动力学系统建模

–有限元方法的基本原理

张新华
Email:xhzhang@mail.xjtu.edu.cn

航天学院，西安交通大学

09 月 22 日, 2020

动力学建模的基本要求

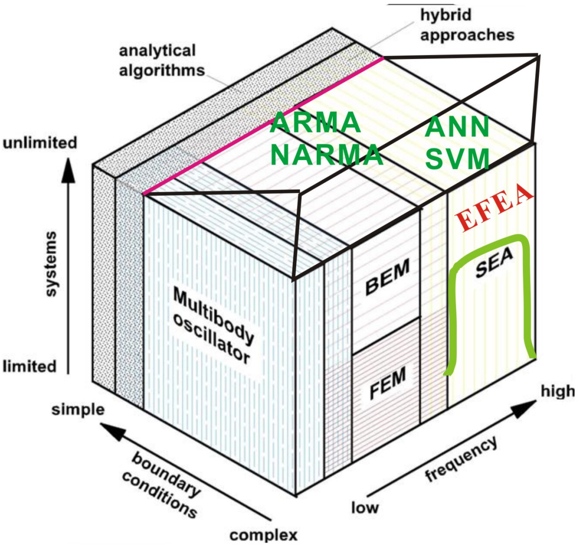
- 为什么要学这门课?
  –解决大 (的动力学) 问题
  –解决复杂 (的动力学) 问题
- quality of work
- speed of development
- the beauty of the final result

cf.
Teach Yourself Programming in Ten Years
Peter Norvig
http://norvig.com/21-days.html

力学发展简史

- 经典力学（~ 1900）特点：精确解（解析解）
- 近代力学（1900 ~ 1960）特点：近似解（近似解析解），各种摄动法。
- 现代力学（1960 ~ 现在）特点：与计算机相结合，出现了计算力学、工程/应用力学，解决大规模的科学与工程问题。

动力学建模方法汇总


hybrid
approaches
analytical
algorithms
ARMA
NARMA
ANN
SVM
EFEA
SEA
BEM
FEM
Multibody
oscillator
unlimited
systems
limited
simple
boundary
conditions
complex
low
frequency
high

连续介质力学的“部件”与计算机的部件

计算机由如下部件构成：主板、CPU/GPU、内存、硬盘、电源、显卡、声卡、网卡、光驱、显示器、键盘鼠标、音响、摄像头、扫描仪等设备。

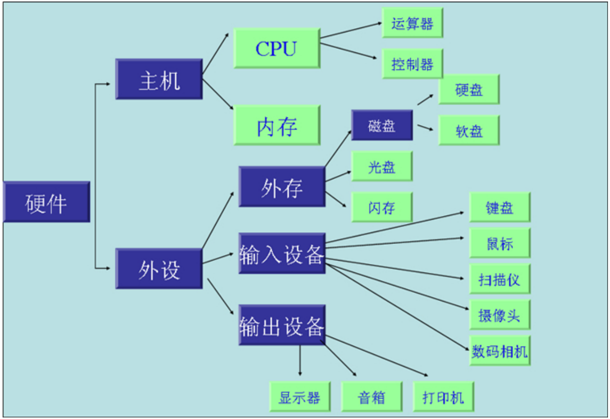


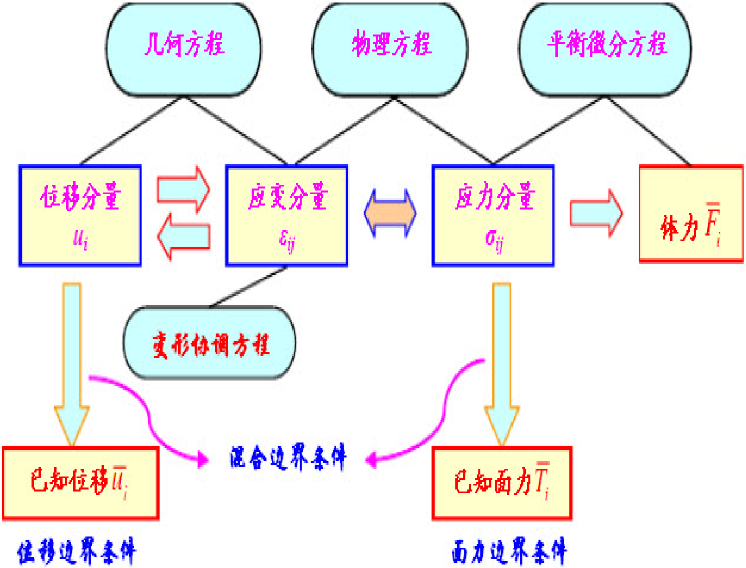
Figure:

连续介质力学基本原理

连续介质力学基本方程

- 平衡方程
- 几何方程
- 物理方程/本构方程
- 变形协调方程
- BCs/ICs

连续介质力学基本框架


几何方程
物理方程
平衡微分方程
位移分量 u_i
应变分量 ε_{ij}
应力分量 σ_{ij}
体力 $\bar{F}_i$
变形协调方程
已知位移 $\bar{u}_i$
混合边界条件
已知面力 $\bar{T}_i$
位移边界条件
面力边界条件

微元体平衡方程

由微元体的平衡条件建立平衡微分方程。

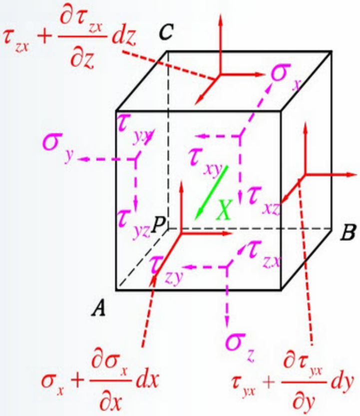
$$\sum F_x = 0,$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz - \sigma_x dydz$$

$$+\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dzdx - \tau_{yx}dzdx$$

$$+\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy - \tau_{zx}dxdy$$

$$+ Xdxdydz = 0$$



将上式同除以 $dxdydz$，化简得：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

微元体平衡方程（Navier 方程）

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

几何方程（Cauchy 方程）

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

物理方程（本构方程）

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{\mu}$$
$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{\mu}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\mu}$$

更一般的关系式 $\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

变形协调方程 (从应变位移关系式中消去位移分量)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}$$

边界条件

- 几何边界条件 (Dirichlet 问题) in $\partial\Omega_1 : U = U_0$
- 力边界条件 (自然边界条件)(Neumann 问题) in $\partial\Omega_2 : \sigma = \sigma_0$
- 混合边界条件 (Robin 问题) in $\partial\Omega_3 : D_1 * U + D_2 * \sigma = F_0$

连续介质力学基本原理

- Hamilton 原理（适用于自伴系统，Self-adjoint）

$$Generalized\ Lagrangian : L = K - V + W$$

对于弹性连续体系统，K，V，W 均为空间积分形式。

$$\delta I = \delta \int_0^T L(u(x,t), \dot{u}(x,t))dt = 0$$

- 加权残值法 (Weighted Residual Method)

$$\int_\Omega \rho_{1,j}(x) \sum_{i=1}^{n_1} \underbrace{PDE_i(u(x,t), \dot{u}(x,t))}_{\color{red}{BEM:\ \equiv 0}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho_{2,k}(x) \sum_{i=1}^{n_2} \underbrace{BC_i(u(x,t), \dot{u}(x,t))}_{\color{red}{FEM:\ \equiv 0}} dS = 0$$

力学问题的数学描述方法

- 微分方程形式（问题的强形式）

$$Domain\ Eqs:\ PDE_i(u(x,t),\dot{u}(x,t)) = 0, \quad i = 1,\cdots,n_1$$

$$Boundary\ Eqs:\ BC_i(u(x,t),\dot{u}(x,t)) = 0, \quad i = 1,\cdots,n_2$$

- 积分形式 (问题的弱形式：有两种构造方法
  (1)Hamilton 原理（动力学）或者最小势能原理（静力学）

$$\delta I(u(x,t),\dot{u}(x,t)) = 0, \quad ,x \in R^n$$

  (2) 加权残值法/Galerkin 法

有限元与边界元基本原理

- 场变量的函数逼近形式

$$u = \sum_i \eta_i(t)\phi_i(x)$$

  一般而言，$\rho_{1,i}(x) \neq \phi_i(x)$，如果 $\rho_{1,i}(x) = \phi_i(x)$ 则称为 Galerkin 方法。
- 加权残值法/Galerkin 方法适用面更广，但收敛性与精度不如变分原理。

模态与固有频率

- 特征值问题

$$KX = \omega^2 MX$$

- 模态与固有频率：可观测量！
- 基 (底) 向量

模态与固有频率

动力学问题的分解方法

- 空间分解：MDOF 系统 $\Longrightarrow$ 一组 SDOF
- 载荷的分解，Fourier 级数/积分

FEM

有限元方法：发源于弹性 (静) 力学。
主要的问题有

- 有效尺寸(长度、宽度、厚度) 问题：弹性波 (弯曲、扭转、拉伸) 的波长问题！
- 剪力问题！
- 转动惯性问题。
- 阻尼问题。

梁的振动

- 欧拉-伯努利梁 (Euler-Bernoulli Beam)
  只考虑弯曲变形，不计剪切变形及转动惯量的影响。
- 瑞利梁 (Rayleigh Beam)
  考虑弯曲和转动惯量，不计剪切变形的影响。
- Shear 梁
  考虑弯曲和剪切变形，不计转动惯量的影响。
- 铁木辛柯梁 (Timoshenko Beam)
  弯曲变形、转动惯量、剪切变形都考虑。
- Reference
  1.Seon M. Han, Haym Benaroya and Timothy Wei, Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories, Journal of Sound and vibration (1999) 225(5), 935-988
  2. 陈 等，Timoshenko 梁运动方程的修正及其影响，同济大学学报（自然科学版），2005（33）6: 711-715

四种梁理论的对比

Four beam theories

Beam models	Bending moment	Lateral displacement	Shear deformation	Rotary inertia
Euler–Bernoulli	✓	✓	×	×
Rayleigh	✓	✓	×	✓
Shear	✓	✓	✓	×
Timoshenko	✓	✓	✓	✓

Figure: Four beam theories

The percentage deviates from the experimental values obtained by Traill-Nash and Collar (1953)

Beam models	First natural frequency	Second natural frequency
Euler–Bernoulli	+14% to +26%	+78% to +133%
Shear	0% to +3%	−1% to +6%
Timoshenko	−1% to +2%	−1% to +6%

Figure: Beam theories comparison

梁的振动

- Euler 梁 (考虑轴向力)

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = q(x,t)$$

$$BC : b\left(w, \frac{\partial w}{\partial n}\right) = 0$$

梁的振动

- Timoshenko 梁 (考虑剪切刚度与转动惯性)

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\kappa A G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\right)\right] = q(x,t)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \kappa A G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\right)$$

κ, called the Timoshenko shear coefficient, depends on the geometry. Normally, $\kappa = 5/6$ for a rectangular section.

研究表明：

（1）剪切变形的影响是转动惯量的 3.2 倍;

（2）对于矩形截面梁而言，固有频率的近似修正公式为

$$\omega_i = \omega_{i0}\left(1 - 2.1\left(\frac{i\pi}{l}\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)^2\right)$$

式中，$l/i=$ 半波长，该值 $=10h$ 时，固有频率减小约 1.7%；而当该值 $=h$ 时，固有频率减小约 90%

谢谢!