+\nabla\cdot k\nabla T+\rho\dot{q}$$

（5）焓方程：
$$\rho\frac{Dh}{Dt}=\phi+\nabla\cdot k\nabla T+\rho\dot{q}+\frac{Dp}{Dt}$$

3.1 绝对流动的控制方程组

3.1.5 理想流动的控制方程组

理想流动的两个假设条件：无粘、绝热。

在流体机械中重力、其它内热源是小量，通常忽略不计。

- 连续性方程： $\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{v}=0$

- 动量方程： $\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\nabla p$

- 能量方程： $\rho c_v\frac{DT}{Dt}=-p\nabla\cdot\mathbf{v}$

利用后两个方程，可得理想定常流的贝努利方程和总焓方程

$$\int\frac{dp}{\rho}+\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\xleftrightarrow{\text{流线}}\text{常数}$$

$$h_0\equiv h+\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\xleftrightarrow{\text{流线}}\text{常数}$$

3.2 相对流动的控制方程组

在流体机械中，为什么要引入绝对流动和相对流动的概念？

（1）概念：在绝对静止坐标系下观察到的流动为绝对流动；在相对旋转坐标系下观察到的流动为相对流动。

（2）关系：同一客观流动现象对不同观察者的主观感受，二者既有区别、又有联系。

（3）好处：流动区域近似定常；流动过程近似定常。

（4）关键：相对流动与绝对流动之间的变换关系式。

3.2.1 绝对流动与相对流动的关系

记号： 下标a表示绝对流动参数,无下标表示相对流动参数:

$\frac{D_a}{Dt}$ $\frac{\partial_a}{\partial t}$ ∇_a 分别表示绝对坐标系下观察到的随体导数、当地导数及梯度算子；

$\frac{D}{Dt}$ $\frac{\partial}{\partial t}$ ∇ 分别表示相对坐标系下观察到的随体导数、当地导数及梯度算子；

绝对流动控制方程组：

$$\frac{D_a\rho}{Dt}+\rho\nabla_a\cdot\mathbf{v}=0$$

$$\rho\frac{D_a\mathbf{v}}{Dt}=\rho\mathbf{f}+\nabla_a\cdot\mathbf{P}$$

$$\rho c_v\frac{D_aT}{Dt}=\mathbf{P}:\mathbf{S}+\nabla_a\cdot k\nabla_aT+\rho\dot{q}$$

$$p=\rho RT$$

$$\mathbf{P}=-p\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau}=-p\mathbf{I}-\frac{2}{3}\mu(\nabla_a\cdot\mathbf{v})\mathbf{I}+2\mu\mathbf{S}$$

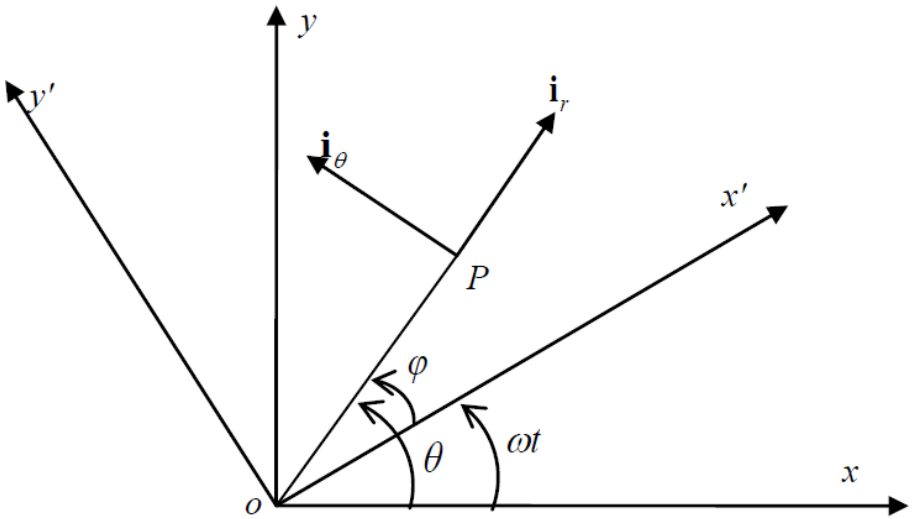
$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\nabla_a\mathbf{v}+\nabla_a\mathbf{v}^T)$$

3.2.1 绝对流动与相对流动的关系

1. 绝对坐标系与相对坐标系

绝对坐标系固定在静子上；

相对坐标系固结在转子上，假设旋转角速度ω为常数，在t=0时刻两类坐标系重合，z轴与旋转轴轴线重合。



$$\begin{cases} r = r' \\ \theta = \varphi + \omega t \\ z = z' \end{cases} \qquad \begin{cases} r = r \\ \theta = \varphi + \omega t \\ z = z \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\partial_a}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial_a}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial_a}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}}$$

绝对坐标记为 (r, θ, z)

相对坐标记为 (r, φ, z)

$$\mathbf{i}_r = \mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta = \mathbf{i}_\varphi, \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_z$$

3.2.1 绝对流动与相对流动的关系

2. 标量的时间导数在两类坐标系下的关系

设标量场q为空间坐标及时间的函数：$q = q_a(t,r,\theta,z) = q(t,r,\varphi,z)$

$\frac{\partial_a q}{\partial t}$ 的物理意义：标量场q在绝对坐标(r,θ,z)不改变，只有t坐标改变的时间偏导数；

$\frac{\partial q}{\partial t}$ 的物理意义：标量场q在相对坐标(r,φ,z)不改变，只有t坐标改变的时间偏导数；

显然，经过Δt 微小时间后，如果(r,φ,z) 不改变，则(r,θ,z)的角坐标为$\theta+\omega\Delta t$ 。

数学公式：

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t,r,\varphi,z)-q(t,r,\varphi,z)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{q_a(t+\Delta t,r,\theta+\omega\Delta t,z)-q_a(t,r,\theta,z)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial_a q}{\partial t} + \omega\frac{\partial q}{\partial \theta}$$

$$\boxed{\frac{\partial_a q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot\nabla q}$$

3.2.1 绝对流动与相对流动的关系

2. 标量的时间导数在两类坐标系下的关系

$\frac{D_a q}{Dt}$ 的物理意义：标量场q在流体质点不改变，经过Δt时间后的随体导数；

$\frac{Dq}{Dt}$ 的物理意义：标量场q在流体质点不改变，经过Δt时间后的随体导数；

显然，二者相等。

数学公式：

$$\frac{D_a q}{Dt} = \frac{\partial_a q}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla q \qquad \frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{w}\cdot\nabla q \qquad \mathbf{v} = \mathbf{w} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

$$\frac{D_a q}{Dt} = \frac{\partial_a q}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla q = \frac{\partial q}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot\nabla q + \mathbf{v}\cdot\nabla q = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{w}\cdot\nabla q = \frac{Dq}{Dt}$$

$$\boxed{\frac{D_a q}{Dt} = \frac{Dq}{Dt}}$$

3.2.1 绝对流动与相对流动的关系

3. 矢量的时间导数在两类坐标系下的关系

矢量在两类坐标系下的关系式：

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{i}_r + A_\varphi\mathbf{i}_\varphi + A_z\mathbf{i}_z = A_r\mathbf{i}_r + A_\theta\mathbf{i}_\theta + A_z\mathbf{i}_z$$

$$A_r = A_r, A_\varphi = A_\theta, A_z = A_z$$

利用分量和坐标矢量的时间偏导数公式，得到：

$$\boxed{\frac{\partial_a \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot\nabla\mathbf{A} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}}$$

第二项由周向不均匀性引起，第三项由矢量方向性引起。

$$\frac{D_a\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial_a\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{A} \qquad \frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{w}\cdot\nabla\mathbf{A} \qquad \boxed{\frac{D_a\mathbf{A}}{Dt} = \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A}}$$

特例：取$\mathbf{A} = \mathbf{r}_P$，则$\dfrac{D_a\mathbf{r}_P}{Dt} = \dfrac{D\mathbf{r}_P}{Dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_P$，即$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_P$

3.2.1 绝对流动与相对流动的关系

4. 绝对加速度与相对加速度的关系

$\frac{D_a\mathbf{v}}{Dt}$ 的物理意义：绝对坐标系下观察到的绝对加速度；

$\frac{D\mathbf{w}}{Dt}$ 的物理意义：相对坐标系下观察到的相对加速度；

$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ 的物理意义：相对坐标系下观察到的绝对加速度；

数学公式：

$$\boxed{\frac{D_a\mathbf{v}}{Dt}=\frac{D\mathbf{w}}{Dt}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{w}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})}$$

右端第二项为哥氏加速度，第三项为向心加速度

3.2.1 绝对流动与相对流动的关系

5. 绝对变形率张量与相对变形率张量的关系

$\mathbf{S}_a = \frac{1}{2}(\nabla_a \mathbf{v} + \nabla_a \mathbf{v}^T)$的物理意义：绝对坐标系下观察到的变形率张量

$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T)$的物理意义：相对坐标系下观察到的变形率张量

数学公式：

$$\mathbf{S}_a = \frac{1}{2}(\nabla_a \mathbf{v} + \nabla_a \mathbf{v}^T) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T) + \cancel{\frac{1}{2}[\nabla(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \nabla(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^T]}$$

最右端项为刚性旋转运动诱导的变形率张量，为**0**。

$$\boxed{\mathbf{S}_a = \mathbf{S} \quad \text{特例：} \quad \nabla_a \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{w}}$$

3.2.2 相对流动的控制方程组

绝对流动控制方程组：

$$\frac{D_a\rho}{Dt}+\rho\nabla_a\cdot\mathbf{v}=0$$

$$\rho\frac{D_a\mathbf{v}}{Dt}=\rho\mathbf{f}+\nabla_a\cdot\mathbf{P}$$

$$\rho c_v\frac{D_aT}{Dt}=\mathbf{P}:\mathbf{S}+\nabla_a\cdot k\nabla_aT+\rho\dot{q}$$

$$p=\rho RT$$

$$\mathbf{P}=-p\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau}=-p\mathbf{I}-\frac{2}{3}\mu(\nabla_a\cdot\mathbf{v})\mathbf{I}+2\mu\mathbf{S}$$

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\nabla_a\mathbf{v}+\nabla_a\mathbf{v}^T)$$

绝对流动与相对流动关系：

$$\nabla_a=\nabla$$

$$\frac{D_aq}{Dt}=\frac{Dq}{Dt}$$

$$\frac{D_a\mathbf{v}}{Dt}=\frac{D\mathbf{w}}{Dt}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{w}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

$$\mathbf{S}_a=\mathbf{S}$$

$$\nabla_a\cdot\mathbf{v}=\nabla\cdot\mathbf{w}$$

3.2.2 相对流动的控制方程组

绝对流动控制方程组：

$$\frac{D_a\rho}{Dt}+\rho\nabla_a\cdot\mathbf{v}=0$$

$$\rho\frac{D_a\mathbf{v}}{Dt}=\rho\mathbf{f}+\nabla_a\cdot\mathbf{P}$$

$$\rho c_v\frac{D_aT}{Dt}=\mathbf{P}:\mathbf{S}+\nabla_a\cdot k\nabla_aT+\rho\dot{q}$$

$$p=\rho RT$$

$$\mathbf{P}=-p\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau}=-p\mathbf{I}-\frac{2}{3}\mu(\nabla_a\cdot\mathbf{v})\mathbf{I}+2\mu\mathbf{S}$$

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\nabla_a\mathbf{v}+\nabla_a\mathbf{v}^T)$$

相对流动控制方程组：

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{w}=0$$

$$\rho\frac{D\mathbf{w}}{Dt}=\underline{-2\rho\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{w}-\rho\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})}+\rho\mathbf{f}+\nabla\cdot\mathbf{P}$$

$$\rho c_v\frac{DT}{Dt}=\mathbf{P}:\mathbf{S}+\nabla\cdot k\nabla T+\rho\dot{q}$$

$$p=\rho RT$$

$$\mathbf{P}=-p\mathbf{I}-\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{w})\mathbf{I}+2\mu\mathbf{S}$$

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{w}+\nabla\mathbf{w}^T)$$

3.2.3 理想相对流动的控制方程组

微分方程组：欧拉方程

假设条件：无粘绝热

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\mathbf{w}=0$$

$$\rho\frac{D\mathbf{w}}{Dt}=-2\rho\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{w}-\rho\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})-\nabla p$$

$$\rho c_v\frac{DT}{Dt}=-p\nabla\cdot\mathbf{w}$$

代数方程：贝努利+吴氏方程

进一步假设相对定常流动：

相对流动贝努利方程式：

$$\int\frac{dp}{\rho}+\frac{1}{2}\mathbf{w}^2-\frac{1}{2}\omega^2r^2=\text{const}$$

欧拉方程式：

$$\int_1^2\frac{dp}{\rho}+\frac{1}{2}\mathbf{v}_2^2-\frac{1}{2}\mathbf{v}_1^2=v_{2\theta}\omega r_2-v_{1\theta}\omega r_1$$

转子焓或吴氏焓方程式：

$$i_0\equiv h+\frac{1}{2}\mathbf{w}^2-\frac{1}{2}\omega^2r^2$$

3.2.3 理想相对流动的控制方程组

莱昂哈德·欧拉，1707.4～1783.9，瑞士数学家、自然科学家。公认的4名最伟大数学家是阿基米德、牛顿、欧拉和高斯。13岁考入大学，26岁担任了彼得堡科学院数学教授。分析力学创始人，使微积分“长大成人”，100多个欧拉公式、方程。

丹尼尔·伯努利，1700.2~1782.3，瑞士数学家、物理学、医学家。伯努利家族3代8位科学家中最杰出一位。与欧拉保持长达40年的最受人称颂的科学通信。1738年他出版了一生中最重要的著作《流体动力学》。终生未婚。

- **3.3 笛卡尔坐标系下的相对流动控制方程组**
- **3.4 圆柱坐标系下的相对流动控制方程组**

（1）相对流动控制方程组的张量形式对任意坐标系都成立，只需利用张量的分量表达式，就可以写出特定坐标系下的分量形式；详见教材。

（2）相对流动方程组中多出了一些附加项，完全是由于坐标线弯曲和旋转引起的。

（3）绝对流动是相对流动的特例(ω=0)。

（4）在流体机械内流理论中大多采用圆柱坐标系，而在流体机械内流计算中大多采用笛卡尔坐标系。

3.5 定解条件

3.5.1 初始条件

3.5.2 边界条件

1. 固壁边界条件

2. 进口边界条件

3. 出口边界条件

4. 周期性边界条件

（1）流动微分方程有5个：连续性方程、三个方向上的动量方程和能量方程，基本求解变量也有5个：ρ、**w** 和 T，其它参数可以通过状态方程及热力学关系式求出，方程组封闭。

（2）流动微分方程组解的性质：存在性、唯一性和稳定性，其定解条件的提法和具体实现方式尚没有彻底解决，但需遵循数理方程的基本特征理论和工程实践经验。

（3）定解条件包括初始条件和边界条件。

3.5 定解条件

3.5.1 初始条件

3.5.2 边界条件

1. 固壁边界条件
2. 进口边界条件
3. 出口边界条件
4. 周期性边界条件

对于非定常流动，要给定初始条件；
对于定常流动，要给定初始迭代值。

$$\rho(t_0, r, \varphi, z) = \rho_0(r, \varphi, z)$$

$$\mathbf{w}(t_0, r, \varphi, z) = \mathbf{w}_0(r, \varphi, z)$$

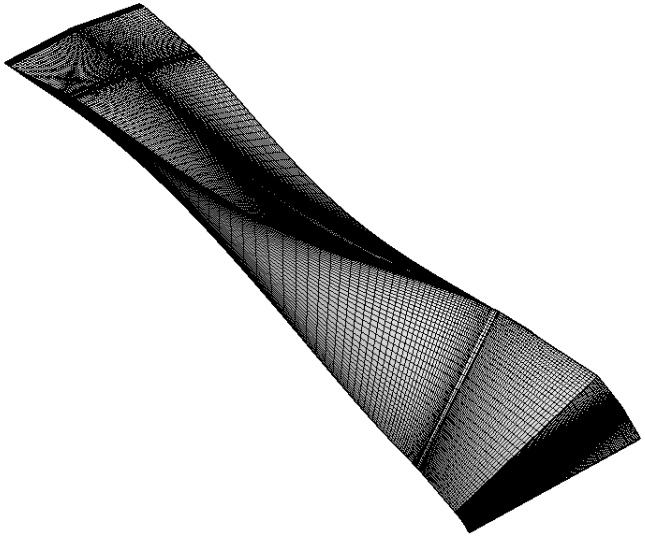
$$T(t_0, r, \varphi, z) = T_0(r, \varphi, z)$$

3.5 定解条件

3.5.1 初始条件

3.5.2 边界条件

1. 固壁边界条件
2. 进口边界条件
3. 出口边界条件
4. 周期性边界条件



对于粘性流动，固壁满足无滑移无渗透绝热边界条件：

$$\mathbf{w}_f = \mathbf{w}_w$$

$$-\left(k\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\right)_f = 0$$

对于理想流动，固壁满足有滑移无渗透绝热边界条件：

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}_f = \mathbf{n}\cdot\mathbf{w}_w$$

$$-\left(k\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\right)_f = 0$$

3.5 定解条件

3.5.1 初始条件

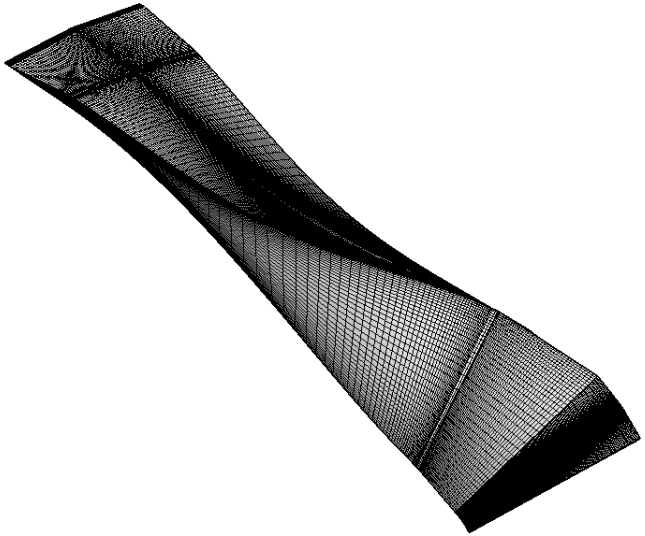
3.5.2 边界条件

1. 固壁边界条件

2. 进口边界条件

3. 出口边界条件

4. 周期性边界条件



对于亚音速进口，给定四个进口参数，一般给定总温T_{01}、总压p_{01}和两个气流方向角β_{r1}和 $\beta_{\varphi 1}$

对于超音速进口，给定五个所有进口参数，一般给定总温T_{01}、总压p_{01}马赫数Ma_1和两个气流方向角β_{r1}和$\beta_{\varphi 1}$

3.5 定解条件

3.5.1 初始条件

3.5.2 边界条件

1. 固壁边界条件

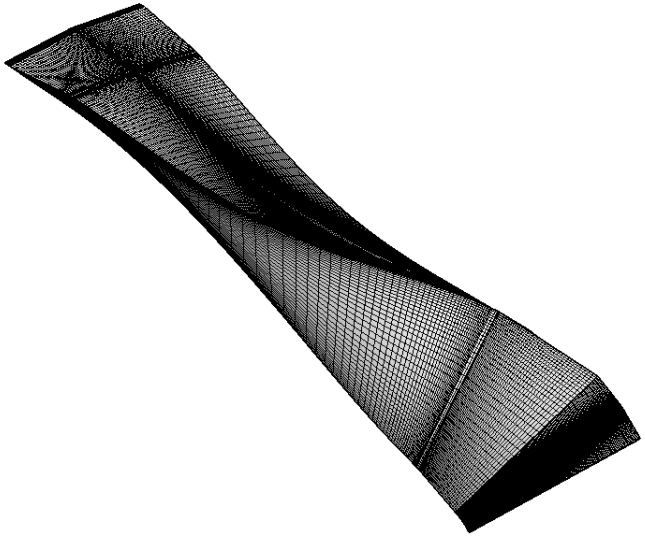
2. 进口边界条件

3. 出口边界条件

4. 周期性边界条件

对于亚音速出口，给定一个出口参数，一般给定出口静压p_2

对于超音速出口，不需要给定任何出口参数



3.5 定解条件

3.5.1 初始条件

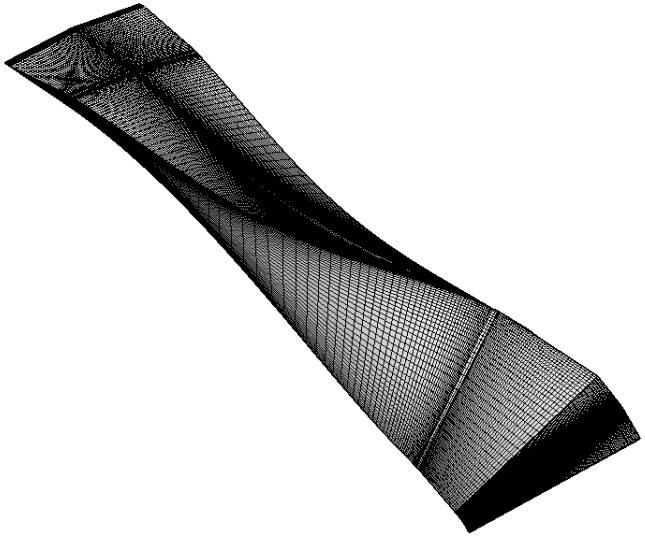
3.5.2 边界条件

1. 固壁边界条件

2. 进口边界条件

3. 出口边界条件

4. 周期性边界条件



对于单叶道内部流动问题，周向边界上所有流动参数均满足旋转周期性边界条件：

$$\rho(t,r,\varphi+\frac{2\pi}{N},z)=\rho(t,r,\varphi,z)$$

$$w_r(t,r,\varphi+\frac{2\pi}{N},z)=w_r(t,r,\varphi,z)$$

$$w_\varphi(t,r,\varphi+\frac{2\pi}{N},z)=w_\varphi(t,r,\varphi,z)$$

$$w_z(t,r,\varphi+\frac{2\pi}{N},z)=w_z(t,r,\varphi,z)$$

$$T(t,r,\varphi+\frac{2\pi}{N},z)=T(t,r,\varphi,z)$$

本章小结

- 利用拉格朗日法和张量分析法得到的控制方程组对任何坐标系都成立，具有**3大优点**：意义明确、推导严密、形式简洁。（最完美的流体力学推导方法）
- 绝对流动与相对流动存在**5大关系**，且绝对流动是相对流动的特例，因此研究重点是相对流动。
- 圆柱坐标系下相对流动方程出现**2类附加项**：旋转、弯曲项。
- 理想流动存在**流线上的解析解**，是分析设计基础。

第4章 基于两类流面的准三维流动理论

4.1 两类流面理论简介

4.2 速度梯度方程

4.3 S1流面正问题

4.4 S2流面反问题

4.5 离心叶轮叶片准三维设计

本书内容介绍

每章名称	重点与难点
第1章 绪论	流体机械内流的五个特点及研究方法
第2章 张量基本概念及运算	$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$
第3章 流体机械内部三维流动的基本方程	绝对流动与相对流动之间的五个关系
第4章 流体机械内部准三维流动理论	准三维反问题的流线曲率法
第5章 平面叶栅二维流动理论	特征分析与定解条件
第6章 计算流体力学的数值方法	对流扩散方程的有限体积法
第7章 时间推进法及其应用	Jameson的Runge-Kutta时间推进法
第8章 全速度压力修正法及其应用	非结构化网格上的全速度压力修正法

三元流课程的重点：基于两类流面的准三维流动概念

两个为什么？

目前所学理论的优缺点：

（1）三维理论：适用面宽、计算量大

（2）理想相对定常理论：代数形式、流线不知道

为什么准三维流面理论？

- 能求流动、流线、流面；能兼顾粘性效应；计算量小

为什么流线曲率法？

- 流动、流线方程为常微分方程，出现流线斜率、曲率

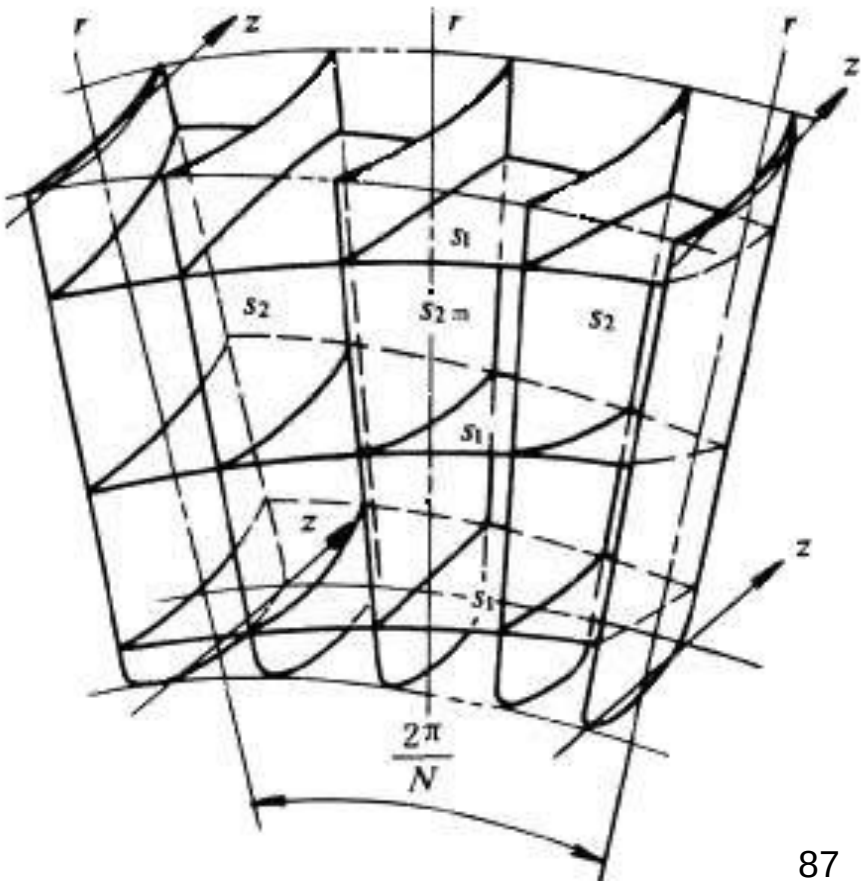
4.1 两类流面理论简介

1. S1流面和S2流面的概念

（1）吴仲华在1952年发表了基于两类流面的叶轮机械三维流动普遍理论。

（2）S1流面是以旋转轴为中心的同一圆弧上各流体质点的流线所形成的流面。

（3）S2流面是由同一径向线上各流体质点的流线所形成的流面。



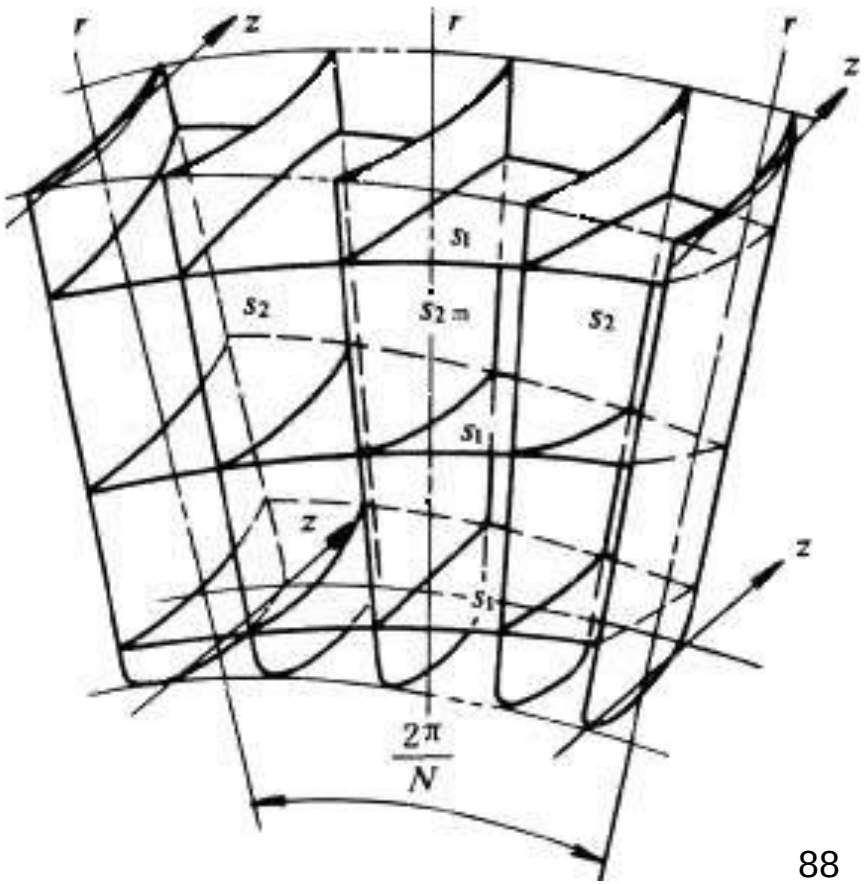
4.1 两类流面理论简介

2. 基于两类流面的全三维流动理论（1952）

（1）mS1×nS2流面理论：将全三维流动分解成m个S1流面和n个S2流面上的流动，每类流面的个数一般取10左右的单数。

（2）在两类流面之间迭代求解流面形状和流面上的流动参数。

（3）该理论的缺点：实际S1流面与S2流面均为空间复杂曲面，其流面形状计算非常复杂。



4.1 两类流面理论简介

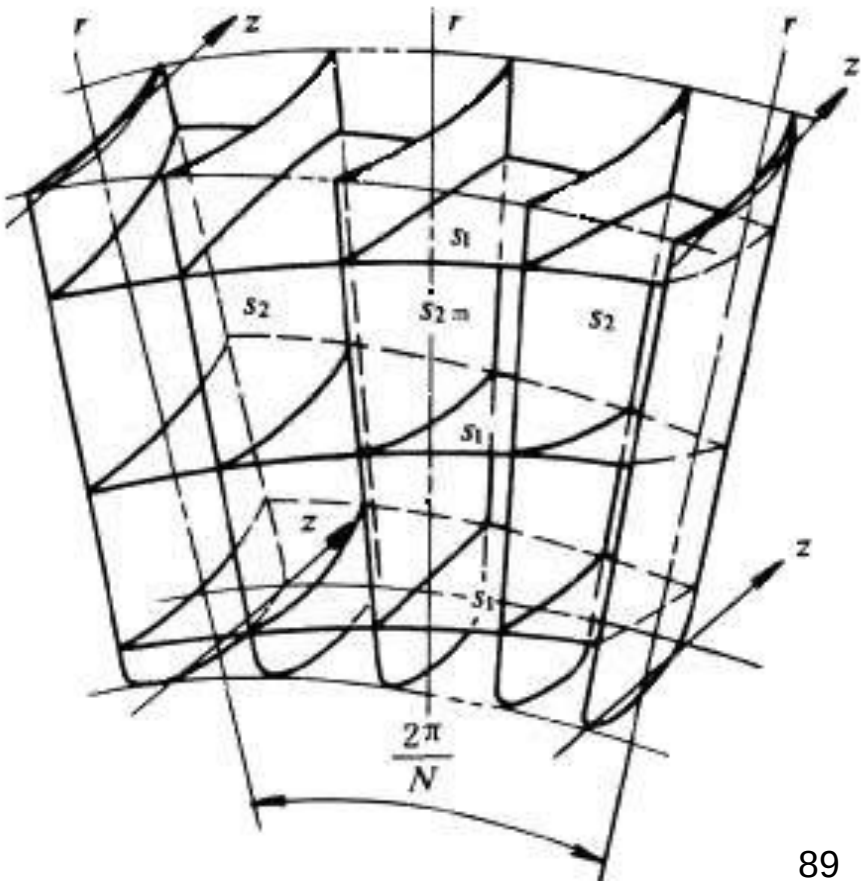
3. 基于两类流面的准三维流动理论（1970s）

（1）mS1×S2m流面理论:将三维流动分解成m个S1流面和1个S2流面上的流动。

（2）假设m个S1流面均为回转流面，1个S2流面取为周向平均S2m流面。

（3）迭代求解mS1×S2m流面形状及其流动参数。

（4）该理论的优点：流面形状简单、计算量小，在叶片设计中获得了广泛应用。



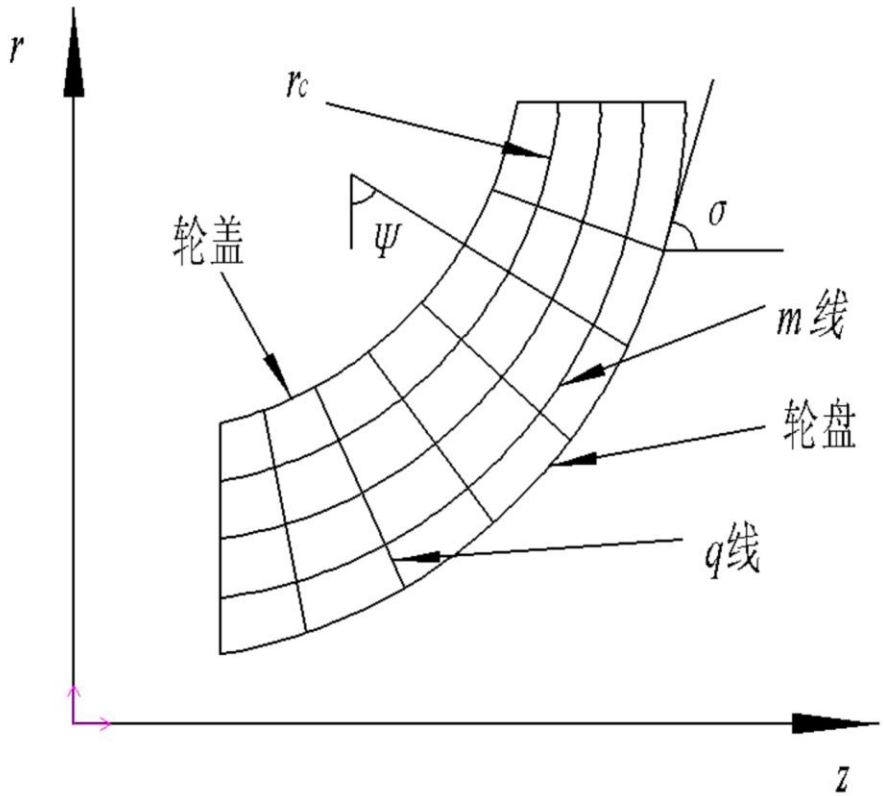
4.1 两类流面理论简介

4. 流面上的数学方程

（1）自变量：有两个，S1流面坐标定义为$q=q(m,\varphi)$；S2流面坐标定义为$\varphi=\varphi(m,q)$

（2）求解变量：流动速度、流函数或者势函数，流动方程为关于两个自变量的偏微分方程。

（3）流线曲率法：将偏微分方程中关于m的偏导数并入源项，得到关于φ或者q方向上的常微分方程。



流线曲率法的关键：如何得到准正交线上的常微分方程？

4.1 两类流面理论简介

5. 若干几何定义

（1）子午面：（r,z)平面。

（2）子午流线：m线，流线在子午面上的旋转投影。

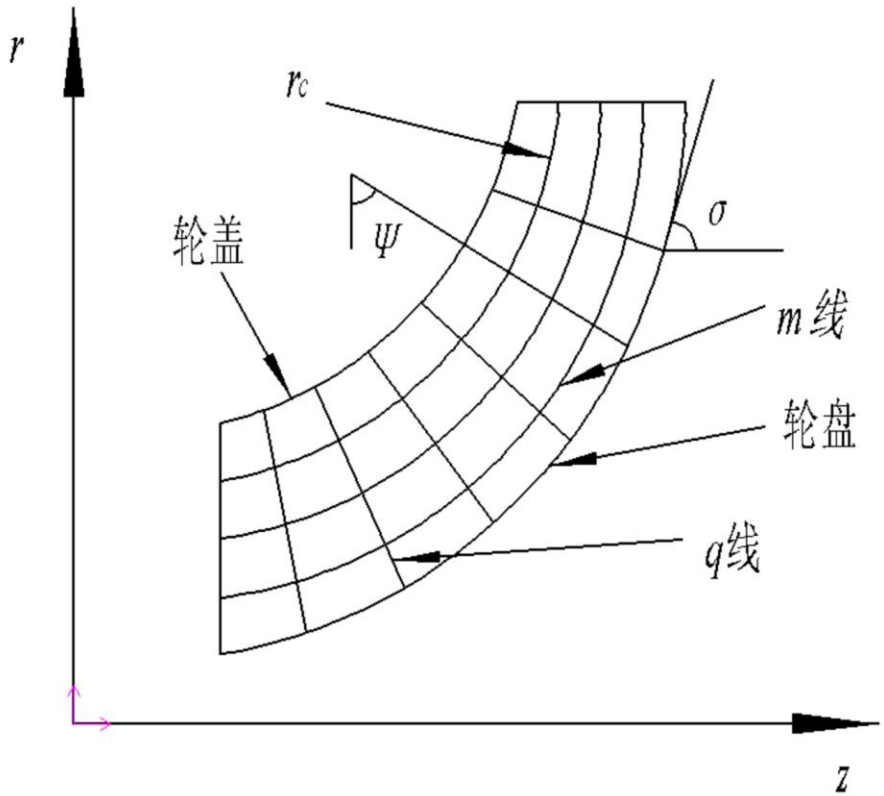
（3）准正交线：q线或者φ线，尽可能与m线正交。

（4）自然坐标系: (q, φ, m)

（5）回转流面: 绕着z轴旋转m线形成的回转面。

（6）子午流线曲率半径: r_c

（7）几个角度：$\sigma,\beta,\theta,\varphi,\psi$



这些几何参数利用自然坐标系的定义式计算出

4.2 速度梯度方程

出发点：三维定常理想流动的动量、能量方程

$$\frac{Dw_r}{Dt}-\frac{(w_\varphi+\omega r)^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{Dw_\varphi}{Dt}+\frac{w_r w_\varphi}{r}+2\omega w_r=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\varphi}$$

$$\frac{Dw_z}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$h+\frac{1}{2}\mathbf{w}^2-\frac{1}{2}\omega^2 r^2=h_{01}-\omega\lambda_1$$

推导对象：

沿着任意三维空间曲线q上的速度梯度方程：

$$\frac{dw}{dq}=?$$

其中q线的定义为：

$$\begin{cases} r=r(q) \\ \varphi=\varphi(q) \\ z=z(q) \end{cases}$$

4.2 速度梯度方程

速度梯度方程

$$\frac{dw}{dq} = Aw + B + \frac{C}{w}$$

$$A = \left(\frac{\cos^2\beta\cos\alpha}{r_c} - \frac{\sin^2\beta}{r}\right)\frac{dr}{dq} - \frac{\cos^2\beta\sin\alpha}{r_c}\frac{dz}{dq} + \sin\alpha\sin\beta\cos\beta\frac{d\varphi}{dq}$$

$$B = \left(\sin\alpha\cos\beta\frac{dw_m}{dm} - 2\omega\sin\beta\right)\frac{dr}{dq}$$
$$+\cos\alpha\cos\beta\frac{dw_m}{dm}\frac{dz}{dq} + r\cos\beta\left(\frac{dw_\varphi}{dm} + 2\omega\sin\alpha\right)\frac{d\varphi}{dq}$$

$$C = \frac{dh_{01}}{dq} - \omega\frac{d\lambda_1}{dq} - T\frac{ds}{dq}$$

几点讨论

（1）一阶常微分方程：可利用Runge-Kutta法求解。

（2）边界条件：利用质量守恒方程补充。

（3）方程系数：出现了准正交线的斜率和子午流线的曲率，故名为流线曲率法。A主要受叶轮子午型线影响，反映非线性分布；B主要反映线性分布；C一般为0

4.3 S1流面正问题

流面正问题：分析问题

（1）概念：已知流面形状，求该流面上所有流动参数。

（2）流面形状给法：初始形状根据叶片几何形状给定，然后利用两类流面上的流动参数迭代交替更新。

流面反问题：设计问题

（1）概念：已知部分流动控制参数，反求流面形状及其上的其它流动参数。

（2）控制参数给法：一般给定角动量分布，或者叶片表面上的压力分布。

流面准三维反问题：

（1）概念：已知平均S2m流面上的角动量分布，反求出S2m流面形状及其上的其它流动参数，以及m个回转S1流面上的流动参数。

（2）关键：S2m流面反问题；S1流面正问题。

4.4 S2流面反问题

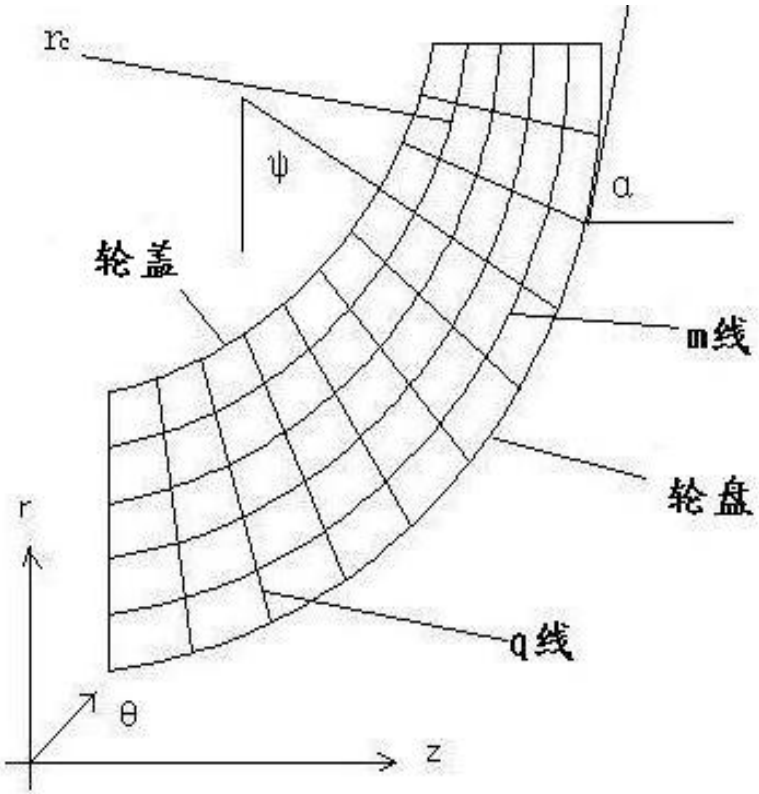
（1）概念：已知流面上的部分流动参数，求出流面形状

（2）控制参数给法：一般给定绝对速度角动量（环量）$v_\theta r$分布，其与欧拉功、压比等性能参数直接相关。

（3）流面形状描述：

$\varphi=\varphi(r,z)$ 或者 $\varphi=\varphi(m,q)$

（4）关键： w_φ为已知，推导关于w_m的子午速度梯度方程。



如何进一步提高Q3D设计水平？

（1）理论方面：将S1流面与S2流面的无粘流动理论发展到粘性流动理论。

（2）模型方面：三大经验模型，即偏航角模型、流动损失或效率模型、掺混模型。

（3）方法方面：基于Q3D反问题与CFD优化问题相结合的设计方法。

（4）技术方面：多级流体机械气动布局、高端流体机械。

根本出路：流体机械内流理论与设计方法；CFD精度与效率

课外阅读文献

经典文献：S1、S2流面理论

[1] Wu CH. A General Theory of Three-dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial-, Radial, and Mixed-flow Types[R]. NACA TN-2604, 1952.

[2] 吴文权, 刘翠娥. 使用非正交曲线座标与速度分量S1流面正问题流场矩阵解[J].工程热物理学报，1980, 1(1): 17-27.

[3] 朱荣国. 使用非正交曲线座标与速度分量S2流面反问题流场线松弛解[J]. 工程热物理学报，1980, 1(1): 28-35.

目的：了解S1、S2流面理论发展历史、计算方法

吴仲华（1917.7-1992.9），江苏苏州人，中国工程热物理学家，中国科学院院士，吴氏通用理论的创始人。

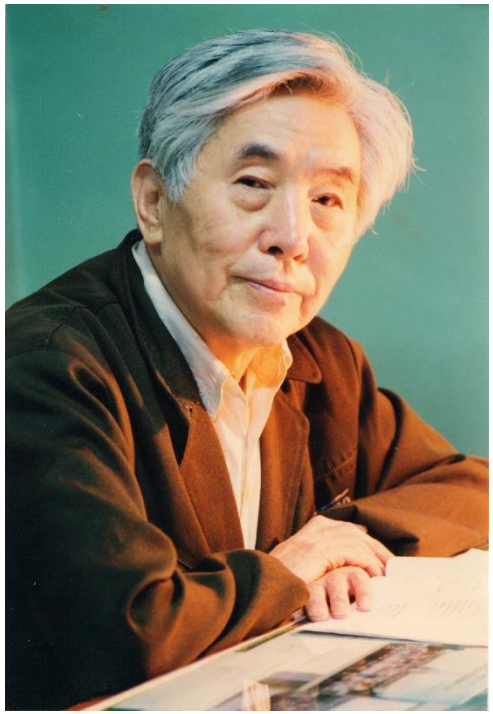
课外阅读文献

经典文献：Q3D设计理论

[1] 苗永淼, 王尚锦. 径、混流式三元叶轮“全可控涡”设计的理论和方法[J]. 工程热物理学报, 1981, 2(2): 157-159.

[2] 王尚锦, 祁大同, 李占良. 径、混流式节能转子“考虑边界层厚度的全可控涡设计”的研究[J]. 应用力学学报, 1985, 2(2): 57-83.

目的：了解Q3D设计方法发展历史、全可控涡基本思想



苗永淼（1924.10-2010.1），山东济南人，中国流体机械专家，1985年培养出我国流体机械专业第一个博士谷传纲，研究透平压缩机旋转失速、设计方法和内部粘性流动理论。

课外阅读文献

发展文献：

流线曲率法与三大经验模型的发展

[1] Casey MV, Robinson C. A New Streamline Curvature Throughflow Method for Radial Turbomachinery[J]. ASME Journal of Turbomachinery, 2010, 132(3): 031021-1-10.

二维流线曲率法

[2] Templalexis I, Pilidis P, Pachidis V, et al. Development of a Two-dimensional Streamline Curvature Code[J]. ASME Journal of Turbomachinery, 2011, 133(1): 011004-1-7.

Q3D反问题与CFD优化问题的结合

[3] Bonaiuti D, Zangeneh M. On the Coupling of Inverse Design and Optimization Techniques for the Multiobjective, Multipoint Design of Turbomachinery Blades[J]. ASME Journal of Turbomachinery, 2009, 131: 021014-1-16.

目的：了解Q3D设计方法的新发展及基本思想

第5章 计算流体力学概述

5.1 计算流体力学的基本概念

5.2 计算流体力学的基本过程

5.3 CFD商业软件

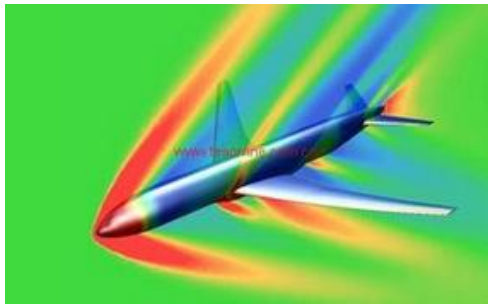
5.4 CFD应用实例

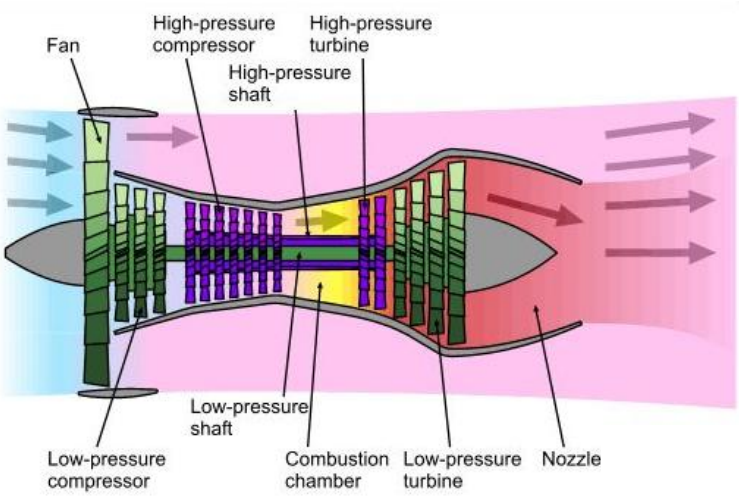
本书内容介绍

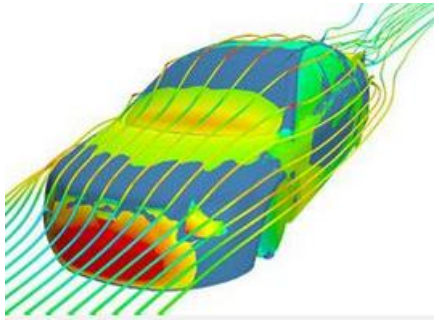
每章名称	重点与难点
第1章 绪论	流体机械内流的五个特点及研究方法
第2章 张量基本概念及运算	$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$ $\frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} \neq \mathbf{0}$
第3章 流体机械内部三维流动的基本方程	绝对流动与相对流动之间的五个关系
第4章 流体机械内部准三维流动理论	准三维反问题的流线曲率法
第5章 平面叶栅二维流动理论	特征分析与定解条件
第6章 计算流体力学的数值方法	对流扩散方程的有限体积法
第7章 时间推进法及其应用	Jameson的Runge-Kutta时间推进法
第8章 全速度压力修正法及其应用	非结构化网格上的全速度压力修正法

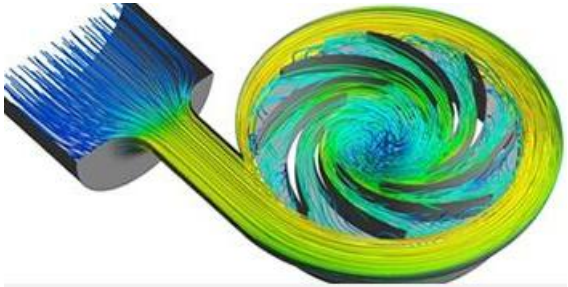
5.1 计算流体力学的基本概念

（1）定义：计算流体力学是在计算机上，利用数值方法求解流动控制方程组，从而获得流场近似数值解的方法，简称CFD。









5.1 计算流体力学的基本概念

（1）定义：计算流体力学是在计算机上，利用数值方法求解流动控制方程组，从而获得流场近似数值解的方法，简称CFD。

（2）涉及知识：流体力学、数学物理方程、**数值方法**和计算机科学。

（3）作用：认识和控制流动的重要手段，先进流体机械研发过程越来越依赖于CFD。

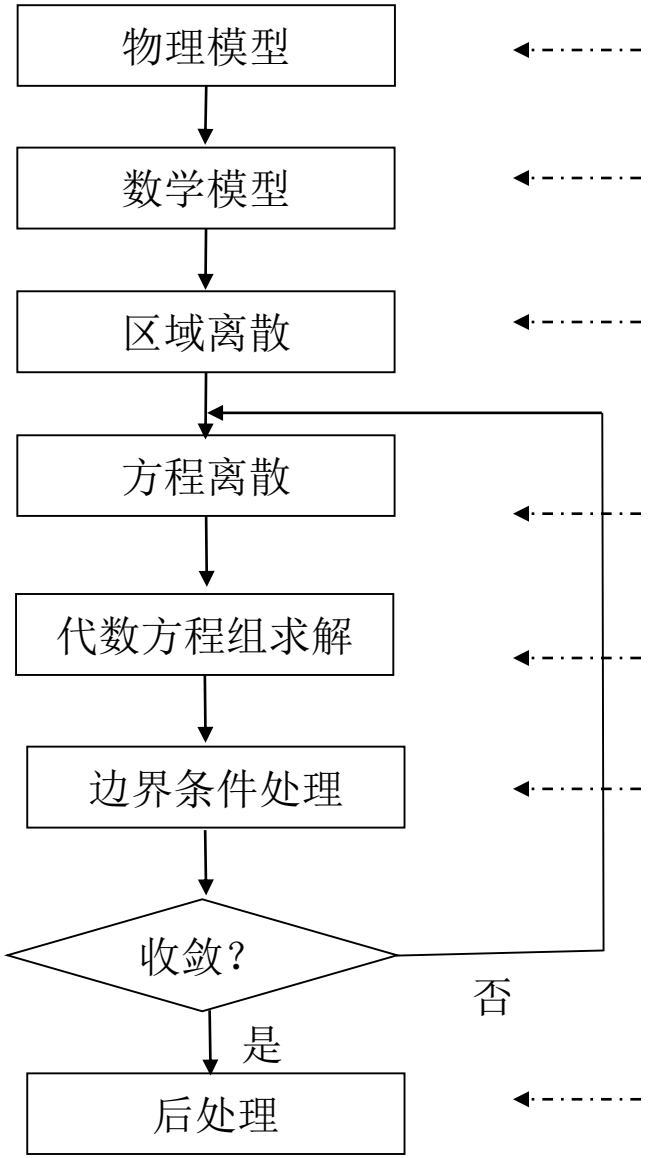
（4）本章重点：**对流扩散方程的有限体积法**。

5.2 计算流体力学的基本过程

计算流体力学的基本思想：

把空间时间上连续分布（无穷点）的流动物理量用一系列有限个离散点（节点）上的值来表示，并利用数值方法建立起这些节点上变量值之间的代数方程组，从而得到所求解变量的近似值。

5.2 计算流体力学的基本过程



分析流动的性质，并对流动现象的物理过程进行相应的简化

建立控制方程组及定解条件

把流动区域划分为很多子区域(网格)，并从每个网格中选取出节点的过程

把微分方程组转换为代数方程组，如有限元法，有限体积法，有限差分法

直接求解，迭代求解

物理边界条件和计算边界条件的提法与处理

从计算结果中提取出所关心的流动参数

5.3 CFD商业软件——Fluent

Fluent操作流程：

利用Fluent求解流场及后处理

（1）导入网格数据文件　File > Read > mesh…

（2）设定模型选项　Define > Models

（3）给定物性参数　Define > Materials

（4）给定边界条件　Define > Boundary Conditions

（5）指定数值方法　Solve > Methods

（6）指定控制参数　Solve > Controls

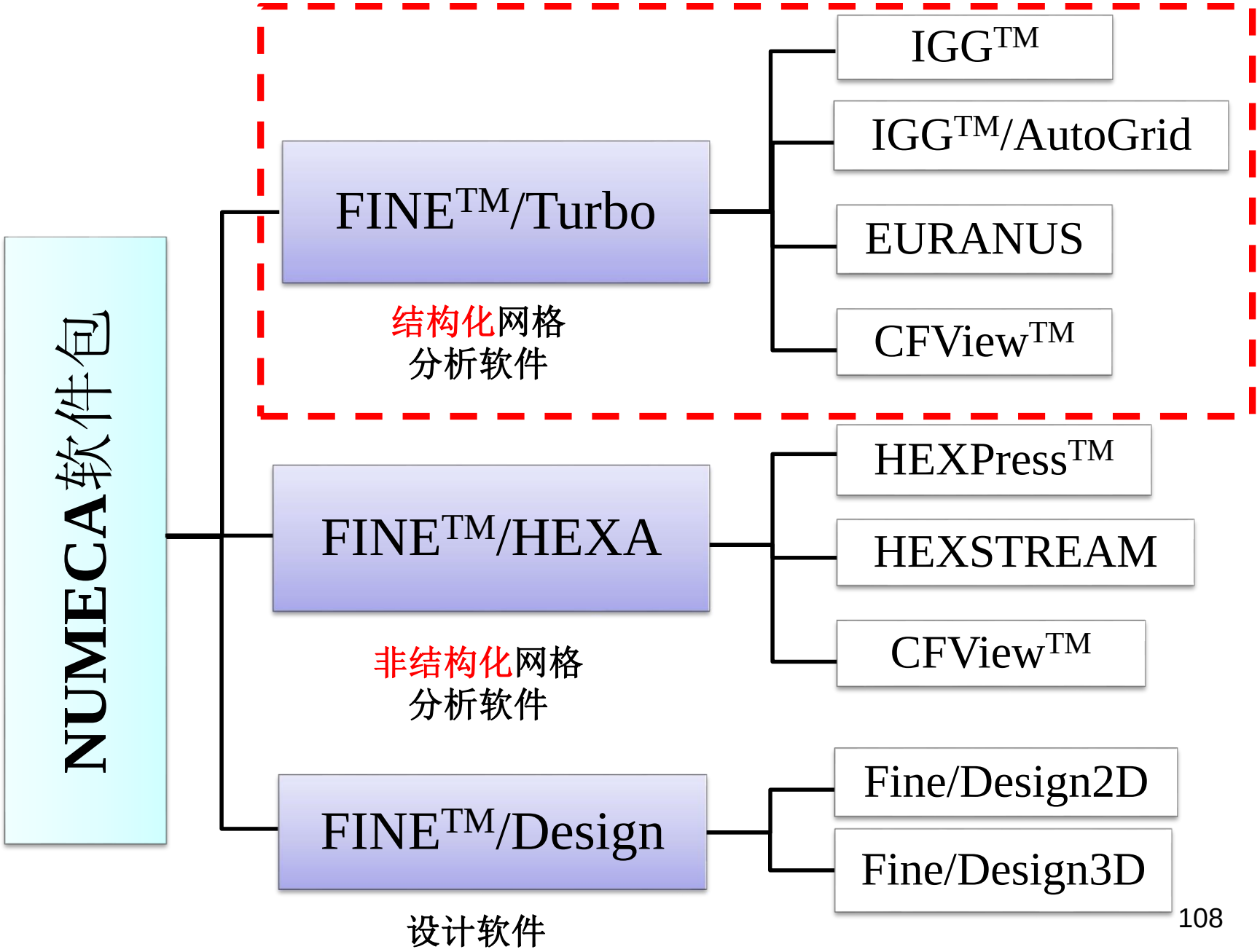
（7）设定收敛指标　Solve > Monitors > Residuals

（6）设定初始流场　Solve > Initialize

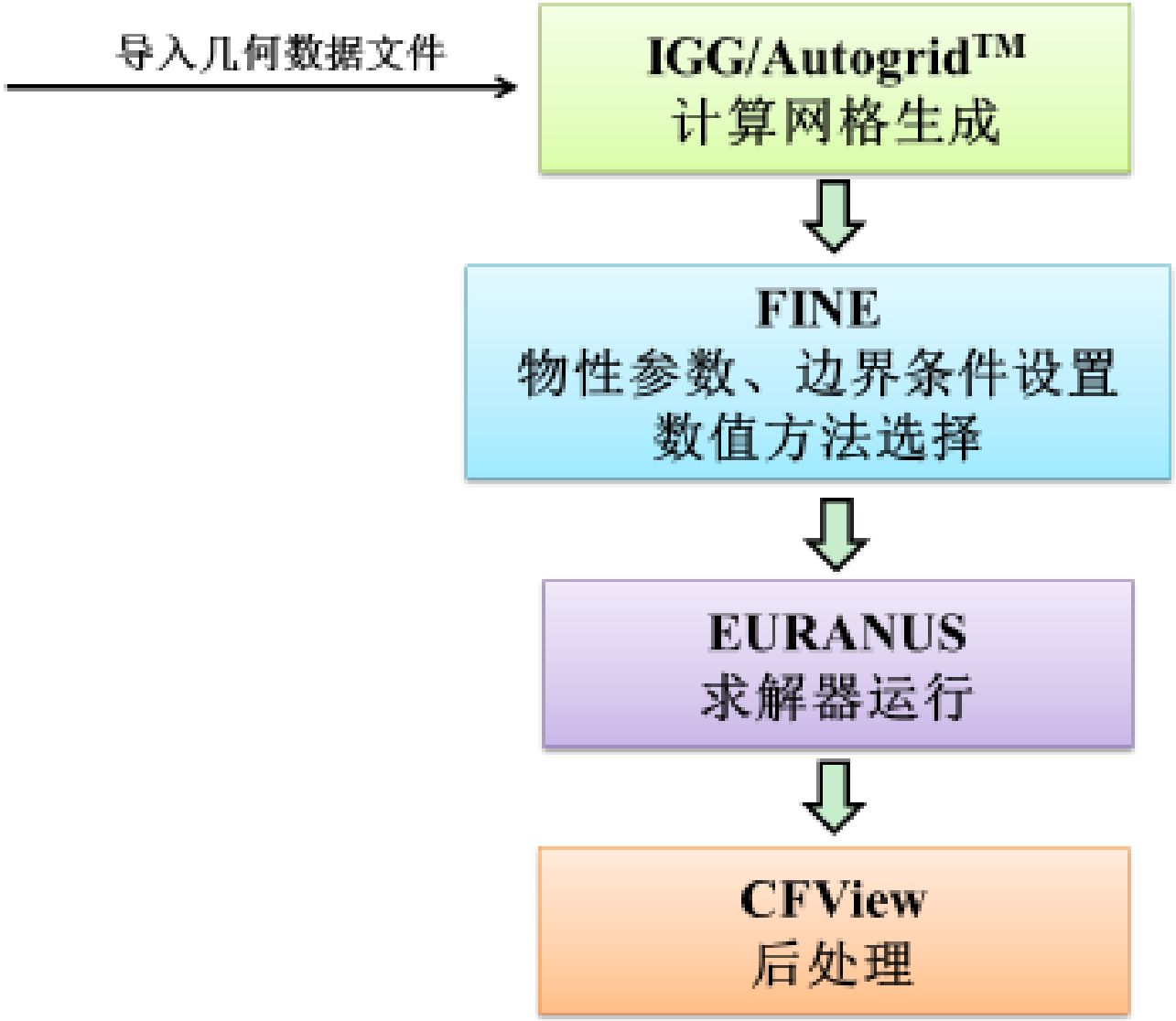
（8）开始流场计算　Solve > Run calculations

（9）后处理　Display, Plot, Report

5.3 CFD商业软件——NUMECA


NUMECA软件包
FINE™/Turbo
结构化网格
分析软件
IGG™
IGG™/AutoGrid
EURANUS
CFView™
FINE™/HEXA
非结构化网格
分析软件
HEXPress™
HEXSTREAM
CFView™
FINE™/Design
设计软件
Fine/Design2D
Fine/Design3D

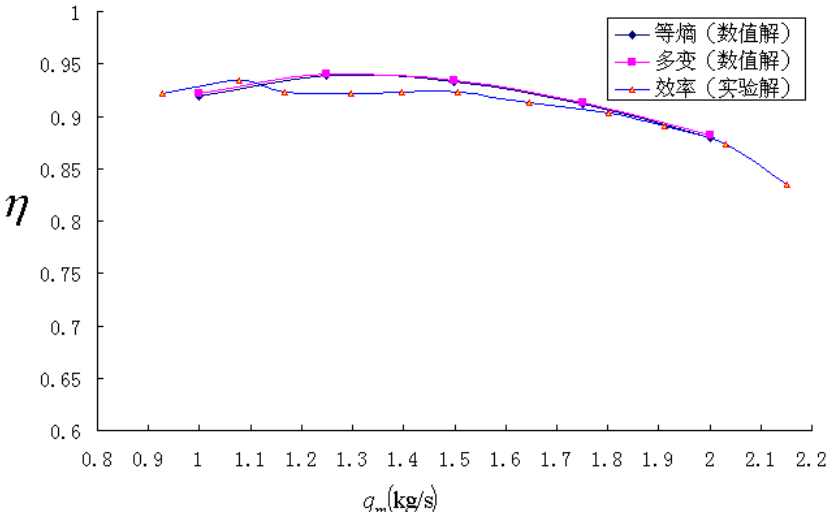
NUMECA操作流程

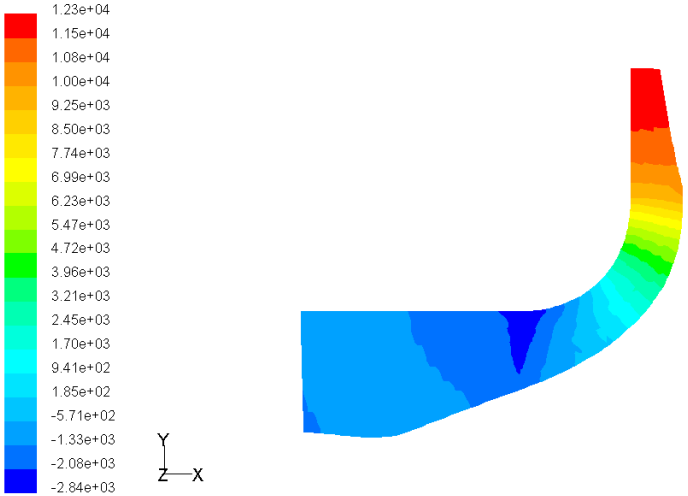

导入几何数据文件
IGG/Autogrid™
计算网格生成
FINE
物性参数、边界条件设置
数值方法选择
EURANUS
求解器运行
CFView
后处理

5.4 CFD应用算例

1. 离心叶轮气动性能预测及内流场数值模拟

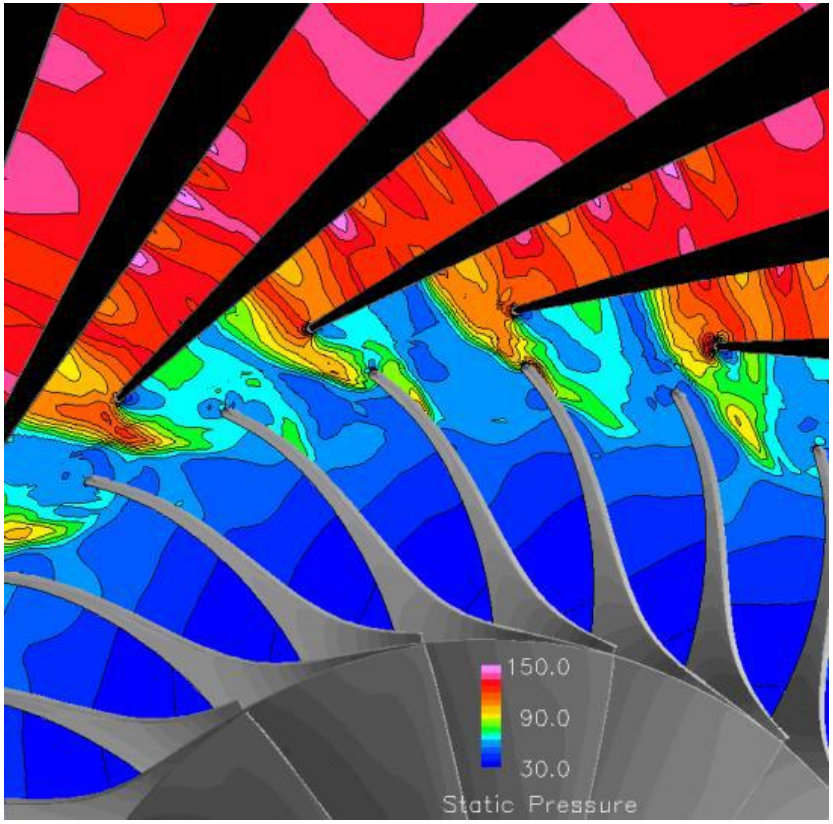
主要参数：LSCC叶轮

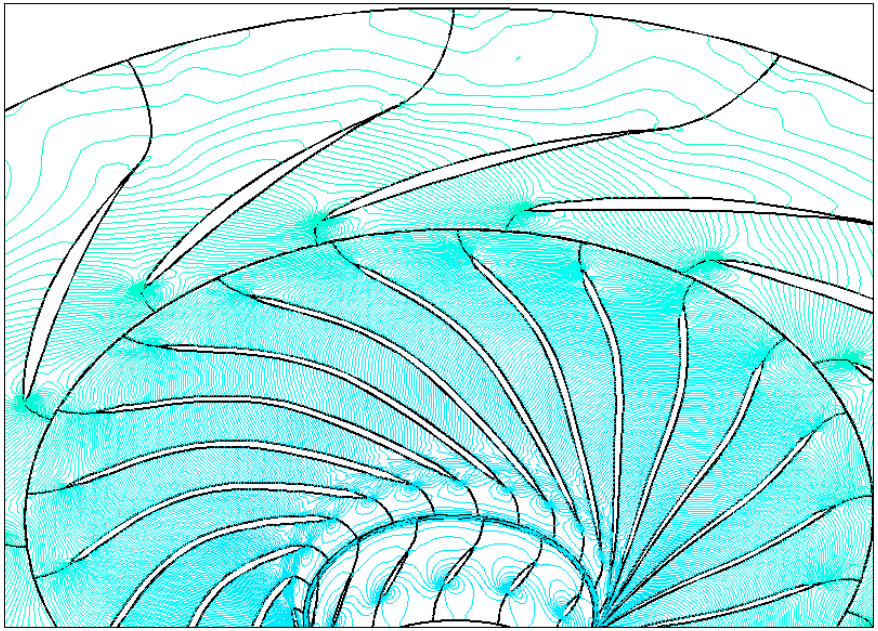




5.4 CFD应用算例

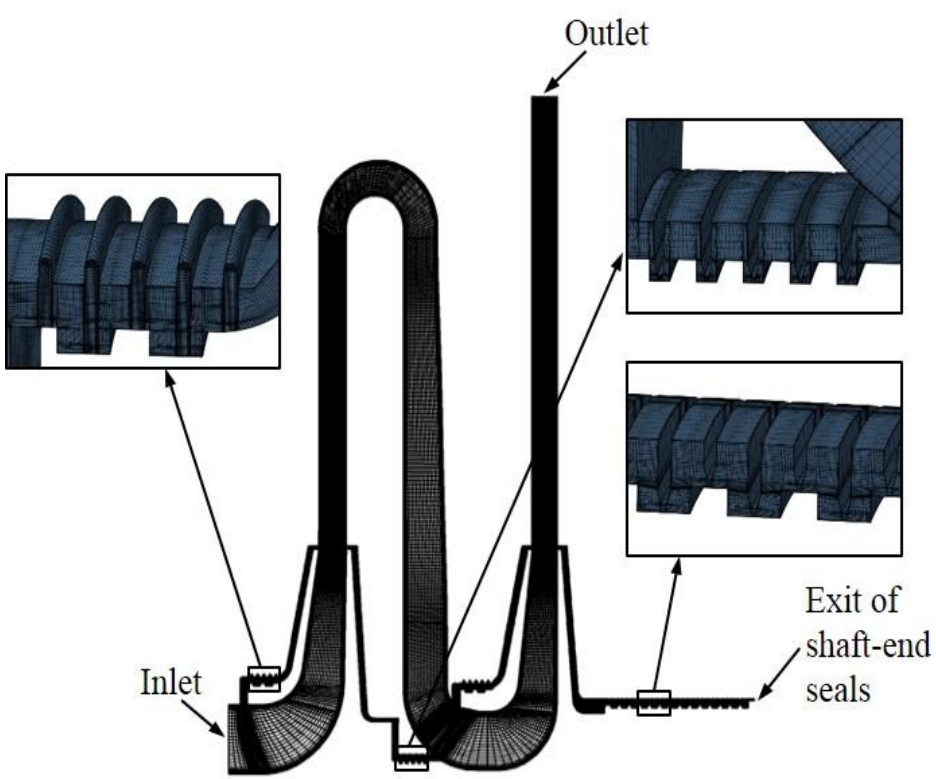
2. 离心压缩机内部流动数值模拟

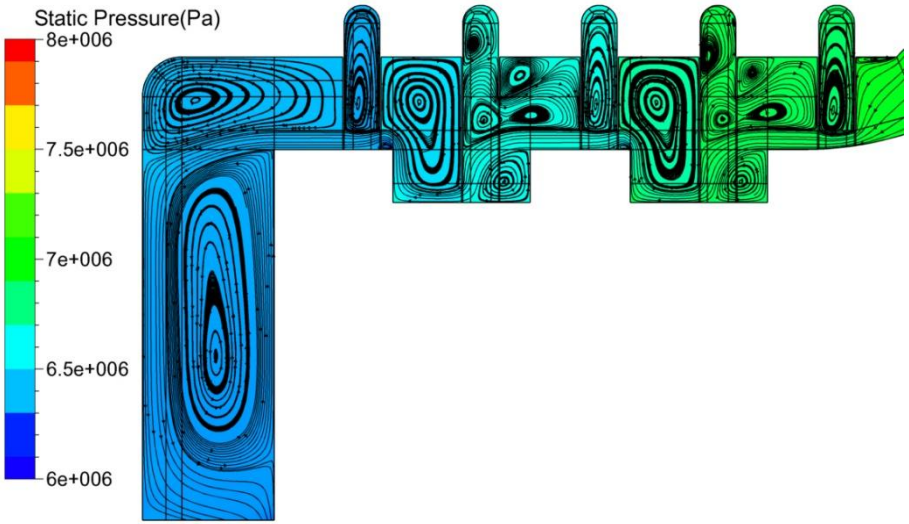


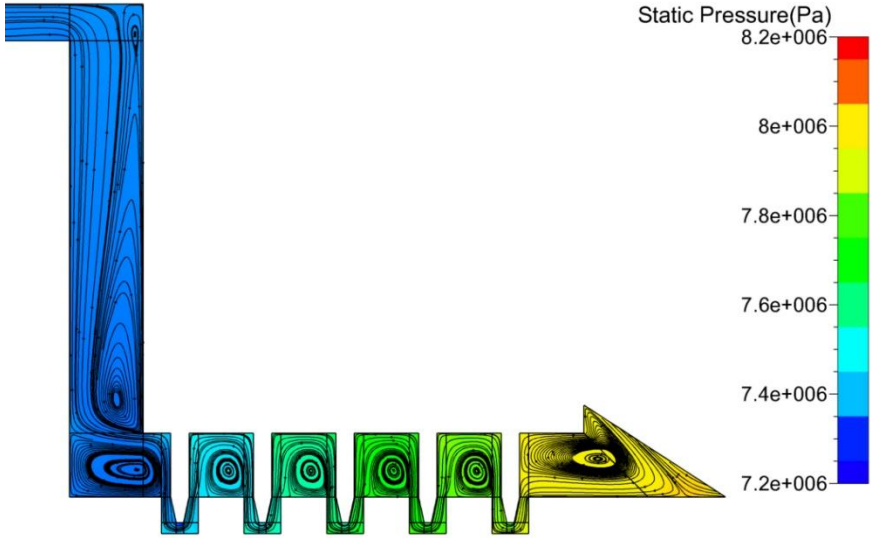


5.4 CFD应用算例

3. 离心压缩机迷宫密封内流场数值模拟

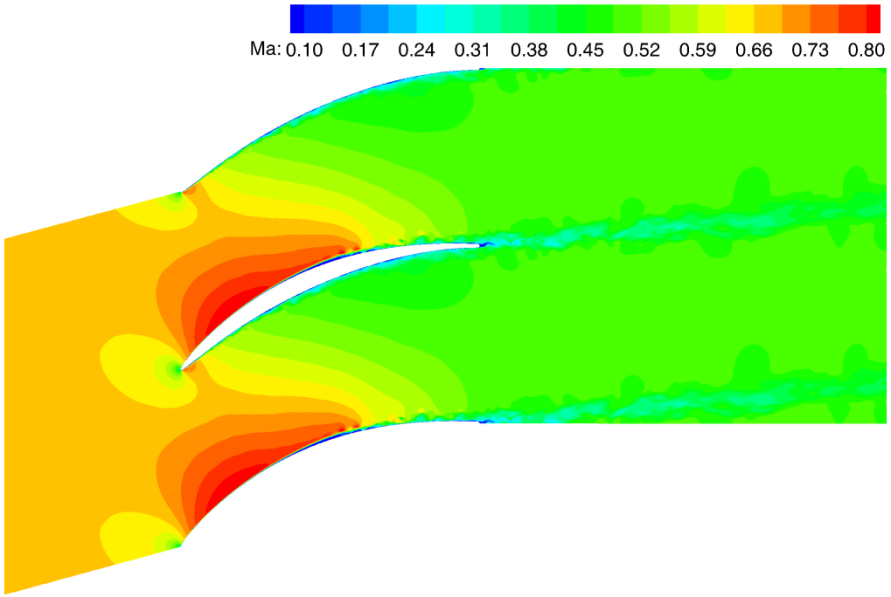


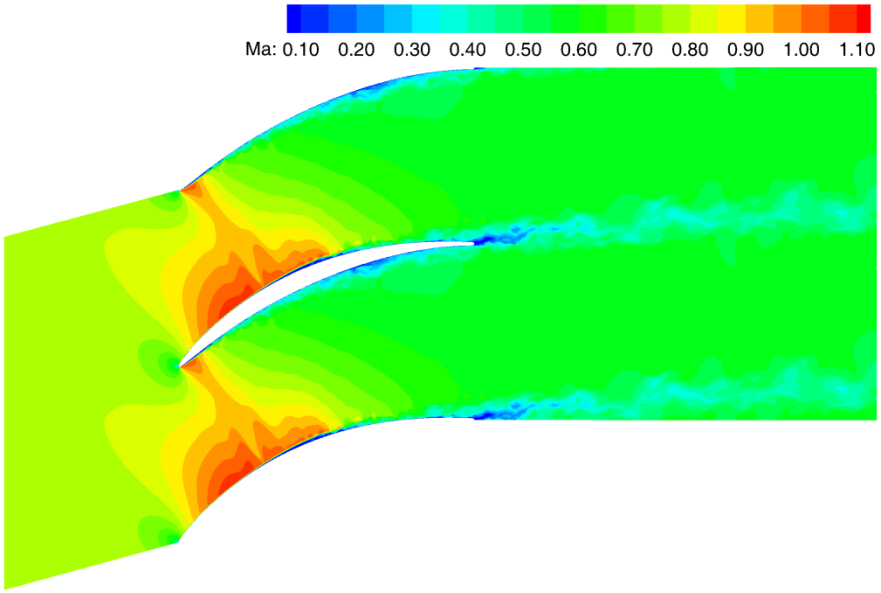




5.4 CFD应用算例

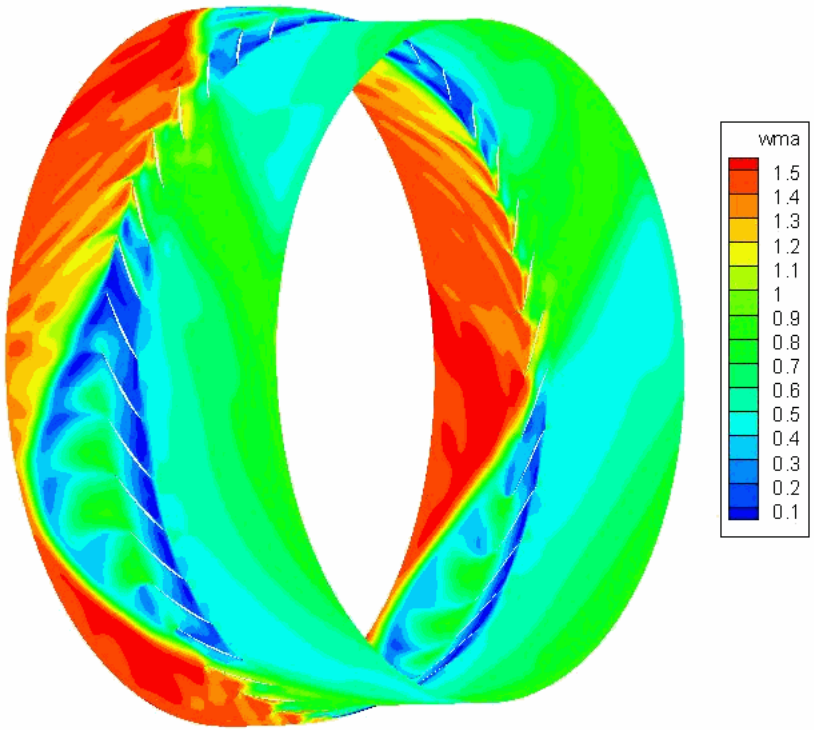
4. 平面叶栅内部流动数值模拟

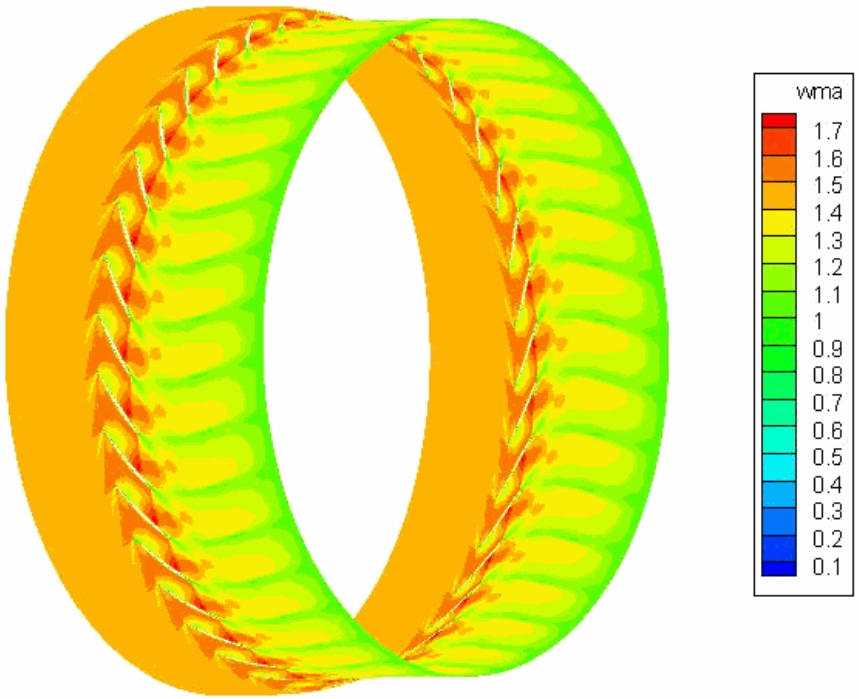




5.4 CFD应用算例

5. 跨音速轴流压缩机转子旋转失速与喘振数值模拟（天河二号）





谢　谢！