西安交通大学能源与动力工程学院本科生课程

计算流体动力学

张楚华
西安交通大学流体机械研究所
邮编：710049
电子信箱：chzhang@mail.xjtu.edu.cn

参考教材

本科生教材

（1）王福军，计算流体动力学分析，清华大学出版社，2004。

（2）韩占忠等，Fluent流体工程仿真计算，北京理工大学出版社，2004。

研究生教材

（3）陶文铨，数值传热学，西安交通大学出版社，2001。

（4）马铁犹，计算流体动力学，北京航空学院出版社，1985。

（5）傅德薰，马延文，计算流体力学，高等教育出版社，2002。

课程重点

（1）对流－扩散方程的有限体积法；

（2）NS方程组的压力修正算法；

理论

（3）利用Fluent商业软件对简单流动计算。

实践

先修课程

（1）流体力学
（2）传热学
（3）微积分

§0 计算流体力学简介

毛主席语录：
认识自然，改造自然

§0.1 研究流动的意义

（1）认识流动：揭示自然界中的流动规律及流体工程中的工作原理；
（2）控制流动：通过改造流动设计，提高流动效率，增加结构安全性，降低流动噪声等。

§0.2 研究流动的方法

（1）理论流体力学：即通常所说的流体力学，是利用数学与力学方法研究流动现象，从而得到流动控制方程组及其解析解的学科。基本内容：
(a)流动控制方程组及其定解条件；
(b)解析解；Berker 1963，Wang 1989，1991：单向流动，极小雷诺数流动，极大雷诺数流动（势流，边界层）；
(c)封闭模型（本构方程，湍流模型）。

（2）实验流体力学：是在实验条件下，模化自然界及工程中的流动现象，并利用实验手段测试流动物理量的方法。

模化：放大实验，缩小实验，原型实验。

实验手段：皮托管，文丘利管，传感器，热线仪，LDV，PIV等

流动物理量：V，P，T等（性能实验，流场实验）

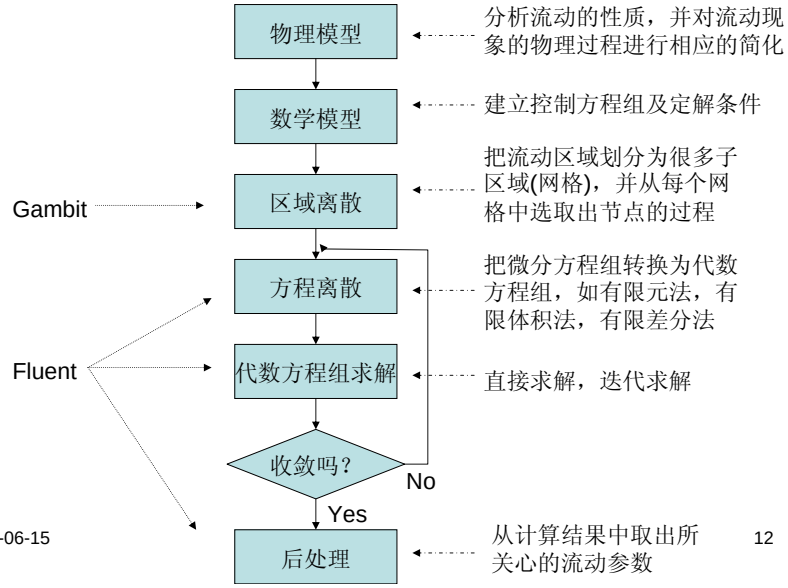
（3）计算流体力学，Computational Fluid Dynamics。在计算机上利用数值方法，把流动的微分控制方程离散成为代数方程组，从而得到流动的近似数值解的方法。

三者关系：理论研究具有对实验与数值研究具有理论指导意义；实验研究对理论研究与数值计算具有检验作用；但对一般的实际流动没有解析解，实验研究周期长，技术难度大，代价高。数值研究开拓了前两者的研究范围。

计算流体力学的基本思想：

把空间时间上连续分布（无穷点）的流动物理量用一系列有限个离散点（节点）上的值来表示，通过一定的方法建立起这些节点上的变量值之间的代数方程组，从而得到所求解变量的近似值。

§0.3 计算流体力学基本步骤



§0.4常见的CFD软件

有限元法：Ansys, Nastran, Fidap, Fasflow, Pastran, Cosmos;

有限体积法：Phoenics, Fluent, Star-CD, Numeca, CFX, Flow-3D。

§0.5 CFD预备知识

（1）对流扩散方程

一维对流扩散方程

二维对流扩散方程

（2）NS方程组

（3）Tayler级数展开式及有限差分

§1 计算流体力学基本概念

§1.1 区域离散

1. 区域离散：将流动区域划分为网格，并从网格中选取节点的过程。
2. 网格分类：
   结构化网格:四边形，六面体
   非结构化网格:三边形，四面体，棱柱体等
3. 网格的要素：顶点，节点，控制体积，控制界面
   顶点：网格的角点
   节点：未知变量Φ存放的位置
   外节点法：未知变量位于网格角点；
   内节点法：未知变量位于网格中心。
   控制体积：用来离散流动控制方程的有限几何体。
   控制界面：控制体积之间的分界面。

4. 网格标记方法

二维标记方法

方法1	方法2
P	i，j
E	i＋1，j
W	i－1，j
N	i，j＋1
S	i，j－1
e	i＋1/2，j
w	i－1/2，j
n	i，j＋1/2
s	i，j－1/2

一维标记方法

方法1	方法2
P	i，j
E	i＋1，j
W	i－1，j
e	i＋1/2，j
w	i－1/2，j

$$\delta x_e = |PE|$$
$$\delta x_w = |PW|$$
$$\Delta x_P = |we|$$

例1. 将[0，1]区间5等分，分别利用内节点法与外节点法确定各节点的坐标。

解：内节点法的各点坐标：

序号	1	2	3	4	5	6	7
坐标	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0

外节点法的各点坐标：

序号	1	2	3	4	5	6
坐标	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0

例2. 利用代数方法对Laval喷管进行网格划分，其中上、下壁面分别为y＝f(x)和y=g(x)，在水平方向＆竖直方向上均匀分成I，J等分。利用外节点法确定各节点坐标。

解：

$$x_{i,j} = x_1 + (x_I - x_1)\frac{i-1}{I}$$

$$y_{i,j} = g(x_{i,j}) + (f(x_{i,j}) - g(x_{i,j}))\frac{j-1}{J}$$

$$i = 1 \text{ to } I+1,\ j = 1 \text{ to } J+1$$

§1.2 方程离散（有限差分法）

1.Tayler级数展开式

设f(x)为任意阶光滑函数，则f(x)在x_0附近可展开为Tayler级数形式：

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)\Delta x^3$$
$$+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n+O(\Delta x^{n+1})$$

$$f(x_0+2\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)2\Delta x+\frac{2^2}{2!}f''(x_0)\Delta x^2+\frac{2^3}{3!}f^{(3)}(x_0)\Delta x^3$$
$$+\ldots\ldots+\frac{2^n}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n+O(\Delta x^{n+1})$$

$$f(x_0-\Delta x)=f(x_0)-f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2-\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)\Delta x^3$$
$$+\ldots\ldots+\frac{(-1)^m}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n+O(\Delta x^{n+1})$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-\frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x+\ldots\ldots$$
$$=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+O(\Delta x^1)$$

上式右端第一项为一阶导数的有限差分，其逼近一阶导数的精度，或者差分格式的精度为一阶，这种格式叫做一阶导数的一阶前向差分。

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+O(\Delta x^1),\qquad \text{前向差分}$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}+O(\Delta x^1),\qquad \text{后向差分}$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}+O(\Delta x^2),\qquad \text{中心差分}$$

同样二阶导数的有限差分：

$$f''(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2)$$

上式也称为二阶导数的二阶中心格式，同样可以得到其它格式，见下个练习。

练习1。证明下列差分格式的精度为：

2. 有限差分法

基本思想：将微分方程中的各项导数用相应的有限差分表示，并忽略高阶小量，从而得到有限差分方程。

例：利用有限差分法，离散一维非定常无源项的对流－扩散方程：

$$\frac{\partial \rho\Phi}{\partial t}+\frac{\partial \rho u\Phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

假设ρ，u，Γ为常数，一阶导数均用前向差分，二阶导数用中心格式离散。

解：对流－扩散方程可写成如下形式（非守恒形式）：

$$\rho\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\rho u\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\Gamma\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

在同一节点（i，n+1），将微分方程中的各阶导数项用相应的差分代替：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|(i,n+1)=\frac{\Phi(i,n+1)-\Phi(i,n)}{\Delta t}+O(\Delta t^1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|(i,n+1)=\frac{\Phi(i+1,n+1)-\Phi(i,n+1)}{\Delta x}+O(\Delta x^1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\Big|(i,n+1)=\frac{\Phi(i+1,n+1)-2\Phi(i,n+1)-\Phi(i-1,n+1)}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2)$$

代入原方程得：

$$\rho\frac{\Phi(i,n+1)-\Phi(i,n)}{\Delta t}+O(\Delta t^1)+\rho u\frac{\Phi(i+1,n+1)-\Phi(i,n+1)}{\Delta x}+O(\Delta x^1)$$

$$=\Gamma\frac{\Phi(i+1,n+1)-2\Phi(i,n+1)+\Phi(i-1,n+1)}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2)$$

$\Phi(i,n+1)$用Φ_i^{n+1}代替，得到差分方程为：

$$\rho\frac{\Phi_i^{n+1}-\Phi_i^{n}}{\Delta t}+\rho u\frac{\Phi_{i+1}^{n+1}-\Phi_i^{n+1}}{\Delta x}=\Gamma\frac{\Phi_{i+1}^{n+1}-2\Phi_i^{n+1}+\Phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

整理得到如下简洁形式：

$$a_i\Phi_i^{n+1}+b_i\Phi_{i-1}^{n+1}+c_i\Phi_{i+1}^{n+1}=d_i$$

其中：

$$a_i=\frac{\rho}{\Delta t}-\frac{\rho u}{\Delta t}+\frac{2\Gamma}{\Delta x^2},\quad b_i=-\frac{\Gamma}{\Delta x^2},\quad c_i=\frac{\rho u}{\Delta x}-\frac{\Gamma}{\Delta x^2},\quad d_i=\frac{\rho}{\Delta t}\Phi_i^n$$

§ 1.3 差分方程的误差分析

由下列因素引起的：

（1）网格划分（网格质量，网格数量），区域离散引起

（2）差分格式（格式精度），方程离散引起

（3）舍入误差（不完全迭代，计算机字长），代数方程组求解引起

问题：设微分方程$L(\Phi)=0$的精确解为$\Phi(i,n)$，

差分方程$L_h(\Phi)=0$的精确解为Φ_i^n

差分方程$L_h(\Phi)=0$的实际得到解为$\hat{\Phi}_i^n$

求：$\Phi(i,n)-\hat{\Phi}_i^n=?$,即但网格步长$h\to 0$时候，$\Phi(i,n)-\hat{\Phi}_i^n\to 0?$

相容性分析

稳定性分析

收敛性分析

Lax定理：对于线性的微分方程的初值问题，如差分方程是相容的，则收敛性的充要条件是差分方程是稳定的

§1.4 差分方程的物理特性

（1）人工粘性（或假扩散，数值粘性）
（2）守恒特性
（3）迁移特性

§2 对流扩散方程的有限体积法

§2.1 有限体积法的基本步骤

(1) 积分：将守恒型控制方程在任意一个有限控制体积及时间间隔内积分；

(2) 选型：选定Φ及其导数 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ 对时间及空间坐标的分布曲线，从而确定界面上的变量值和导数值；

(3) 整理：整理离散方程组，形成代数方程组。

例. 利用有限体积法，推导一维非定常的对流－扩散方程的离散形式：

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t}+\frac{\partial \rho u \Phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}+S$$

解:(1)积分,取有限控制体为P,积分区域为[w, e]×[t, t+Δt]。

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\left(\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t}+\frac{\partial \rho u \Phi}{\partial x}\right)dxdt=\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\left(\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)dxdt+\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e Sdxdt$$

利用积分公式，上式可写成：

$$\int_w^e(\rho^{t+\Delta t}\Phi^{t+\Delta t}-\rho^t\Phi^t)dx+\int_t^{t+\Delta t}\left(\rho u\Phi\big|_e-\rho u\Phi\big|_w\right)dt$$

$$=\int_t^{t+\Delta t}\left(\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_e-\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_w\right)dt+\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e Sdxdt$$

（2）选型

非定常项：Φ对x呈阶梯函数变化

$$\int_w^e(\rho^{t+\Delta t}\Phi^{t+\Delta t}-\rho^t\Phi^{t+\Delta t})dx=(\rho_P^{t+\Delta t}\Phi_P^{t+\Delta t}-\rho_P^t\Phi_P^t)\Delta x$$

对流项：Φ对时间呈隐式阶梯变化函数分布，对空间坐标呈分段线性函数分布

$$\int_t^{t+\Delta t}\left(\rho u\Phi\big|_e-\rho u\Phi\big|_w\right)dt=\left(\rho u\Phi\big|_e^{t+\Delta t}-\rho u\Phi\big|_w^{t+\Delta t}\right)\Delta t$$

$$=(\rho u\big|_e^{t+\Delta t}\frac{(\Phi_P^{t+\Delta t}+\Phi_E^{t+\Delta t})}{2}-\rho u\big|_w^{t+\Delta t}\frac{(\Phi_W^{t+\Delta t}+\Phi_P^{t+\Delta t})}{2})\Delta t$$

扩散项：Φ对时间呈隐式阶梯变化函数分布，对空间坐标呈分段线性函数分布

$$\int_t^{t+\Delta t}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_e-\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_w\right)dt=(\Gamma_e^{t+\Delta t}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_e^{t+\Delta t}-\Gamma_w^{t+\Delta t}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_w^{t+\Delta t})\Delta t$$

$$=(\Gamma_e^{t+\Delta t}\frac{\Phi_E^{t+\Delta t}-\Phi_P^{t+\Delta t}}{\delta x_e}-\Gamma_w^{t+\Delta t}\frac{\Phi_P^{t+\Delta t}-\Phi_W^{t+\Delta t}}{\delta x_w})\Delta t$$

源项：S对时间呈显式阶梯变化函数分布，对空间坐标呈阶梯函数分布

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e Sdxdt=S_P^t\Delta x\Delta t$$

（3） 整理, 将上述各项代入方程,并且两端同时除以Δt

$$(\rho_P^{t+\Delta t}\Phi_P^{t+\Delta t}-\rho_P^t\Phi_P^t)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\rho u\Big|_e^{t+\Delta t}\frac{\Phi_P^{t+\Delta t}+\Phi_E^{t+\Delta t}}{2}-\rho u\Big|_w^{t+\Delta t}\frac{\Phi_W^{t+\Delta t}+\Phi_P^{t+\Delta t}}{2}$$

$$=\Gamma_e^{t+\Delta t}\frac{\Phi_E^{t+\Delta t}-\Phi_P^{t+\Delta t}}{\delta x_e}-\Gamma_w^{t+\Delta t}\frac{\Phi_P^{t+\Delta t}-\Phi_W^{t+\Delta t}}{\delta x_w}+S_P^t\Delta x$$

写成标准的有限体积法形式，得到如下代数方程（忽略掉上标t＋Δt，以下同）

$$a_P\Phi_P=a_E\Phi_E+a_W\Phi_W+b$$

$$a_E=\frac{\Gamma_e}{\delta x_e}-\frac{\rho_e u_e}{2}=D_e-\frac{1}{2}F_e$$

$$a_W=D_w+\frac{1}{2}F_w$$

$$a_P=a_E+a_W+F_e-F_w+\rho_P\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$b=S_P\Delta x+\rho\frac{\Delta x}{\Delta t}\Phi_P^t$$

*F*为通过界面的流量，*D*为扩导系数。二者之比为网格的Peclet数：

$$P_\Delta=\frac{F}{D}=\frac{\rho u\delta x}{\Gamma}$$

表示对流能力与扩散能力的相对大小。在计算相邻节点对P节点的影响系数（a_E，a_W），即在选型时候需要考虑P_Δ的影响

例 利用有限体积法，离散二维对流－扩散方程

$$\frac{\partial\rho\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\rho u\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\rho v\Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}+S$$

其中Φ随时间呈隐式阶梯函数变化，随空间x，y呈分段线性函数变化。

解：（1）积分，[t, t+Δt]×[w, e]×[s, n]

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial\rho\Phi}{\partial t})dxdydt$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial\rho u\Phi}{\partial x})dxdydt+\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial\rho v\Phi}{\partial y})dxdydt+$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x})dxdydt+\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y})dxdydt++\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n Sdxdydt$$

（2）选型

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial\rho\Phi}{\partial t})dxdydt=\int_w^e\int_s^n\int_t^{t+\Delta t}\left(\frac{\partial\rho\Phi}{\partial t}\right)dtdydx$$

$$=\int_w^e\int_s^n(\rho\Phi-\rho^t\Phi^t)dydx=(\rho_P\Phi_P-\rho_P^t\Phi_P^t)\Delta x\Delta y$$

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial\rho u\Phi}{\partial x})dxdydt=\int_t^{t+\Delta t}\int_s^n(\rho u\Phi\big|_e-\rho u\Phi\big|_w)dydt$$

$$=(\rho u\Delta y\Phi\big|_e-\rho u\Delta y\Phi\big|_w)\Delta t=(F_e\frac{\Phi_P+\Phi_E}{2}-F_w\frac{\Phi_W+\Phi_P}{2})\Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial\rho v\Phi}{\partial y})dxdydt=(F_n\frac{\Phi_P+\Phi_N}{2}-F_s\frac{\Phi_S+\Phi_P}{2})\Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x})dxdydt=\int_t^{t+\Delta t}\int_s^n(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\big|_e-\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\big|_w)dydt$$

$$=(\frac{\Gamma_e\Delta y}{\delta x_e}(\Phi_E-\Phi_P)-\frac{\Gamma_w\Delta y}{\delta x_w}(\Phi_P-\Phi_W))\Delta t$$

$$=(D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_e(\Phi_P-\Phi_W))\Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n(\frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y})dxdydt=(D_n(\Phi_N-\Phi_P)-D_s(\Phi_P-\Phi_S))\Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_w^e\int_s^n Sdxdydt=S_P\Delta x\Delta y\Delta t$$

（3）整理，将上述各项代入原方程并整理成如下形式

$$a_P\Phi_P=a_E\Phi_E+a_W\Phi_W+a_N\Phi_N+a_S\Phi_S+b$$

$$a_E=D_e-\frac{1}{2}F_e,\quad D_e=\frac{\Gamma_e\Delta y}{\delta x_e},\quad F_e=\rho u_e\Delta y$$

$$a_W=D_w+\frac{1}{2}F_w,\quad D_w=\frac{\Gamma_w\Delta y}{\delta x_w},\quad F_w=\rho u_w\Delta y$$

$$a_N=D_n-\frac{1}{2}F_n,\quad D_n=\frac{\Gamma_n\Delta x}{\delta y_n},\quad F_n=\rho v_n\Delta x$$

$$a_S=D_s+\frac{1}{2}F_s,\quad D_s=\frac{\Gamma_s\Delta x}{\delta y_s},\quad F_s=\rho v_s\Delta x$$

$$a_P=a_E+a_W+a_N+a_S+(F_e-F_w+F_n-F_s)+\frac{\rho_P\Delta x\Delta y}{\Delta t}$$

$$b=S_P\Delta x\Delta y+\frac{\rho_P^t\Delta x\Delta y}{\Delta t}\Phi_P^t$$

§ 2.2 对流扩散方程的离散形式

- 讨论的对象：定常无源项的一维对流扩散方程的各种离散格式，该方程既具备一般对流扩散方程的基本性质，又具有解析解，便于数值解与精确解比较。
- 问题：

$$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx}\qquad x\in(0,L)$$

边界条件 $\Phi(0)=\Phi_0,\Phi(L)=\Phi_L$

ρ，u，Γ为常数，求Φ=？

解：对自变量x与求解变量Φ做如下变换：

$$\begin{cases}\tilde{x}=x/L\\ \tilde{\Phi}=\dfrac{\Phi-\Phi_0}{\Phi_L-\Phi_0},\end{cases}\qquad 即\begin{cases}x=\tilde{x}L\\ \Phi=\Phi_0+\tilde{\Phi}(\Phi_L-\Phi_0)\end{cases}$$

$$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{\Phi_L-\Phi_0}{L}\frac{d\rho u\tilde{\Phi}}{d\tilde{x}},\quad \frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx}=\frac{\Phi_L-\Phi_0}{L^2}\frac{d}{d\tilde{x}}\Gamma\frac{d\tilde{\Phi}}{d\tilde{x}}$$

原方程变换为：

$$\frac{d^2\tilde{\Phi}}{d\tilde{x}^2}=\frac{\rho uL}{\Gamma}\frac{d\tilde{\Phi}}{d\tilde{x}},\qquad 即\frac{d^2\tilde{\Phi}}{d\tilde{x}^2}=Pe\frac{d\tilde{\Phi}}{d\tilde{x}}\qquad B.C.\ \begin{cases}\tilde{\Phi}(0)=0\\ \tilde{\Phi}(1)=1\end{cases}$$

$$\lambda^2=Pe\lambda$$

$$\lambda_1=0,\lambda_2=Pe$$

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x})=C_1+C_2e^{Pe\tilde{x}}$$

$$\begin{cases}C_1+C_2=0\\ C_1+C_2e^{Pe}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\dfrac{-1}{e^{Pe}-1}\\ C_2=\dfrac{1}{e^{Pe}-1}\end{cases}\Rightarrow\tilde{\Phi}=\frac{e^{Pe\tilde{x}}-1}{e^{Pe}-1}$$

$$\frac{\Phi(x)-\Phi_0}{\Phi_L-\Phi_0}=\frac{e^{Pex/L}-1}{e^{Pe}-1}$$

$$\text{或}\Phi(x)=\Phi_0+(\Phi_L-\Phi_0)\frac{e^{Pex/L}-1}{e^{Pe}-1}$$

$$Pe=\frac{\rho uL}{\Gamma}$$

*Φ(x)*分布与*Pe*有关 !!!

1. 中心格式

选型：规定界面上的变量值与界面上的导数值均按分段线性函数确定

$$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx}$$

(1) 积分：$\int_w^e\frac{d\rho u\Phi}{dx}dx=\int_w^e\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx}dx$

$$\rho u\Phi\big|_e-\rho u\Phi\big|_w-\Gamma\frac{d\Phi}{dx}\Big|_e-\Gamma\frac{d\Phi}{dx}\Big|_w$$

(2) 选型：$F_e\frac{\Phi_P+\Phi_E}{2}-F_e\frac{\Phi_W+\Phi_P}{2}=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$

(3) 整理：$a_P\Phi_P=a_E\Phi_E+a_W\Phi_W$

$$a_E=D_e-\frac{1}{2}F_e,a_W=D_w+\frac{1}{2}F_w$$

$$a_P=a_E+a_W+(F_e-F_w)$$

例. $\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx},\quad x\in(0,1)$

$\Phi(0)=100,\quad \Phi(1)=200$

$\rho=1,\ u=2,\ \Gamma=1$

采用内节点法对(0,1)二等分，采用中心格式求Φ_2和Φ_3，并与精确解比较。

解：$F_e\Phi_e-F_w\Phi_w=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$

对于节点2:

$$F_e\frac{\Phi_P+\Phi_E}{2}-F_w\Phi_W=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$$

$$a_E=D_e-\frac{1}{2}F_e=1,a_W=D_w+F_w=6,a_P=a_E+a_W+(F_e-F_w)=7$$

$$7\Phi_2=\Phi_3+600$$

对于节点3:

$$F_e\Phi_E-F_w\frac{\Phi_W+\Phi_P}{2}=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$$

$$a_E=D_e-F_e=2,\ a_W=D_w+\frac{1}{2}F_w=3,\ a_P=a_E+a_W+(F_e-F_w)=5$$

$$5\Phi_3=3\Phi_2+400$$

联立方程 $\begin{cases}7\Phi_2=\Phi_3+600\\5\Phi_3=3\Phi_2+400\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Phi_2=106.25\\\Phi_3=143.75\end{cases}$

精确解：$\Phi(x)=100+(200-100)\times\frac{e^{Pex/L}-1}{e^{Pe}-1}=100+100\times\frac{e^{2x}-1}{e^2-1}$

$\Phi(0.25)=110.15,\quad \Phi(0.75)=154.50$

	Φ_2	Φ_3
中心格式	106.25	143.75
精确解	110.15	154.50
相对误差	3.1%	7.0%

作业 $\dfrac{d\rho u\Phi}{dx}=\dfrac{d}{dx}\Gamma\dfrac{d\Phi}{dx}, x\in(0,1)$

$\Phi(0)=10,\Phi(1)=20$

$\rho=1,u=2,\Gamma=1$

采用内节点法对(0,1)三等分，采用中心格式求Φ_2，Φ_3，Φ_4，并与精确解比较。

中心格式的不稳定性：

$$a_P\Phi_P=a_E\Phi_E+a_W\Phi_W$$

$$a_E=D_e-\frac{1}{2}F_e, a_W=D_w+\frac{1}{2}F_w$$

$$a_P=a_E+a_W+F_e-F_w$$

对于均匀网格，且ρ，u,Γ为常数：

$$D_e=\frac{\Gamma_e}{\delta x_e}=\frac{\Gamma}{\delta x}=\frac{\Gamma_w}{\delta x_w}=D_w=D$$

$$F_e=\rho u=F_w=F$$

$$P_\Delta=\frac{F}{D}=\frac{\rho u\delta x}{\Gamma}=0.5P_e$$

$$a_E=D(1-\frac{1}{2}P_\Delta),\quad a_W=D(1+\frac{1}{2}P_\Delta),\quad a_P=2D$$

$$\Phi_P=\frac{(1-P_\Delta/2)\Phi_E+(1+P_\Delta/2)\Phi_W}{2}$$

举例: Φ_W=100, Φ_E=200,

P_Δ	中心格式Φ_P	精确解Φ_P
0	150	150
1	125	126.9
2	100	111.9
4	50	101.8

分析：对于P_Δ=4，Φ_P=50，这在物理上是不合理，因为对于一个定常无源项的对流扩散问题，Φ_P必须介于Φ_W和Φ_E,

原因：当$|P_\Delta|>2$，a_W或a_E小于0

结论：中心格式只能适合于$|P\Delta|<=2$

2. 迎风格式

界面上的变量值取上游节点处的变量值（阶梯变化函数）

界面上的导数值均按分段线性函数确定

$$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx}$$

$$F_e\Phi_e-F_w\Phi_w=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$$

$$\Phi_e=\begin{cases}\Phi_P & 当F_e\ge 0\\ \Phi_E & 当F_e<0\end{cases}\qquad \Phi_w=\begin{cases}\Phi_W & 当F_w\ge 0\\ \Phi_P & 当F_w<0\end{cases}$$

$$F_e\Phi_e=\Phi_P[F_e,0]-\Phi_E[-F_e,0]$$

$$F_w\Phi_w=\Phi_W[F_w,0]-\Phi_P[-F_w,0]$$

$$\Phi_P[F_e,0]-\Phi_E[-F_e,0]-\Phi_W[F_w,0]+\Phi_P[-F_w,0]$$

$$=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$$

整理为：$a_P\Phi_P=a_E\Phi_E+a_W\Phi_W$

$$a_E=D_e+[-F_e,0],\qquad a_W=D_w+[F_w,0],$$

$$a_P=a_E+a_W+F_e-F_w$$

特点：

1.对于任意的P_Δ，a_E，a_W均大于0；

2.精度为1阶。

中心格式具有2阶精度的说明：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_i=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_P=\frac{1}{\Delta x}\int_w^e\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx=\frac{1}{\Delta x}(\Phi_e-\Phi_w)$$

$$=\frac{1}{\Delta x}(\frac{1}{2}(\Phi_P+\Phi_E)-\frac{1}{2}(\Phi_W+\Phi_P))=\frac{1}{2\Delta x}(\Phi_E-\Phi_W)=\frac{\Phi_{i+1}-\Phi_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\Big|_i=\frac{1}{\Delta x}\int_w^e\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx=\frac{1}{\Delta x}(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_e-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_w)$$

$$=\frac{1}{\Delta x}(\frac{\Phi_E-\Phi_P}{\delta x_e}-\frac{\Phi_P-\Phi_W}{\delta x_w})=\frac{\Phi_E-2\Phi_P+\Phi_W}{\Delta x^2}=\frac{\Phi_{i+1}-2\Phi_i+\Phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

假设均匀网格$\Delta x=\delta x_e=\delta x_w$

迎分格式具有1阶精度的说明：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_i=\frac{1}{\Delta x}\int_w^e\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx=\frac{1}{\Delta x}(\Phi_e-\Phi_w)=\frac{1}{\Delta x}(\Phi_P-\Phi_W)=\frac{\Phi_i-\Phi_{i-1}}{\Delta x}$$

假设$u\ge 0$

例 $\dfrac{d\rho u\Phi}{dx}=\dfrac{d}{dx}\Gamma\dfrac{d\Phi}{dx}, x\in(0,1)$

$\Phi(0)=100, \Phi(1)=200$

$\rho=1, u=2, \Gamma=1$

采用内节点法对(0,1)二等分，利用迎分格式求Φ_2和Φ_3，并与中心格式和精确解比较

解：$F_e\Phi_e-F_w\Phi_w=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$

对于节点2:

$F_e\Phi_P-F_w\Phi_W=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$

$a_E=D_e=2, a_W=D_w+F_w=4+2=6, a_P=8$

$8\Phi_2=2\Phi_3+600$

对于节点3:

$F_e\Phi_E-F_w\Phi_W=D_e(\Phi_E-\Phi_P)-D_w(\Phi_P-\Phi_W)$

$a_E=D_e-F_e=4-2=2,\quad a_W=D_w+F_w=2+2=4,\quad a_P=6$

$6\Phi_3=4\Phi_2+400$

联立方程$\begin{cases}8\Phi_3=2\Phi_2+600\\6\Phi_3=4\Phi_2+400\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Phi_2=110\\\Phi_3=140\end{cases}$

	Φ_2	Φ_3
精确解	110.15	154.50
中心格式计算值	106.25	143.75
相对误差	3.1%	7.0%
迎风格式计算值	110	140
相对误差	0.136%	9.39%

3.混合格式：综合了中心格式和迎风格式的优点。

$$a_E/D_e=\begin{cases}0, & 当P_\Delta>2\\1-\dfrac{1}{2}P_{\Delta e}, & 当-2\le P_\Delta\le 2\\-P_{\Delta e}, & 当P_\Delta<-2\end{cases}$$

写成紧凑形式：

$$a_E/D_e=\left[\left|-P_{\Delta e},\ 1-\frac{1}{2}P_{\Delta e},\ 0\right|\right]$$

$$a_W/D_w=\left[\left|P_{\Delta w},\ 1+\frac{1}{2}P_{\Delta w},\ 0\right|\right]$$

特点：

1.影响系数恒为正

2.当$|P_\Delta|>2$时，完全忽略了上游的影响，包括扩散影响

3.当$|P_\Delta|\leqslant 2$时，等价于中心格式

4.格式精度总体为1阶

4. 指数格式

模型方程有解析解，
为什么不利用解析解计算界面上的变量值和导数值？

$$(\rho u\Phi-\Gamma\frac{d\Phi}{dx})_e=(\rho u\Phi-\Gamma\frac{d\Phi}{dx})_w$$

利用精确解

$$\Phi(x)=\Phi_0+(\Phi_L-\Phi_0)\frac{e^{Pex/L}-1}{e^{Pe}-1}$$

$$\frac{d\Phi}{dx}=(\Phi_L-\Phi_0)\frac{P_e}{L}\frac{e^{Pex/L}}{e^{Pe}-1}$$

$$\rho u_e(\Phi_P+(\Phi_E-\Phi_P)\frac{e^{0.5P_{\Delta e}}-1}{e^{P_{\Delta e}}-1})-\Gamma_e\frac{P_{\Delta e}}{\delta x_e}(\Phi_E-\Phi_P)\frac{e^{0.5P_{\Delta e}}}{e^{P_{\Delta e}}-1}$$

$$=\rho u_w(\Phi_W+(\Phi_P-\Phi_W)\frac{e^{0.5P_{\Delta w}}-1}{e^{P_{\Delta w}}-1})-\Gamma_w\frac{P_{\Delta w}}{\delta x_w}(\Phi_P-\Phi_W)\frac{e^{0.5P_{\Delta w}}}{e^{P_{\Delta w}}-1}$$

整理得：

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W$$

$$a_E = \frac{F_e}{e^{P_{\Delta e}}-1}, \quad a_W = \frac{F_w e^{P_{\Delta w}}}{e^{P_{\Delta w}}-1},$$

$$a_P = a_W + a_W + F_e - F_w$$

特点：

1.对于模型方程，指数格式是精确的格式，但对于其它情形（如u不是常数），它也是一种近似的离散格式

2.指数运算的计算量大

5.乘方格式：由Patankar提出的，与指数格式的计算结果十分接近，但计算工作量小得多，定义为：

$$a_E / D_e = \begin{cases} -P_{\Delta e}, & 当P_{\Delta e} < -10 \\ (1+0.1P_{\Delta e})^5 - P_{\Delta e}, & 当-10 \le P_{\Delta e} \le 0 \\ (1-0.1P_{\Delta e})^5, & 当0 \le P_{\Delta e} \le 10 \\ 0, & 当P_{\Delta e} > 10 \end{cases}$$

写成紧凑形式

$$a_E / D_e = \left[0,\ (1-0.1P_{\Delta e})^5\right] + \left[0,\ -P_{\Delta e}\right]$$

5种格式的小结：

（1）每种格式均有自己的特点

（2）中心格式与迎风格式是将对流作用与扩散作用分开来考虑的，且扩散项均用分段线性选型

（3）混合格式、指数格式和乘方格式是将对流和扩散作用联合起来考虑

（4）每种格式的定义均可以用a_E/D_e给出

§2.3 二维对流扩散方程的离散格式

问题：利用有限体积法，对二维对流扩散方程进行离散

$$\frac{\partial\rho\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\rho u\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\rho v\Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y} + S$$

（1）中心格式

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W + a_N\Phi_N + a_S\Phi_S + b$$

$$a_E = D_e - \frac{1}{2}F_e,\quad D_e = \frac{\Gamma_e\Delta y}{\delta x_e},\quad F_e = \rho u_e\Delta y$$

$$a_W = D_w + \frac{1}{2}F_w,\quad D_w = \frac{\Gamma_w\Delta y}{\delta x_w},\quad F_w = \rho u_w\Delta y$$

$$a_N = D_n - \frac{1}{2}F_n,\quad D_n = \frac{\Gamma_n\Delta x}{\delta y_n},\quad F_n = \rho v_n\Delta x$$

$$a_S = D_s + \frac{1}{2}F_s,\quad D_s = \frac{\Gamma_s\Delta x}{\delta y_s},\quad F_s = \rho v_s\Delta x$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + (F_e - F_w + F_n - F_s) + \frac{\rho_P\Delta x\Delta y}{\Delta t}$$

$$b = S_P\Delta x\Delta y + \frac{\rho_P^n\Delta x\Delta y}{\Delta t}\Phi_P^n$$

（2）迎风格式

$$a_E = D_e + [|-F_e,\ 0|]$$
$$a_W = D_w + [|F_w,\ 0|]$$
$$a_N = D_n + [|-F_n,\ 0|]$$
$$a_S = D_s + [|F_s,\ 0|]$$

其它同中心格式

（3）混合格式

$$a_E = [|-F_e,\ D_e - \frac{1}{2}F_e,\ 0|]$$

$$a_W = [|F_w,\ D_w + \frac{1}{2}F_w,\ 0|]$$

$$a_N = [|-F_n,\ D_n - \frac{1}{2}F_n,\ 0|]$$

$$a_S = [|F_s,\ D_s + \frac{1}{2}F_s,\ 0|]$$

其它同中心格式

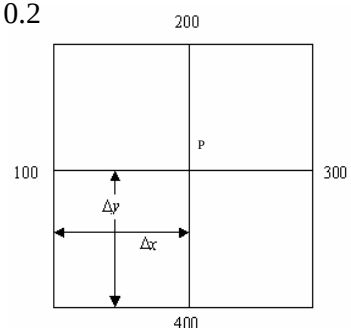
作业：二维定常对流－扩散方程：

$$\frac{\partial\rho u\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\rho v\Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

边界条件如图所示，其中：

$$\rho = 1, u = 3, v = 5, \Gamma = 0.5, \Delta x = \Delta y = 0.2$$

利用中心格式及迎风格式计算节点*P*处的值。



5种格式的a_E / D_e

中心格式	$1-\frac{1}{2}P_{\Delta e}$
迎分格式	$1+[\|-P_{\Delta e},\ 0\|]$
混合格式	$[\|-P_{\Delta e},\ 1-\frac{1}{2}P_{\Delta e},\ 0\|]$
指数格式	$\frac{P_{\Delta e}}{e^{P_{\Delta e}}-1}$
乘方格式	$[\|0,\ (1-0.1\|P_{\Delta e}\|)^5\|]+[\|0,\ -P_{\Delta e}\|]$

§ 2.4 导热问题的有限体积法

对流扩散问题

一维：$\frac{\partial\rho\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\rho u\Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x} + S$

二维：$\frac{\partial\rho\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\rho u\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\rho v\Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y} + S$

导热问题

一维：$\frac{\partial\rho T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{k}{c_P}\frac{\partial T}{\partial x} + S$

二维：$\frac{\partial\rho T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{k}{c_P}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{k}{c_P}\frac{\partial T}{\partial y} + S$

结论：

（1）导热问题是对流速度为0的一个特殊的对流扩散问题。

（2）5种格式中令P_Δ=0，就可以得到导热问题的离散形式。

（3）5种离散格式均蜕化为中心格式。

§ 2.5 代数方程组求解方法

CFD中代数方程组的特点

(1)线性代数方程组：$A\vec{\Phi}=\vec{b}$,

其中$A=(a_{ij})_{N\times N},\vec{\Phi}=(\Phi_j)_N^T,\vec{b}=(b_i)_N^T$

(2)系数矩阵A为大型稀疏带状矩阵，

三对角矩阵

$$A_i\Phi_i=B_i\Phi_{i+1}+C_i\Phi_{i-1}+D_i,\quad i=1,N$$

五对角矩阵

$$A_i\Phi_i=B_i\Phi_{i+2}+C_i\Phi_{i+1}+D_i\Phi_{i-1}+E_i\Phi_{i-2}+F_i,\quad i=1,N$$

（3）系数矩阵A对角占优。

1.TDMA方法(Tri-Diagonal Matrix Algebraic Equations)

适合于一维三节点格式

$$A_i\Phi_i=B_i\Phi_{i+1}+C_i\Phi_{i-1}+D_i,\quad i=1,N$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & -B_1 & & & & \\ -C_2 & A_2 & -B_2 & & & \\ & -C_3 & A_3 & -B_3 & & \\ & & & -C_{N-1} & A_{N-1} & -B_{N-1} \\ & & & & -C_N & A_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\\ \cdot\\ \Phi_{N-1}\\ \Phi_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_1\\ D_2\\ D_3\\ \cdot\\ D_{N-1}\\ D_N\end{pmatrix}$$

$$A_i\Phi_i=B_i\Phi_{i+1}+C_i\Phi_{i-1}+D_i \qquad (1)$$

消元

$$\Phi_i=P_i\Phi_{i+1}+Q_i \qquad (2)$$

$$\Phi_{i-1}=P_{i-1}\Phi_i+Q_{i-1} \qquad (3)$$

$$(3)\times C_i+(1):$$

$$A_i\Phi_i=B_i\Phi_{i+1}+C_iP_{i-1}\Phi_i+C_iQ_{i-1}+D_i$$

整理为

$$\Phi_i=\frac{B_i}{A_i-C_iP_{i-1}}\Phi_{i+1}+\frac{C_iQ_{i-1}+D_i}{A_i-C_iP_{i-1}} \qquad (4)$$

对照（2）、（4），得到：

$$P_i=\frac{B_i}{A_i-C_iP_{i-1}},\qquad Q_i=\frac{C_iQ_{i-1}+D_i}{A_i-C_iP_{i-1}} \qquad (5)$$

$$A_1\Phi_1=B_1\Phi_2+D_1\Rightarrow P_1=\frac{B_1}{A_1},\ Q_1=\frac{D_1}{A_1} \qquad (6)$$

消元是一个递归过程

回代：

N:　　$\Phi_N=Q_N$

$N-1\to 1$:利用（2）计算

TDMA计算步骤：

1° $P_1=\dfrac{B_1}{A_1},\quad Q_1=\dfrac{D_1}{A_1}$

2° $P_i=\dfrac{B_i}{A_i-C_iP_{i-1}},\ Q_i=\dfrac{C_iQ_{i-1}+D_i}{A_i-C_iP_{i-1}},\ i=2,\ N$

3° $\Phi_N=Q_N$

4° $\Phi_i=P_i\Phi_{i+1}+Q_i,\ i=N-1,\ 1$

2.PDMA方法(Penta-Diagonal Matrix algebraic Equations)

适合于一维高阶格式，如二阶迎风格式，QUICK格式等

3.ADI方法（Alternate Direction Iterative Method）

适合于多维问题

$$a_{i,j}\Phi_{i,j} = a_{i+1,j}\Phi_{i+1,j} + a_{i-1,j}\Phi_{i-1,j} + a_{i,j+1}\Phi_{i,j+1} + a_{i,j-1}\Phi_{i,j-1} + b_{i,j}$$

4.迭代方法（Iterative Method）

适合于任意代数方程组 $a_P\Phi_P = \sum a_{nb}\Phi_{nb} + b$

计算步骤：

(1) $k = 0$, 给定初始值$\Phi_P^0, P = 1, N$

(2) $\Phi_P^{k+1} = \dfrac{\sum a_{nb}\Phi_{nb}^k + b}{a_P}, P = 1, N$

(3) 判断$\max\left|a_P\Phi_P^{k+1} - (\sum a_{nb}\Phi_{nb}^{k+1} + b)\right| < \varepsilon$?

如是，则迭代结束；否则$k = k+1$，转（2）

上述迭代法为Jacobi迭代法，

如果在（2）中的Φ_{nb}^k用尽可能最新的Φ_{nb}计算，则为Gauss－Sediel方法。

松弛迭代法：$\dfrac{a_P}{\alpha}\Phi_P = \sum a_{nb}\Phi_{nb} + b - \dfrac{1-\alpha}{\alpha}a_P\Phi_P^k$

5. CG方法（Conjugate Gradient Method）

是一种最优化方法，如ILDU(0)-CGS方法

§3 NS方程的SIMPLE算法

§ 3.1 二维定常不可压缩粘性流动控制方程组

质量守恒方程 $$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0$$

动量守恒方程 $$\frac{\partial \rho uu}{\partial x}+\frac{\partial \rho vu}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho uv}{\partial x}+\frac{\partial \rho vv}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}$$

边界条件：与具体的流动有关

3个方程，3个未知变量：u, v, p。一般没有解析解，只能靠数值计算与实验测量。

NS方程组：不可压缩流动的质量守恒方程与动量守恒方程组

NS方程组的对流－扩散方程形式

$$\frac{\partial \rho u\Phi}{\partial x}+\frac{\partial \rho v\Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial y}+S$$

$$\Phi=\begin{pmatrix}1\\u\\v\end{pmatrix}\qquad \Gamma=\begin{pmatrix}0\\\mu\\\mu\end{pmatrix}\qquad S=\begin{pmatrix}0\\-\partial p/\partial x\\-\partial p/\partial y\end{pmatrix}$$

NS方程的数值求解方法
- 原始变量法
  - 时间推进法
  - 基于压力方法
- 涡流函数法

§ 3.2 数值求解NS方程组的困难

3个困难

(1) 非线性方程组：
u,v不仅是求解变量Φ，还是对流项的系数。

(2)没有压力显式方程：
动量方程是关于u，v的对流扩散方程，
压力如何求？

(3)非物理压力振荡：
以一维静止流动为例，
流速u＝0，动量方程为：
$\frac{\partial p}{\partial x}=0$ 真解为p＝常数

但数值解：$i:\quad p_{i-1}=p_{i+1}$
$i+1: p_i=p_{i+2}$

解决方法?

迭代求解：
先假设一个初始流场，
然后求关于u，v的对流扩散方程。
主要有两种：
分离式求解
耦合式求解

把连续性方程转换为压力方程或者压力修正量的方程。

交错网格

§ 3.3 交错网格上的压力修正方程

$$\begin{cases}\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0 & (1)\\ \frac{\partial \rho uu}{\partial x}+\frac{\partial \rho vu}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial x} & (2)\\ \frac{\partial \rho uv}{\partial x}+\frac{\partial \rho vv}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y} & (3)\end{cases}$$

先给定一个初值（u^0, v^0, p^*），

在u_e控制体积及v_n控制体积上求解方程(2),(3):

$$\begin{cases} a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E)\Delta y & (4) \\ a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N)\Delta x & (5) \end{cases}$$

其解为(u_e^*, v_n^*)：满足动量方程，但不一定满足方程(1)。

对(u_e^*, v_n^*, p^*)修正：

$$\begin{cases} u_e = u_e^* + u_e' & (6) \\ v_n = v_n^* + v_n' & (7) \\ p = p^* + p' & (8) \end{cases}$$

使修正后的(u_e, v_n, p)同时满足动量方程和连续性方程：

$$\begin{cases} a_e(u_e^* + u_e') = \sum a_{nb}(u_{nb}^* + u_{nb}') + \left[(p_P^* + p_P') - (p_E^* + p_E')\right]\Delta y & (9) \\ a_n(v_n^* + v_n') = \sum a_{nb}(v_{nb}^* + v_{nb}') + \left[(p_P^* + p_P') - (p_N^* + p_N')\right]\Delta x & (10) \\ \rho(u_e^* + u_e')\Delta y - \rho(u_w^* + u_w')\Delta y + \rho(v_n^* + v_n')\Delta x - \rho(v_s^* + v_s')\Delta x = 0 & (11) \end{cases}$$

(9)-(4), (10)-(5), (11), 得到：

$$\begin{cases} a_e u_e' = \sum a_{nb} u_{nb}' + (p_P' - p_E')\Delta y & (12) \\ a_n v_n' = \sum a_{nb} v_{nb}' + (p_P' - p_N')\Delta x & (13) \\ \rho\Delta y u_e' - \rho\Delta y u_w' + \rho\Delta x v_n' - \rho\Delta x v_s' \\ \quad = \rho\Delta y u_e^* - \rho\Delta y u_w^{*'} + \rho\Delta x v_n^* - \rho\Delta x v_s^* & (14) \end{cases}$$

忽略掉方程(12),(13)中$\sum a_{nb} u_{nb}'$和$\sum a_{nb} v_{nb}'$，即忽略邻近节点处速度修正值的影响，只考虑压差修正的影响，得到：

$$\begin{cases} u_e' = \dfrac{\Delta y}{a_e}(p_P' - p_E') & (15) \\ v_n' = \dfrac{\Delta x}{a_n}(p_P' - p_N') & (16) \\ a_P p_P' = a_E p_E' + a_W p_W' + a_N p_N' + a_S p_S' + b & (17) \end{cases}$$

压力修正方程(17)

$$a_E = \rho\frac{\Delta y^2}{a_e},\ a_W = \rho\frac{\Delta y^2}{a_w},\ a_N = \rho\frac{\Delta x^2}{a_n},\ a_S = \rho\frac{\Delta x^2}{a_S},$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

$$b = F_e^* - F_w^* + F_n^* - F_s^*$$

讨论：

（1）SIMPLE算法(Semi-Implicit Method for Pressure Linking Equation)

“求解压力耦合方程的半隐式方法”，这里“半隐“指压力修正方程为隐式方程，速度修正方程为显式方程，忽略了$\sum a_{nb} u_{nb}', \sum a_{nb} v_{nb}'$

（2）”半隐“的合理性：速度场的修正量主要由于给定的压力不合理，即主要由附近压力差修正引起的。而且当计算收敛时， u_{nb}', v_{nb}' 确实趋于0

（3）迭代何时收敛？

压力修正方程右端项 $b = F_e^* - F_w^* + F_n^* - F_s^* = 0$

（4）SIMPLE类算法：SIMPLEC,SIMPLER,PISO，为了加速收敛过程，修正“半隐”的近似处理。但建议用SIMPLE算法。

§ 3.4 SIMPLE算法的步骤

(1) 假设一个速度场(u^0, v^0, p^*),

(2) 计算离散动量方程中的系数a_{nb}, a_e, a_n；源项b,

(3) 求解离散动量方程，得到(u^*, v^*),

(4) 求解压力修正方程，得到p',

(5) 修正速度和压力场：$u = u^* + u', v = v^* + v', p = p^* + \alpha p'$,

(6) 判断$|b| = |F_e^* - F_w^* + F_n^* - F_s^*| < \varepsilon_{\max}$？

如是，则计算收敛，否则，转(2)

§ 3.5 同位网格上的SIMPLE算法

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho u}{\partial x}+\dfrac{\partial \rho v}{\partial y}=0 & (1) \\ \dfrac{\partial \rho uu}{\partial x}+\dfrac{\partial \rho vu}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}\mu\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial p}{\partial x} & (2) \\ \dfrac{\partial \rho uv}{\partial x}+\dfrac{\partial \rho vv}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\mu\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial p}{\partial y} & (3) \end{cases}$$

先给定一个初值（u^0, v^0, p^*），在P有限体积上离散方程(2),(3):

$$\begin{cases} a_P u_P=\sum a_{nb}u_{nb}+(p_w-p_e)\Delta y & (4) \\ a_P v_P=\sum a_{nb}v_{nb}+(p_s-p_n)\Delta x & (5) \end{cases}$$

方程（4）、（5）也可写成：

$$\begin{cases} u_P=\dfrac{\sum a_{nb}u_{nb}}{a_P}+\dfrac{\Delta y}{a_P}(p_w-p_e) & (4') \\ v_P=\dfrac{\sum a_{nb}v_{nb}}{a_P}+\dfrac{\Delta x}{a_P}(p_s-p_n) & (5') \end{cases}$$

相似地，界面上速度的动量方程为：

$$\begin{cases} u_e=\tilde{u}_e+(\dfrac{\Delta y}{a_P})_e(p_P-p_E) & (4'') \\ v_n=\tilde{v}_n+(\dfrac{\Delta x}{a_P})_n(p_P-p_N) & (5'') \end{cases}$$

这种界面速度的计算方法称为“界面动量插值”，首先由Rhie and Chow（1983）提出，有别于界面速度“线性插值”。如在动量方程中产生压力波动，可在连续性方程中消除。

方程（4,5）的解为(u_P^*, v_P^*)：满足动量方程，但不一定满足方程(1)。对(u_P^*, v_P^*, p^*)修正：

$$\begin{cases} u_P=u_P^*+u_P' & (6) \\ v_P=v_P^*+v_P' & (7) \\ p=p^*+p' & (8) \end{cases}$$

使修正后的(u_P, v_P, p)同时满足动量方程和连续性方程：

$$\begin{cases} a_P(u_P^*+u_P')=\sum a_{nb}(u_{nb}^*+u_{nb}')+\left[(p_w^*+p_w')-(p_e^*+p_e')\right]\Delta y & (9) \\ a_P(v_P^*+v_P')=\sum a_{nb}(v_{nb}^*+v_{nb}')+\left[(p_s^*+p_s')-(p_n^*+p_n')\right]\Delta x & (10) \\ \rho(u_e^*+u_e')\Delta y-\rho(u_w^*+u_w')\Delta y+\rho(v_n^*+v_n')\Delta x-\rho(v_s^*+v_s')\Delta x=0 & (11) \end{cases}$$

(9)-(4), (10)-(5), (11), 得到：

$$\begin{cases} a_P u_P'=\sum a_{nb}u_{nb}'+(p_w'-p_e')\Delta y & (12) \\ a_P v_P'=\sum a_{nb}v_{nb}'+(p_s'-p_n')\Delta x & (13) \\ \rho\Delta y u_e'-\rho\Delta y u_w'+\rho\Delta x v_n'-\rho\Delta x v_s' & \\ \quad=\rho\Delta y u_e^*-\rho\Delta y u_w^{*'}+\rho\Delta x v_n^*-\rho\Delta x v_s^* & (14) \end{cases}$$

忽略掉方程(12),(13)中$\sum a_{nb}u_{nb}'$和$\sum a_{nb}v_{nb}'$，即忽略邻近节点处速度修正值的影响，只考虑压差修正的影响，得到：

$$\begin{cases} u_P'=\dfrac{\Delta y}{a_P}(p_w'-p_e') & (15) \\ v_P'=\dfrac{\Delta x}{a_P}(p_w'-p_n') & (16) \\ a_P p_P'=a_E p_E'+a_W p_W'+a_N p_N'+a_S p_S'+b & (17) \end{cases}$$

压力修正方程(17)

$$a_E=\rho(\frac{\Delta y^2}{a_P})_e,\ a_W=\rho(\frac{\Delta y^2}{a_P})_w,\ a_N=\rho(\frac{\Delta x^2}{a_P})_n,\ a_S=\rho(\frac{\Delta x^2}{a_P})_s,$$

$$a_P=a_E+a_W+a_N+a_S$$

$$b=F_e^*-F_w^*+F_n^*-F_s^*$$

$$F_e^*=\rho\tilde{u}_e^*\Delta y+\rho(\frac{\Delta y^2}{a_P})_e(p_P^*-p_E^*),F_w^*=\rho\tilde{u}_w^*\Delta y+\rho(\frac{\Delta y^2}{a_P})_w(p_W^*-p_P^*)$$

$$F_n^*=\rho\tilde{v}_n^*\Delta x+\rho(\frac{\Delta x^2}{a_P})_x(p_P^*-p_N^*),F_s^*=\rho\tilde{v}_s^*\Delta x+\rho(\frac{\Delta x^2}{a_P})_s(p_S^*-p_P^*)$$

讨论：

（1）同位网格的优点：所有求解变量都位于主节点，程序结构性好

（2）在连续性方程的离散过程中，界面上的速度（或流量）采用界面动量插值方法，而不是线性插值方法。如果在求解离散动量方程时引入了一个压力波动，则在求解压力修正方程（即连续性方程）中可消除。

（3）迭代何时收敛？

压力修正方程右端项 $b = F_e^* - F_w^* + F_n^* - F_s^* = 0$

§3.6 曲线坐标系下的SIMPLE算法

§3.7 旋转坐标系下的SIMPLE算法：RSIMPLE算法

§3.8 非结构化网格上的SIMPLE算法

§ 3.9 非定常流动的SIMPLE算法

§ 3.10 动网格上的SIMPLE算法

任意Langrangian－Euler参考系（ALE）中的运动控制方程组为：

$$\frac{D_m \rho}{Dt} + \nabla \cdot \left[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m)\right] = 0$$

$$\frac{D_m \rho \mathbf{u}}{Dt} + \nabla \cdot \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_m)\mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathrm{u}$$

其中：

$$\frac{D_m}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_m$$ 为ALE导数

在任意有限控制体P上离散连续性方程和动量守恒方程：

$$\sum_{q=0}^{n_q} \alpha_q \left(\frac{\rho \Delta V}{\Delta t}\right)_P^{n+1-q} + \sum_{f=1}^{n_f} \left(m_f - m_m\right)_f = 0$$

$$\sum_{q=0}^{n_q} \alpha_q \left(\frac{\rho \Delta V \Phi}{\Delta t}\right)_P^{n+1-q} + \sum_{f=1}^{n_f} \left[\left(m_f - m_m\right)\Phi\right]_f = \sum_{f=1}^{n_f} \left(\Gamma^{\Phi} \nabla \Phi \cdot \mathbf{A}\right)_f + S^{\Phi} \Delta V$$

$$\sum_{q=0}^{n_q} \alpha_q \left(\frac{\rho \Delta V \Phi}{\Delta t}\right)_P^{n+1-q} + \left[\sum_{nb=1}^{n_{nb}} A_{nb}^{\Phi} + \sum_{f=1}^{n_f} \left(m_f - m_m\right)_f\right] \Phi_P = \sum_{nb=1}^{n_{nb}} A_{nb}^{\Phi} \Phi_{nb} + S^{\Phi} \Delta V + S_h^{\Phi} + S_c^{\Phi}$$

$$\left(-\sum_{q=1}^{n_q} \alpha_q \left(\frac{\rho \Delta V}{\Delta t}\right)_P^{n+1-q} + \sum_{nb=1}^{n_{nb}} A_{nb}^{\Phi}\right) \Phi_P = \sum_{nb=1}^{n_{nb}} A_{nb}^{\Phi} \Phi_{nb} + S^{\Phi} \Delta V + S_h^{\Phi} + S_c^{\Phi} - \sum_{q=1}^{n_q} \alpha_q \left(\frac{\rho \Delta V}{\Delta t}\right)_P^{n+1-q} \Phi_P^{n+1-q}$$

$$A_P^{p'} p_P' = \sum A_{nb}^{p'} p_{nb}' - \sum m_f^*$$

$$A_P^{p'} = \sum A_{nb}^{p'}$$

$$A_{nb}^{p'} = \left(\frac{\rho \Delta V}{A_P^u}\right)_f \frac{A_f^2}{\sigma V}$$

$$m_f^* = \rho \mathbf{A}_f \cdot \bar{\mathbf{u}}_f^* - \left[\left(\frac{\rho \Delta V}{A_P^u}\right)_f \mathbf{A}_f \cdot (\nabla p^*)_f - \left(\frac{\rho \Delta V}{A_P^u} \nabla p^*\right)_f \cdot \mathbf{A}_f\right]$$

$$\mathbf{u}_P^{n+1} = \mathbf{u}_P^* - \frac{\Delta V}{A_P^u} \nabla p_P' \qquad p_P^{n+1} = p_P^* + \alpha p_P'$$

$$m_f^{n+1} = m_f^* - \left(\frac{\rho \Delta V}{A_P^u}\right)_f \mathbf{A}_f \cdot (\nabla p')_f$$

§3.11 湍流的数值模拟

§4 Fluent简介

§4.1 简介

Fluent安装过程

（1）安装Exceed

（2）安装Gambit

（3）安装Fluent

（4）copy license.dat

（5）安装Gambit帮助文档

（6）安装Fluent帮助文档

注（5）、（6）两步可以不安装

利用Gambit建立几何模型及网格划分基本步骤

（1）建立或导入几何模型（点、线、面、体及其布尔运算）

（2）划分网格（二维的三角形、四边形及其混合网格，三维的四面体、三棱柱、五面体、六面体及其混合网格）

（3）指定求解器（Fluent \uns, Fluent5.0，Ansys等）

（4）指定边界类型（进入口，固壁，以及介质类型）

（5）输出网格数据文件

利用Fluent求解流场及后处理

（1）导入网格数据文件　File > Read > case…

（2）设定模型选项　Define > Models

（3）给定物性参数　Define > Materials

（4）给定边界条件　Define > Boundary Conditions

（5）指定计算格式　Solve > Controls > Solutions

（6）设定初始流场　Solve > Initialize

（6）设定收敛指标　Solve > Monitors > Residuals

（8）开始流场计算　Solve > Iterate

（9）后处理　Display, Plot, Report

§ 4.2 CFD应用算例

1. 方腔内部二维流动

目的：学习软件的用法，观察旋涡随Re的变化过程

Re=100,1000,10000

2. 双列圆柱非定常涡脱落过程

目的：利用CFD软件计算经典流体力学问题Re=100

3. 二维多翼式前向叶轮离心风机

主要参数：

$Nz = 36$

$D_1 = 113mm$

$D_2 = 150mm$

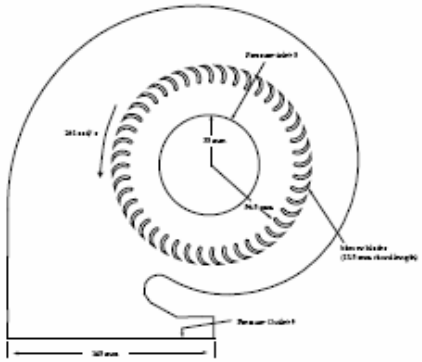
$n = 2492rpm$

$Pt_{in} = 200Pa$

$Ps_{out} = 0Pa$

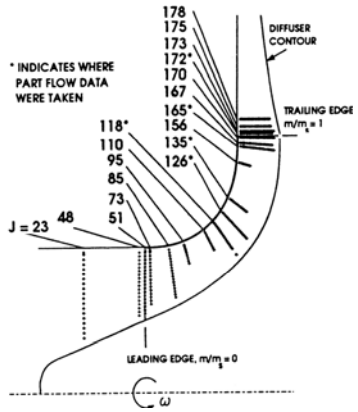
$\Delta x = 0.004$

$\Delta t = 0.0001$

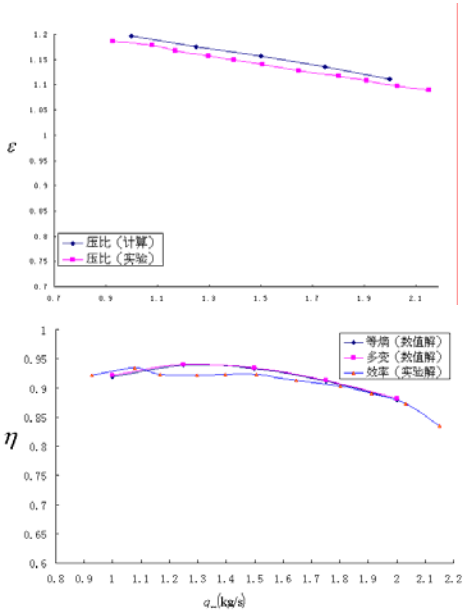


4. 三维离心叶轮内部流场及性能预测

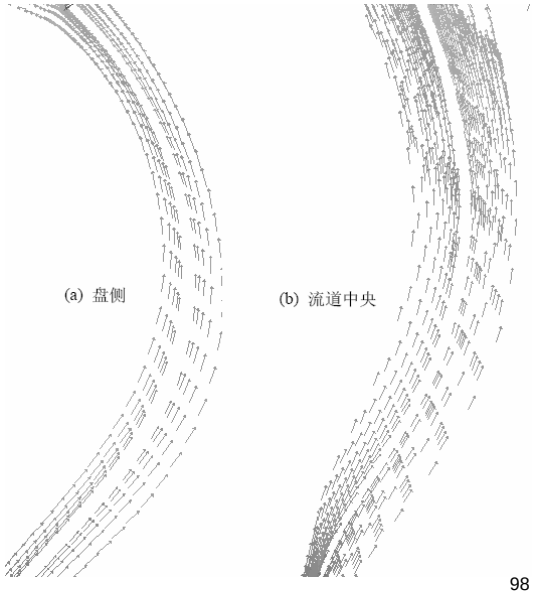
主要参数：LSCC叶轮



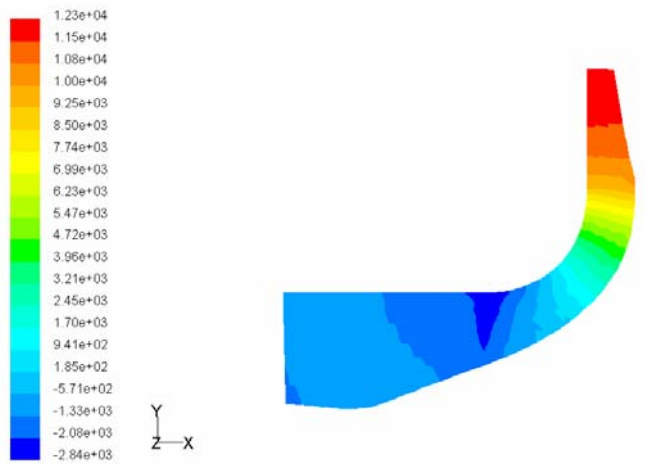
叶轮出口直径(m)，D_2	1.524
叶轮进口直径(m)，D_1	0.87
叶轮出口宽度(m)，b_2	0.141
叶轮进口宽度(m)，b_1	0.218
叶轮进口总温(K)，T_m	293
叶片数，Z	20
叶片出口角(Degree)，β_2	35
叶顶间隙(m)，a	0.00254
设计质量流量(kg/s)，m	30
设计转速(rpm)，N	1862
叶尖速度(m/s)，U_2	148.5
级总压比，	1.166



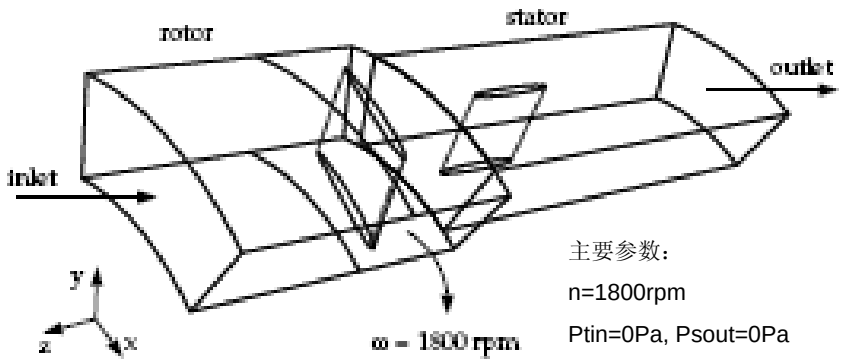
相对速度分布



子午面上的静压分布



5. 单级轴流风机三维定常流动计算



主要参数：

n=1800rpm

Ptin=0Pa, Psout=0Pa

D1=206mm, D2=280mm

Nzrotor=9, Nzstator=12

6. 单级轴流透平机二维非定常流动计算

主要参数：

R=0.684m

n=410rpm

u=29.4m/s

Lx=0.1524m

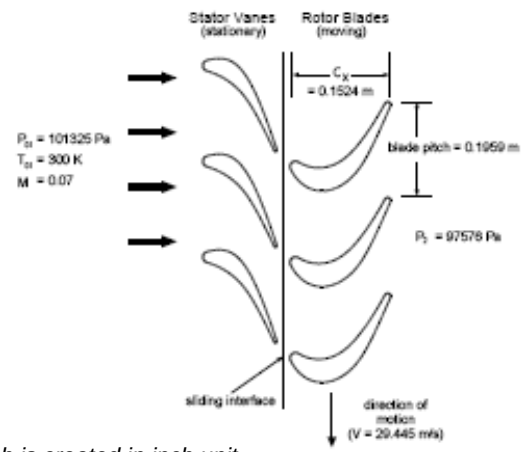
t=0.1959m

Ptin=101326Pa

Ttin=300K

Main=0.07

Psout=97576



Note: mesh is created in inch unit

正确评价商业流体动力学软件

（1）通用性好

（2）精度？

上机作业：

对二维对称突扩槽道内的不可压缩流动进行数值计算。

几何条件：细槽道高度1,长度5，宽槽道高度3，长度20，

流动条件：进口速度为1，密度1，Re=5,50,100,500,1000,10000

提交结果：

（1）压力等值线图

（2）流线、速度矢量全局图及角区局部图

复习

1．计算流体力学基础

（1）计算流体力学基本步骤；

（2）区域离散的两种方法：内节点法，外节点法；

（3）方程离散的两种方法：

有限差分法

一阶导数，二阶导数的各类差分格式（截断误差）的精度；

非守恒型对流扩散方程的有限差分法，截断误差的精度；

数值计算误差分析

有限体积法

基本步骤(a)积分（b）选型（c）整理

2．一维定常常系数无源项对流扩散方程的有限体积法

（1）问题：

$$\frac{d\rho u\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\Gamma\frac{d\Phi}{dx},\quad x\in(0,L)$$

$$B.C.\ \Phi(0)=\Phi_0,\quad \Phi(L)=\Phi_L$$

ρ,u,Γ为常数

（2）模型方程的精确解

$$\Phi(x)=\Phi_0+(\Phi_L-\Phi_0)\frac{e^{P_e x/L}-1}{e^{Pe}-1}$$

（3）模型方程的离散格式

离散过程及离散方程

5种离散格式

中心格式及迎风格式的数值计算，与精确解比较

3. 多维对流扩散方程的离散过程

（1）二维控制方程形式

（2）利用5种格式推导离散方程

（3）导热问题的数值解法

（4）代数方程组的求解方法，TDMA，PDMA，ADI,迭代法，CG法；

4. NS方程的SIMPLE算法

（1）二维不可压粘性流动的控制方程组

（2）数值求解NS方程组的3个困难点

（3）推导交错网格上的压力修正方程

（4）SIMPLE算法的基本步骤

5. 利用Gambit及Fluent计算流体力学商业软件求解流动问题的基本过程。

进一步提高：

（1）计算流体动力学最新进展；（研究生课程“张量分析及其工程应用”）

（2）计算格式的数学特性，主要是稳定性分析；

（见马铁犹，傅德薰等人的教材）

（3）高阶紧凑计算格式，有限差分法？谱元方法？有限体积法？

主要用于细微流动分析，见lele，1992，JCP

（4）非结构网格上的高阶计算格式的可行性

兼顾工程计算及机理研究

（5）无网格方法上的高阶计算格式

刘高联，基于吴仲华流面导数概念提出一阶格式

（6）非线性代数方程组的有效解法

（7）多重尺度的流动分析（微尺度）第一原理？MD? DPD? SPH? LBM?DSMC

宏观连续介质假设什么情况下成立？

（8）“三流”分析

感　谢

本课件是在西安交通大学能源与动力工程学院四年级课程《计算流体力学初步》的讲义基础上编写的，课程学时36（含4个机时）。参加过该课程学习的学生包括能动学院98级、00级、01级、02级本科生，及沈阳鼓风机厂、陕西鼓风机厂、四平鼓风机厂、金通灵有限公司、西安交大流体机械大专班等学员。他们曾为本讲义的主要内容提出了许多很好的建议及切身体会，在此深表感谢！

如果您在使用本课件时有更好的建议，请来信来函指正！

如果您在使用本课件后喜欢上计算流体流体力学这门学科，并能应用该方法解决一点实际流体问题，则编者甚慰！