

# 非线性动力学入门

张新华

西安交通大学  
工程力学系

2011年07月

---

## 前 言

—1687年, 牛顿(Isaac Newton, 1643 ~ 1727)发表了《自然哲学之数学原理》(Mathematical Principles of Natural Philosophy), 标志着经典力学(亦即牛顿力学)的正式诞生。牛顿力学主要研究自由质点系的宏观运动规律。

—1788年, 拉格朗日(Joseph Louis Lagrange, 1736 ~ 1813)发表了分析力学教程(A analytical Mechanics), 标志着拉格朗日力学的诞生。Lagrange力学属于分析力学的主要内容之一, 在位形空间中研究带有约束的质点系动力学。

—1833年, 哈密尔顿(William Rowen Hamilton, 1805 ~ 1865)对Lagrange力学进行了改造, 引进了相空间( $2n$ 维空间), 对系统内在的对称性(辛对称, Symplectic)进行了刻画。狭义上的哈密尔顿力学只适用于保守系统, 而广义的哈密尔顿力学在适用于非保守系统。哈密尔顿力学也属于分析力学的主要组成部分。在此后发展起来的量子力学中Hamilton力学发挥着巨大的作用。目前在天体力学、计算Hamilton力学, 量子力学, 甚至弹性力学(即所谓的辛弹性力学)中哈密尔顿力学依然发挥着重要作用。

—1927年, Birkhoff(George David Birkhoff, 1844 ~ 1944)发表了“动力系统”(Dynamical Systems), 标志着Birkhoff动力学的正式问世。Birkhoff动力学建立了研究非完整力学的框架。

—1892 ~ 1899, 彭加莱(Henri Poincaré, 1854 ~ 1912)发表了三卷本的“天体力学中的新方法”(New Methods of Celestial Mechanics), 系统性地提出了研究动力学系统的定性方法, 即几何方法。经典力学的目标之一就是设法求得系统的解析解, 而Poincaré意识到对于大多数非线性系统而言, 求其解析解是不可能的, 而必须发展新的研究方法。他超越了他的时代, 极富远见地预测到了非线性系统混沌现象(系统的解对初始条件具有极端敏感依赖性)的存在。更为重要的是, Poincaré开创了研究非线性动力系统的几何方法, 当之无愧地被誉为非线性科学之父, 其影响是划时代的。

—1892年, 李亚普诺夫(Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, 1857 ~ 1918)在他的博士论文“运动稳定性的一般问题”(General problem of the stability of motion)中, 系统地探讨了非线性动力学系统的稳定性问题。他提出了两种研究稳定性的方法: 李亚普诺夫第一方法(间接方法)和李亚普诺夫第二方法(直接方法)。他从代数角度出发, 对动力学系统的研究开创了一个崭新的领域。

彭加莱与李亚普诺夫, 前者从几何角度, 后者从代数角度, 开拓了非线性科学的研究疆域和研究手段。

—1963年, Lorenz(Edward Norton Lorenz, 1917 ~ 2008)发表了“确定性非周期流”(Deterministic Nonperiodic Flow)的论文, 认为大气系统的性态对初值极为敏感, 从而导致准确的长期天气预报是不可能的。该文标志着人类首次借助于计算机发现了混沌(Chaos)现象的存在。

—1757年, 欧拉(Leonhard Euler, 1707 ~ 1783)发表了压杆稳定性的论文, 首次探讨了力学系统的分岔现象。作为分岔理论重要分支的突变理论(Catastrophe Theory)则主要由法国数学家托姆(René Thom, 1923 ~ 2002)于上个世纪60年代创立, 由齐曼(Christopher Zeeman, 1925 ~ )在70年代大力推广普及。

—1834年, 英国的罗素(John Scott Russell, 1808 ~ 1882)骑着马在Union运河上散步时, 发现了现在称之为孤立波(又称作孤波, Solitary wave)的

---

“平板波”(Wave of Translation)。并导致了第一个孤立波方程—KdV(Diederik Korteweg and Gustav de Vries)方程在 1895 年的诞生。1965 年, Zabusky 与 Kruskal 首次在计算机上找到了 KdV 方程的孤立波解, 并发明了“孤立子”(Soliton)的概念。

—1975 年, 曼德布洛特(Benoît Mandelbrot, 1924 ~ 2010)在长期研究不规则几何对象的基础上, 提出了分形(Fractal, 又名“分数维”)的概念, 并导致了分形几何的产生。

—复杂非线性动力学系统的各个组成部分以协同(因而诞生了所谓的“协同学”, Synergetics)的方式相互作用, 从而可能形成拟序结构, 即某种“斑图”(Pattern)。

—小世界模型与无标度网络则是新兴的复杂性科学的两个重要概念和工具。众多的组成单元 (Agent)、复杂的相互作用方式, 导致新现象的“涌现”(Emergence, 又名“呈展”)。

综上所述, 非线性动力学已经成为一个重要的学科分支和热门研究领域。它是一个用定性的、数值的、解析的或者实验的方法研究非线性系统的基本变化规律的新兴学科。其理论依据与研究方法具有一定的独特性, 而其结论具有很大的普遍性。

目前, 大学本科阶段的动力学课程, 至多介绍到 Hamilton 力学为止, 主要涉及的还是古典力学的内容, 给人的印象是力学很“经典”, 自然也就很“古老”; 另一方面, 现有本科课程的内容几乎完全不涉及到非线性科学, 而近几十年来, 新材料、新结构的出现, 生命科学的兴起, 对自然系统、社会系统、经济系统、金融系统等研究, 无不涉及到非线性科学的内容。开设本课程的目的之一就是介绍非线性动力学的新现象、新原理、新方法和新观念, 以期拓展学生们的思维和视野。该课程的突出特点之一是“新”。另一个特点是跨学科: 涉及数学、物理、化学、力学、机械、材料、生物等等学科。

本课程主要采用启发式的、非严格性的教学方法, 以期学生能够在直觉层次上“非线性地思考”(Think nonlinearly)。

该课程内容包括: 非线性动力学系统实例; 分岔的概念、方法与应用; 混沌的起源与蝴蝶效应; 自然界中的分形; 水波中的孤立子; 斑图(Patterns); 复杂性科学简介; 等等。

# 目录

前言	i
<b>1 引论</b>	<b>1</b>
1.1 从单摆谈起	1
1.2 非线性系统的几个例子	4
1.3 什么是非线性系统	9
1.4 非线性的来源	9
1.5 什么是动力系统	10
1.6 非线性系统的若干特征	10
1.6.1 静态系统	10
1.6.2 动态系统(以振动系统为例)	12
<b>2 分岔(Bifurcation)</b>	<b>19</b>
2.1 分岔的分类	19
2.2 静态分岔的概念	20
2.3 压杆屈曲位形	21
2.4 发生静态分岔的必要条件	22
2.5 静态分岔的基本问题及难点	24
2.6 平面系统平衡点的类型	25
2.7 为什么要研究静态分岔	26
2.8 突变理论(Catastrophe Theory)简介	26
2.9 突变理论的若干应用	27
2.10 动态分岔	29
2.11 动态分岔的若干类型	29
2.12 分岔与湍流、混沌的关系	30
2.13 分岔点附近的临界慢化现象	32
2.14 动态分岔的难点	33
2.14.1 分岔点的确定	33
2.14.2 分岔后新解的确定	33
2.14.3 高次分岔现象	33

<b>3</b>	<b>混沌 (Chaos)</b>	<b>35</b>
3.1	什么是 Chaos?	35
3.2	历史背景	35
3.3	与随机性的联系与区别	36
3.4	周期 3 意味着混沌	36
3.5	Sharkovsky 定理	37
3.6	若干典型混沌系统	37
3.7	混沌的机理	39
3.8	混沌的判别方法	40
3.8.1	运动的时间历程	40
3.8.2	相图	40
3.8.3	Poincare 截面	40
3.8.4	功率谱	40
3.8.5	Lyapunov 指数	40
3.9	一个问题	40
3.9.1	混沌现象的本质	40
3.10	若干应用	41
3.10.1	医学用途	42
3.10.2	故障诊断	42
3.10.3	保密通讯	42
3.10.4	混合	43
3.10.5	天气预报, 地震预报	43
3.10.6	湍流问题	43
<b>4</b>	<b>分形 (Fractal)</b>	<b>45</b>
4.1	什么是分形	45
4.1.1	英国的海岸线到底是多长?	45
4.2	什么是维数	46
4.3	维数的其它意义	52
4.3.1	容量维的缺点	52
4.3.2	点维数	52
4.3.3	相关维数	52
4.3.4	信息维数	53
4.3.5	数学分形和统计分形	53
4.4	若干应用	54
<b>5</b>	<b>孤立子 (Soliton)</b>	<b>55</b>
5.1	什么是孤立子	55
5.2	孤立波的类型	57
5.3	阻尼, 色散与非线性	57
5.4	Fermi-Pasta-Ulam 模型	58
5.5	K-Z 孤立子	60
5.6	驻孤波	62
5.7	非线性演化方程的求解	62

5.8	Bäcklund 变换与非线性叠加公式 . . . . .	62
5.9	孤立波的研究现状 . . . . .	62
5.10	若干应用 . . . . .	63
5.10.1	光缆通讯 . . . . .	63
5.10.2	自对偶 Yang-Mills 方程中的孤立子(瞬子) . . . . .	63
5.10.3	超导研究中的 Josephson 结 . . . . .	63
5.10.4	晶体中的非位错模型 . . . . .	63
<b>6</b>	<b>斑图与拟序结构 ( Pattern and Coherent Structures )</b>	<b>65</b>
6.1	Patterns in Nature . . . . .	65
6.2	什么是 Pattern? . . . . .	67
<b>7</b>	<b>复杂性科学 ( Complex Science )</b>	<b>77</b>
7.1	什么是复杂性系统? . . . . .	77
7.2	复杂性网络 . . . . .	78
7.3	无尺度网络 ( scale free network ) . . . . .	78
7.4	复杂系统的特性 . . . . .	79
7.5	研究热点 . . . . .	79
7.6	六度分隔假说 . . . . .	80
	若干人物简介	<b>83</b>
	附录 A: Maple 简介	<b>85</b>
	参考文献	<b>87</b>
	索引	<b>89</b>
	后语	<b>91</b>

# 第1章 引论

## 1.1 从单摆谈起

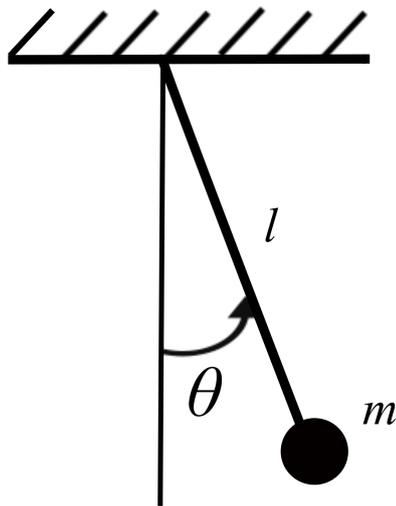


图 1.1: 单摆的振动

如图所示，单摆的运动方程如下：

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.1)$$

当下述条件  $|\theta| \ll 1$  成立时，单摆的方程可线性化为：

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (1.2)$$

然后，就可以利用振动力学的知识求得运动方程的解：

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.3)$$

其中  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ ，为单摆振动的固有频率。 $\theta_0$ ， $\varphi_0$  为积分常数，由初始条件确定。

若初始摆角扩大  $\alpha$  倍，则单摆的响应亦扩大  $\alpha$  倍。即若有  $\theta'_0 = \alpha\theta_0$  则：

$$\theta'(t) = \alpha\theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.4)$$

一个自然的问题是：当  $\theta$  并不是很小的时候，即  $\sin(\theta) \approx \theta$  不成立的时候，如何求单摆方程的解？

最理想的情形就是设法求其精确解：原方程可以化为

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\omega_0^2 \sin(\theta)\end{aligned}\quad (1.5)$$

此即所谓的状态方程，而由位形变量和速度变量构成的空间就称为状态空间。系统的性态可由状态空间的相图来展示，如下图：

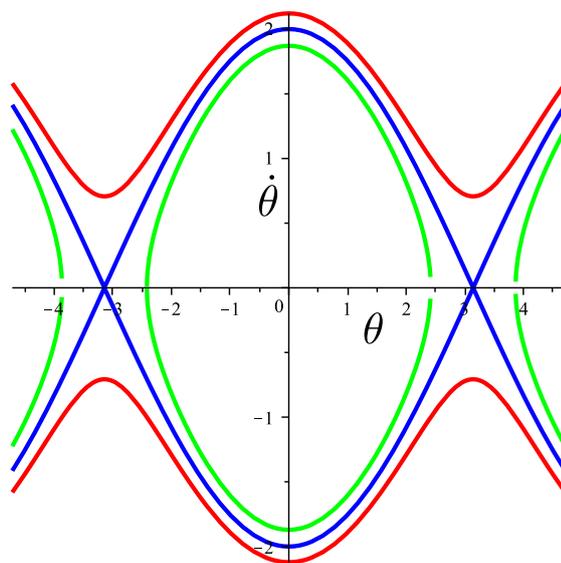


图 1.2: 单摆振动的相平面图

由相图可见，系统的运动轨线可以分为三类：摆动(绿色)、转动(红色)以及二者之间的分界线(蓝色)。为了进一步了解单摆的运动，我们将上述方程变形为

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{\omega_0^2 \sin \theta}{\omega} \quad (1.6)$$

积分可得

$$\frac{1}{2}\omega^2 + \omega_0^2(1 - \cos \theta) = H \quad (1.7)$$

进一步，可化为

$$\dot{\theta}^2 + 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2H \quad (1.8)$$

令  $H = 2\omega_0^2 m^2$  则上述方程可写为

$$\dot{\theta}^2 = 4\omega_0^2(m^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (1.9)$$

下面分三种不同情形进行讨论：

### 1.1. 从单摆谈起

(1)  $H < 2\omega_0^2 (m^2 \equiv \frac{H}{2\omega_0^2} < 1)$  该情形的运动轨线对应于相图中的绿线, 描述的是单摆在平衡点  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  附近的摆动运动(即振动运动)。根据椭圆函数理论, 可求得系统的解为

$$\sin \frac{\theta}{2} = m \operatorname{sn}(\omega_0 t, m) \quad (1.10)$$

另外, 椭圆函数具有这样的性质: 当  $\theta \rightarrow 0$  时,  $m \rightarrow 0$ ,  $\operatorname{sn}(\cdot) \rightarrow \sin(\cdot)$ , 而上式自然退化为线性振子的解。

相应的运动周期为

$$\omega_0 \frac{T}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \equiv K(m) \quad (1.11)$$

与线性振子相比, 其周期变化规律为

$$T/T_0 = 2K(m)/\pi \quad (1.12)$$

见下图中的红线所示。为了说明问题起见, 图中还一并给出了基于 Taylor 级数展开的摄动解。其中, 绿线为展开到 3 阶项的摄动解周期, 黄线为展开到 5 阶项的摄动解周期。由图可见, 当摆角  $|\theta| < \pi/3$  时, 各阶近似与精确解相差并不明显。但是, 与线性振子所得周期相比, 仍然有较大的区别。

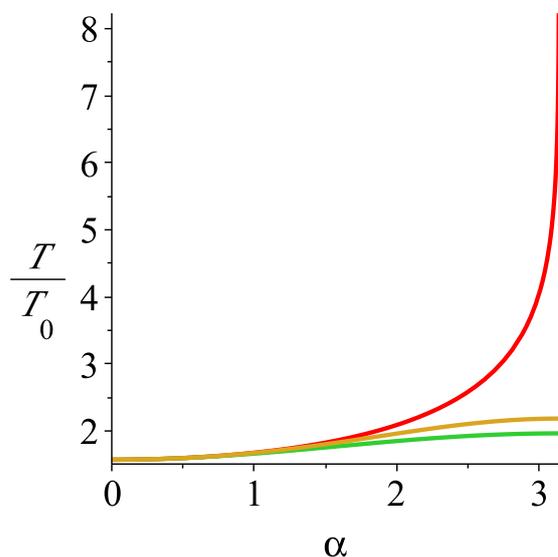


图 1.3: 单摆振动的周期

(2)  $H > 2\omega_0^2 (m^2 \equiv \frac{H}{2\omega_0^2} > 1)$  该情形的运动轨线对应于相图中的红线, 描述的是单摆的转动运动。利用椭圆函数理论, 可求得系统的解为

$$\sin \frac{\theta}{2} = \operatorname{sn}(\omega_0 m t, 1/m) \quad (1.13)$$

相应的运动周期为

$$T = \frac{2K(1/m)}{\omega_0 m} \quad (1.14)$$

(3)  $H = 2\omega_0^2(m^2 \equiv \frac{H}{2\omega_0^2} = 1)$  该情形的运动轨线对应于相图中的蓝线线, 描述的是单摆介于摆动和转动之间的一种临界运动。可求得系统的解为

$$\sin \frac{\theta}{2} = \tanh(\omega_0 t) \quad (1.15)$$

或者

$$\cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{sech}(\omega_0 t) \quad (1.16)$$

由上述两式可知, 当  $t \rightarrow \pm\infty, \theta \rightarrow \pm\pi$ , 因此, 该情形的运动周期为无穷大。

## 1.2 非线性系统的几个例子

例 1: 分段线性系统 如图所示, 当质量块的振动幅值  $|x| < \Delta$  时, 只有弹簧

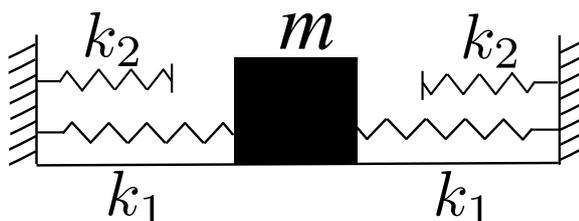


图 1.4: 分段线性振动系统

$k_1$  起作用, 而当振动幅值超过  $\Delta$  时, 弹簧  $k_1$  和  $k_2$  会同时起作用。由于每一段的运动方程均为线性的, 故而称为分段线性系统。其运动方程为:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + 2k_1x &= 0, & |x| < \Delta \\ m\ddot{x} + (2k_1 + k_2)x &= 0, & |x| \geq \Delta \end{aligned} \quad (1.17)$$

需要指出的是, 分段线性系统仍然是一种非线性系统。

例 2: 库仑摩擦力

如图所示为库仑摩擦力与相对速度的依赖关系图:

$$F(\dot{x}) = \begin{cases} F_0 & \dot{x} > 0 \\ -F_0 & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

如果与线性阻尼合在一起, 其阻尼力的变化曲线将会是如下形式:

$$F(\dot{x}) = \begin{cases} F_0 + c\dot{x} & \dot{x} > 0 \\ -F_0 - c\dot{x} & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

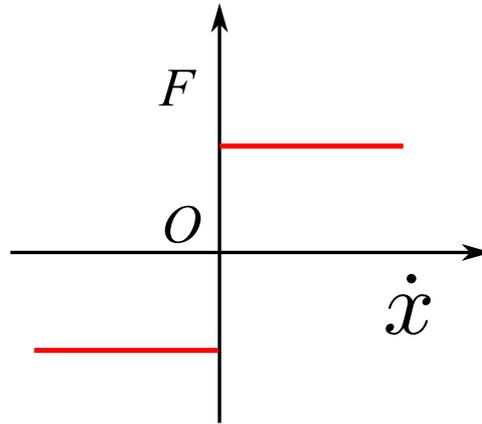


图 1.5: 库仑摩擦力

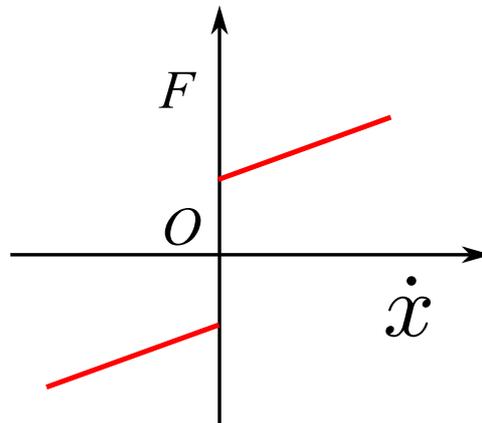


图 1.6: 库仑摩擦力 + 粘性阻尼力

例 3: 弹性梁的大变形问题

对于小变形的细长梁，经典的 Euler 梁的弯曲方程为

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x) \quad (1.18)$$

这里， $M(x)$ 为外力矩，而  $\frac{d^2 w}{dx^2}$  实际上代表的是梁变形曲线的曲率。然而我们知道，梁弯曲变形曲率的精确表达式为

$$\kappa = \frac{w''}{(1 + w'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.19)$$

相应的弯曲方程就成为如下形式

$$EI \frac{w''}{(1 + w'^2)^{\frac{3}{2}}} = M(x) \quad (1.20)$$

在小变形情况下， $|w'| \ll 1$ ，因而可以作为 0 来处理，这样也就有了线性化的梁弯曲方程。当梁的变形比较显著时，线性化方程带来的误差较大，在某些情况下甚至于变得完全不可接受，此时非线性弯曲方程就成为必须要面对的了。

思考题：试分析比较梁的线性弯曲方程与非线性弯曲方程的误差变化情况，从而得出结论，在什么情况下仍然可以采用线性梁的方程。

例 4: 材料的非线性应力应变关系 金属材料的应力应变曲线如图所示。在

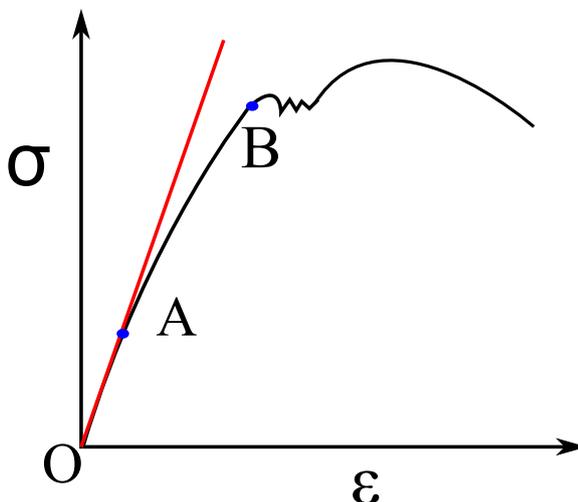


图 1.7: 金属材料的应力应变曲线

OA 段，材料的特性呈现为线性的，传统的胡克定律为

$$\sigma = E\varepsilon$$

## 1.2. 非线性系统的几个例子

而当应变较大时，比如在 AB 段，则明显地表现出了非线性特性。此时，线性胡克定律就不成立了，而应代之以如下的非线性胡克定律：

$$\sigma = E_1 \varepsilon + E_2 \varepsilon^2 + E_3 \varepsilon^3 + \dots$$

式中， $E_1$  就是传统的杨氏模量； $E_2$  表示拉压不对称情形的非线性； $E_3$  表示高次非线性。随着新型材料的出现，各种各样的非线性本构关系会越来越的被研究。

### 例 5: 非线性电阻

如图所示，隧道二极管的电阻特性呈现出高度的非线性特性。这是传统的欧姆定律所无法描述的，而必须要代之以非线性欧姆定律：

$$I = \frac{1}{R_1} U + \frac{1}{R_2} U^2 + \frac{1}{R_3} U^3 + \dots$$

压控电阻元件的伏安特性由单值函数  $i = f(u)$  来描述；而流控电阻元件的伏

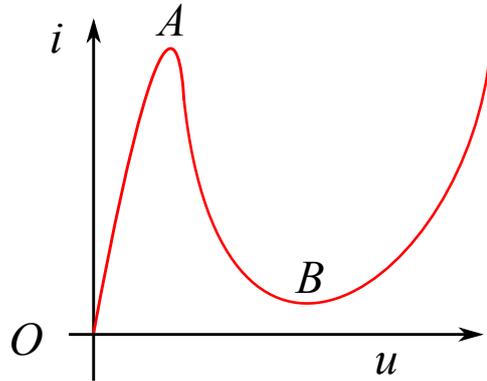


图 1.8: 隧道二极管的压控电阻特性

安特性由单值函数  $u = g(i)$  来描述。特别应当注意的是，无论是压控电阻还是流控电阻，在特定阶段均会呈现出负电阻特性，见图中的 AB 段。

非线性电阻的另一个例子是理想化的二极管，如图所示，它呈现出更为极端的非线性特性。

### 例 6: 重力场的运动问题

考虑地球表面上的抛射体的运动。根据牛顿第二定律，当不考虑空气阻力时，其运动方程为

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -mg, \\ m\ddot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

然而，当抛射体的运动高度较高时，重力加速度  $g$  就应当按照万有引力定律予以修正，见如下方程：

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -mg \frac{R^2}{(R+y)^2}, \\ m\ddot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

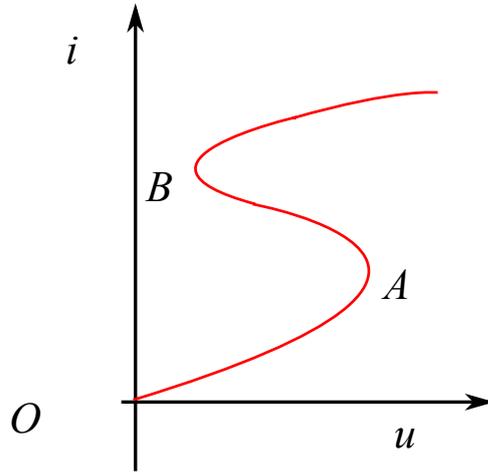


图 1.9: 隧道二极管的流控电阻特性

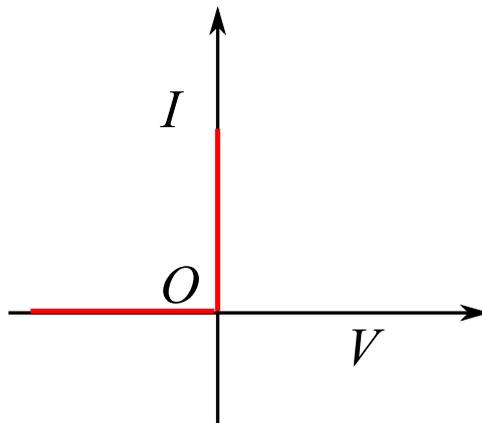


图 1.10: 理想化二极管的电阻特性

思考题：试分析高空抛射体因考虑重力加速度变化而引起的运动轨迹的变化情况。

### 1.3 什么是非线性系统

为了回答此问题，首先让我们回顾一下，什么叫做线性系统？如图所

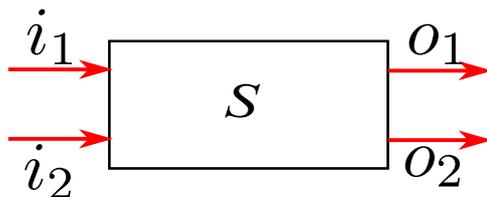


图 1.11: 线性系统示意图

示，假设系统  $S$  的输入分别为  $i_1$  和  $i_2$ ，系统的输出分别为  $o_1$  和  $o_2$ ，如果下述关系成立，则系统  $S$  就是一个线性系统。

$$\begin{aligned} i_1 &\Rightarrow o_1, \\ i_2 &\Rightarrow o_2, \\ c_1 i_1 + c_2 i_2 &\Rightarrow c_1 o_1 + c_2 o_2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

上式表达的其实就是线性叠加原理。

据此可以简单的说，凡是不满足(线性)叠加原理的系统就称为非线性系统。

### 1.4 非线性的来源

几何非线性

前面有关梁的弯曲的例子已经表明，当梁的变形较大时，曲率就不能仅仅用变形曲线的二阶导数来表示了，而必须代之以真正的曲率表达式。

另一方面，梁的轴向应变的表达式也会因变形大小的不同而采用不同的表达式，比如，小变形时，应变  $e(x) = u_x$ ，而当考虑大变形时，可能采用的应变表达式就是

$$e(x) = u_x - u_{xx}^2 + \frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}w_x^2$$

进而得到的梁的振动方程将会是一个含有高度非线性项的偏微分方程组。可以看到，所谓的几何非线性，简单地说就是由弹性体或者弹性结构的大位移或者大变形引起的非线性。其共同特点是弹性力学中的几何关系(曲率与位移的关系或者应变与位移之间的关系等)呈现出非线性特性。

物理非线性

由上面的应力应变曲线可见，对于某些材料，其本构关系(胡克定律，即应力应变关系)呈现出非线性特性。对于某些新型材料，甚至表现出本质非线性

性：无论应变多么小，应力与应变的关系都是非线性的。如图所示为某橡胶材料本构关系的单轴试验结果。

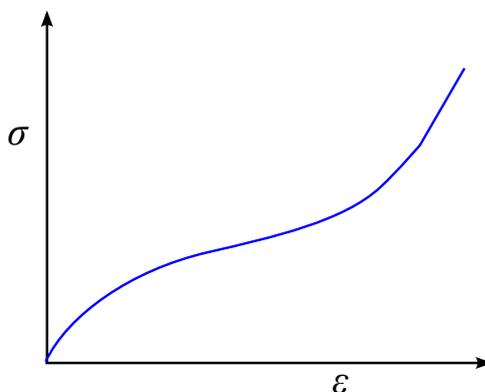


图 1.12: 橡胶材料的本构关系

### 数学非线性

在许多情况下，原始问题本身是一个线性系统，由线性微分方程来描述，可是由于问题的规模太大，因而就需要对问题进行数学转换，从而有可能导致非线性的出现。当然，对应的非线性问题规模要小许多，处理起来自然就会方便许多。

## 1.5 什么是动力系统

动力系统本身有严格的数学定义，在这里，可以简单的理解为一个不断演化的系统：给定一组变量和一组规则，这组变量就按照给定的规则进行演化。给定的规则既可以是微分方程形式的，也可以是差分方程形式的，甚至可以是微分-代数方程形式的，当然还可以是其他方式的。大家所熟悉的振动系统的微分方程，就可以称为动力系统。

## 1.6 非线性系统的若干特征

### 1.6.1 静态系统

静态非线性系统的主要特征就是多解现象。随着系统某些参数的改变，系统的解(即平衡位形)就会出现多样化。比如压杆的稳定性问题：

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -Pw(x) \quad (1.24)$$

当  $P < P_c$ (临界载荷)时，系统只有一个平衡位置，即直立状态，而当  $P > P_c$  时，系统就有三个平衡状态：直立状态、左侧的屈曲状态和右侧的屈曲状态。这是典型的多解现象。

应当指出的是：(1)理论上压杆屈曲问题存在多个(无穷多个)临界载荷，如图中所示的  $P_{c1}$  和  $P_{c2}$  等等。而对实际工程而言，常常只有第一阶临界载荷

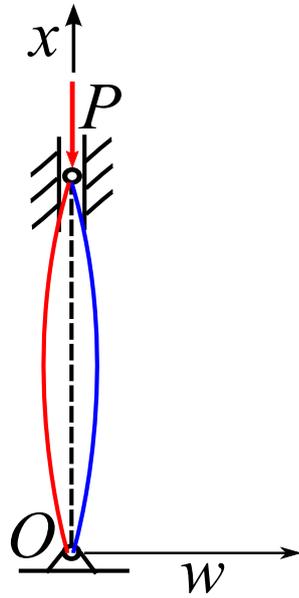


图 1.13: 压杆结构图

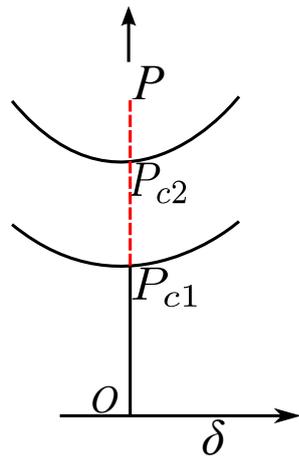


图 1.14: 压杆的屈曲

有意义。(2)当压力超过临界载荷时,压杆的直立状态就变为不稳定了。取而代之的是左侧或右侧的屈曲状态。

还有一个常见的例子就是单摆振动系统的平衡点。其平衡点就是下述方程的解

$$\sin \theta = 0$$

它的解为  $\theta = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。尽管有无穷多个解,但在物理上只对应着两个平衡位置,即下端的平衡点  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  和上端的平衡点  $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$ 。通过简单的稳定性分析,可知上端的平衡点是不稳定的,这一结论也与我们日常的经验相符合。

### 1.6.2 动态系统(以振动系统为例)

非线性动态系统与线性动态系统有很多本质上的不同点,比如会出现多阶现象以及各解之间的跳跃现象;对于特定频率的外激励,除了会出现同频率的主谐波响应外,还会出现超谐波和次谐波响应分量;对于线性自治系统,一般而言它的稳态解总是依赖于初始条件,而有一类非线性系统,其稳态解与系统的初始条件无关,只取决于系统本身的参数,此即自激振动,系统存在极限环振动。

经典力学的知识告诉我们,动力学系统的解对初始条件具有连续依赖性,然而有一类非线性系统,其解对初始条件具有极端敏感的依赖性,以至于初始条件的微小误差可能会导致长期解的极大差异,这就是所谓的混沌现象(Chaos)。在某种意义上说,混沌现象的发现,颠覆了牛顿力学关于运动确定性的基本信念(即拉普拉斯确定性哲学)。

下面,我们以非线性振动系统为例,分别介绍这些现象。

跳跃现象

考虑如下的线性振子方程:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \quad (1.25)$$

由振动力学的知识,可以求得解为

$$x(t) = B \sin(\omega t + \phi) \quad (1.26)$$

其中,  $B$  的表达式为

$$B = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad (1.27)$$

这里,  $\lambda = \omega/\omega_0$  为频率比,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  为固有频率,  $\zeta = c/2m\omega_0$  为阻尼比。定义振幅放大因子  $\beta$  为

$$\beta = \frac{B}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad (1.28)$$

然而,对于非线性振动系统而言,其典型的振幅放大因子曲线将会呈现为如

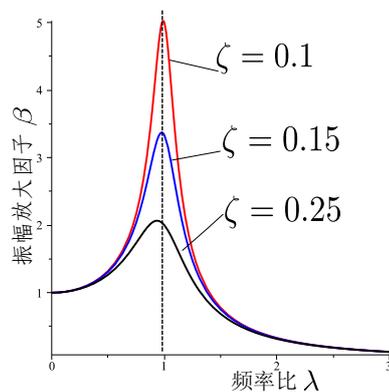


图 1.15: 振幅放大因子

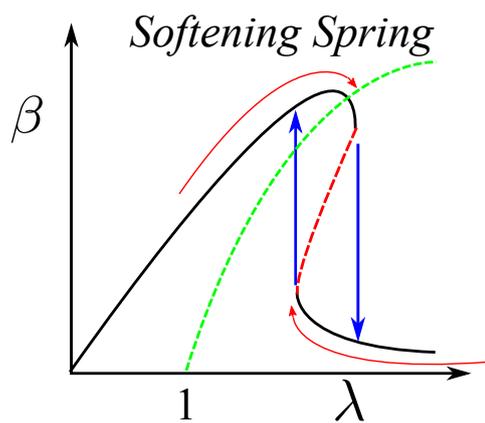


图 1.16: 软非线性振幅放大因子

下两种形式之一。由图可见，对于软弹簧非线性系统，当外激励的频率与系统线性化固有频率之比  $\lambda$  从小变大时，系统会突然从一个大幅值状态跳跃到一个小幅值状态；相反地，当  $\lambda$  从大变小时，系统会突然从一个小幅值状态跳跃到一个大幅值状态。这种现象就是所谓的“跳跃”现象。有两点应当特别指出：(1) 图中的虚线部分代表的是一个不稳定的解支。在现实的物理世界中，该解支是无法实现的。(2) 系统从大幅值下跳到小幅值的频率比值与从小幅值上跃到大幅值的频率比值并不相同，从而形成一个迟滞环。注意到，下跳频率比值要大于上跃频率比值。

对于硬弹簧系统的分析是类似的，只是发生上跃的频率比值大于发生下跳的频率比值。

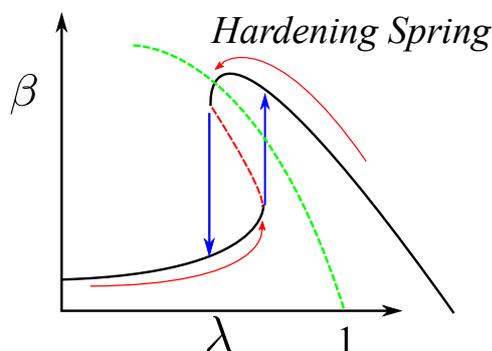


图 1.17: 硬非线性振幅放大因子

### 超谐、亚谐与组合谐波响应

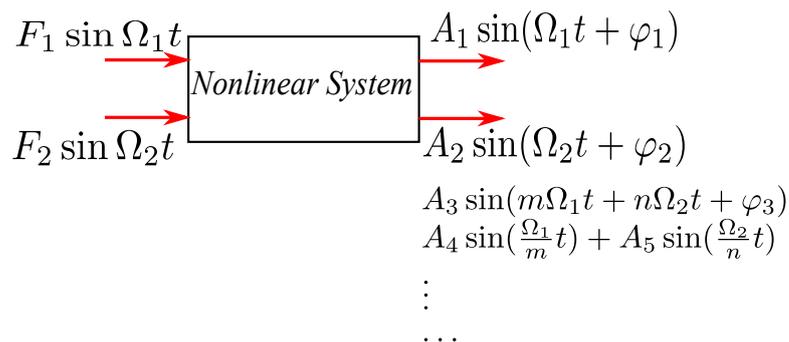


图 1.18: 超谐与亚谐波响应

对于线性系统，特定频率的激励(输入)只会产生特定频率的响应(输出)，而由上图可见，对于非线性系统，既可以产生高于激励频率的响应(超谐波)，也可以产生低于激励频率的响应(次谐波)。所谓的“种豆得豆、种瓜得瓜”也只是对于线性系统才是成立的。

思考题：对于非线性系统应该如何进行滤波？或者说应该如何进行隔振。

## 自激振动

对于线性系统而言，当有周期性的外激励力时，系统才会持续的振动。而对于一类非线性振动系统，可以没有周期性外激励力，系统也会持续地振动。这就是自激振动(Self-exciting vibration system)。其典型的运动方程为

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.29)$$

由方程可见，这是一类变阻尼非线性系统。当系统振动的幅值较小时，系统的阻尼是负值，系统将从外界中吸收能量；而当系统振动的幅值较大时，其阻尼将会变为正值，从而系统将会耗散能量。这样，该系统的稳态运动将会是一种周期运动：极限环。所谓极限环是指：随着时间趋于无穷大，该环内部和外部的运动轨线均会趋近于该极限环。实际上，仔细地分析就会发现，在该极限环内部，即原点  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$  处，该系统有一个不稳定的平衡点。这样环内的运动轨线就只能趋向于该极限环。

当然，极限环本身也存在是否稳定的问题。一般而言，极限环有稳定、不稳定和半稳定之分。不稳定的极限环是指：随着时间的增大，极限环内部与外部的轨线均远离该环而去；半稳定极限环是指：随着时间的变大，内部(或外部)的轨线会远离该极限环而外部(或内部)的轨线会趋近于该极限环。关于上述自激振动的相图以及相应的极限环，可见下图。

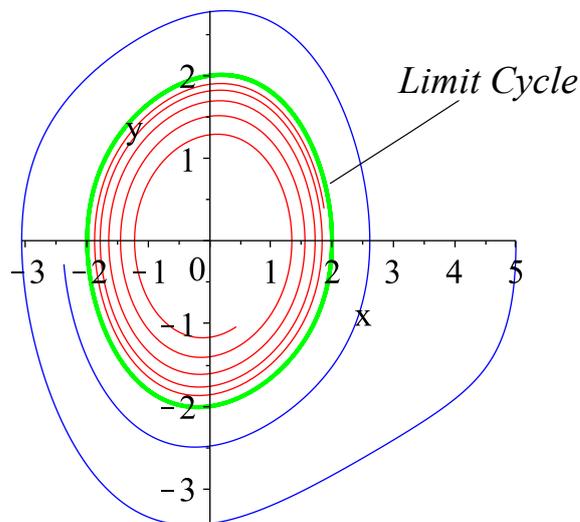


图 1.19: 自激振动与极限环

目前，经常用到的有三种描述动力学系统的空间：(i)位型空间(Configuration Space)：它由系统的位置坐标构成，即  $x \in R^n$ ，在牛顿力学中经常使用该空间对动力学进行描述；(ii)状态空间(State Space)：它由系统的位置坐标与速度坐标构成，即  $(x, \dot{x}) \in R^{2n}$ ，在振动控制理论、复模态理论以及现代控制理论中常使用该空间；(iii)相空间(Phase Space)：它由系统的位置坐标与动量坐标构成，即  $(x, p) \in R^{2n}$ ，在量子力学、天体力学，Hamilton 力学(辛力学)等中经常采用此空间进行描述。

## 混沌(Chaos)

对于通常的动力学系统而言, 其解对初始条件具有连续依赖性, 即初始条件的微小改变将导致解的微小改变。考虑如下的强迫激励下的单摆运动方程:

$$\ddot{x} + \sin x = A \sin \Omega t \quad (1.30)$$

对于某些  $F$  和  $\Omega$ , 系统的解将会是规则的。设

$$x_1|_{t=0} = x_{10} \mapsto x_1(t)$$

$$x_2|_{t=0} = x_{20} \mapsto x_2(t)$$

解是规则的是指: 如果  $\|x_{10} - x_{20}\| < \delta$ , 则  $\|x_1(t) - x_2(t)\| < \varepsilon$ , 这里,  $\delta, \varepsilon$  均为任意大于 0 的正数。

然而, 对于上述系统, 当  $F$  及  $\Omega$  取某些参数时

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \geq \varepsilon_1 \exp(\varepsilon_2 t)$$

即相近初始条件所对应的解轨道会以指数形式发散。式中的  $\|\cdot\|$  是指函数的范数(即函数之间距离的某种度量),  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  均为任意大于 0 的正数。

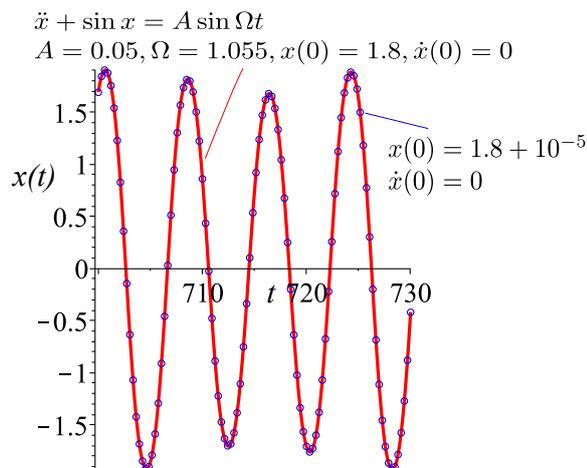


图 1.20: 单摆的规则运动

注: 平衡点、极限环、环面(轮胎面)是常见的吸引子(Attractor), 其维数是整数; 而混沌则属于奇怪吸引子(Strange Attractor), 其维数一般情况下是分数, 在几何上呈现为一种分形结构(Fractal)。

非线性科学可以看作是一门横断学科和交叉学科: 大到宇宙物理、小到粒子物理, 无不涉及到非线性现象、原理与方法。

非线性动力系统的性态较之于线性系统要丰富得多, 复杂得多。混沌、随机共振等就是其典型性态。

1.6. 非线性系统的若干特征

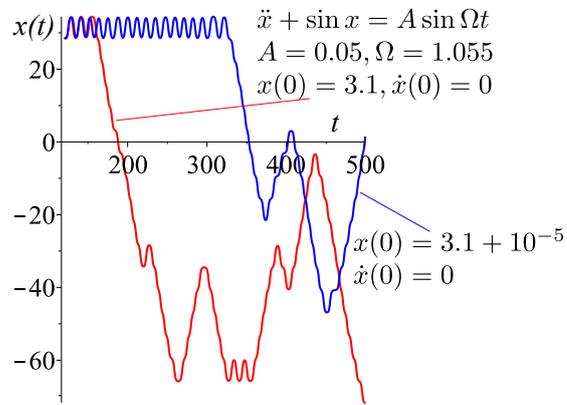


图 1.21: 单摆的混沌运动

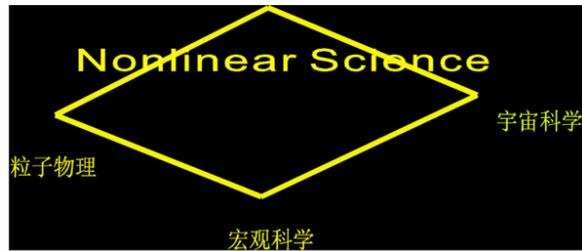


图 1.22: 非线性科学的地位

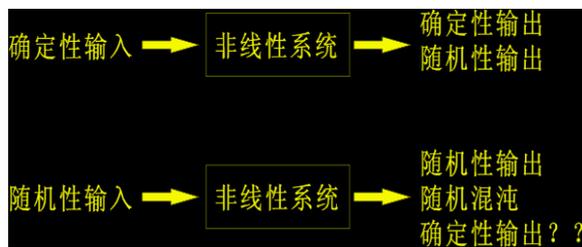


图 1.23: 线性与非线性系统的响应



## 第2章 分岔(Bifurcation)

由现代工业制造出来的批量产品，由于材料特性、制造工艺、安装技术、使用环境等等不同，将会导致产品的性能具有一定的离散度。比如：一批机械产品，其重量总会在一定的范围内波动；其体积也会在一定范围内波动。这些离散度在系统的动力学模型中就由若干参数来表征，从而很自然地引出了系统族的概念和方法。当然，系统族同时还表征了系统建模的某种不确定性。在大多数情况下，这种参数的波动不会引起本质性的变化。可是，在某种特定条件下，该变化却会导致灾难性的后果。

分岔的概念：

Roughly speaking, a bifurcation is a qualitative change in an attractor's structure as a control parameter is smoothly varied. For example, a simple equilibrium, or fixed point attractor, might give way to a periodic oscillation as the stress on a system increases. Similarly, a periodic attractor might become unstable and be replaced by a chaotic attractor.

In Benard convection, to take a real world example, heat from the surface of the earth simply conducts its way to the top of the atmosphere until the rate of heat generation at the surface of the earth gets too high. At this point heat conduction breaks down and bodily motion of the air (wind!) sets in. The atmosphere develops pairs of convection cells, one rotating left and the other rotating right.

In a dripping faucet (水龙头) at low pressure, drops come off the faucet with equal timing between them. As the pressure is increased the drops begin to fall with two drops falling close together, then a longer wait, then two drops falling close together again. In this case, a simple periodic process has given way to a periodic process with twice the period, a process described as "period doubling". If the flow rate of water through the faucet is increased further, often an irregular dripping is found and the behavior can become chaotic.

### 2.1 分岔的分类

一般地说，完整的分岔分析需要了解动力系统的动力学性态，这是十分复杂，甚至是难以做到的。实际应用中，有时只需要考虑在某个平衡点（不动点）附近动力系统性态的变化，即只研究在它们的领域内局部向量场的分岔，这类分岔问题称为局部分岔。如果分岔分析涉及向量场的大范围性态变化，则称为全局分岔。当然，向量场的“局部”和“非局部”性质是密切相

关的,局部分岔本身也是全局分岔分析的重要内容。

常见的分岔有:叉型分岔(对称鞍结点分岔),切分岔或鞍结点分岔,跨临界分岔,滞后分岔,Hopf分岔,倍周期分岔,同宿和异宿分岔。

在研究分岔时,可以把它们分为静态分岔和动态分岔两大类。静态分岔是指只有平衡点的数目和稳定性发生变化的分岔问题,即研究静态方程的解的数目和稳定性随参数变化而出现的突然改变。鞍结点分岔,跨临界分岔,叉形分岔等,都属于静态分岔。动态分岔是指静态分岔以外的其他分岔问题。Hopf分岔,闭轨分岔,环面分岔,同宿或异宿分岔等,都属于动态分岔。

## 2.2 静态分岔的概念



图 2.1: 分岔示例

动力学方程常常由微分方程组来描述,这些微分方程可以是常微分方程(离散系统),也可以是偏微分方程(连续介质系统)。其平衡状态就是系统的平衡点(有限多个点),或者更一般地,就是系统的平衡流形(无穷多个点)。常微分方程的离散化将导致差分方程。常微分方程的平衡点就对应于差分方程的不动点。

静态分岔就是研究系统的平衡点(不动点)随着系统参数的改变而发生变化的现象。简单地说,静态分岔是指:系统平衡点的数目或稳定性随着参数以拟静态的方式改变时而发生改变的现象。严格地说,所有变化均包含一个时间过程,亦即,所有过程均为动态的。所谓的拟静态过程只是一种理想化:其真实含义是指参数的变化过程(特征时间  $\tau_2$ )要比系统趋于平衡点的过程(特征时间  $\tau_1$ )慢得多(即  $\tau_2 \gg \tau_1$ )。这与材料力学中的拟静态加载的含义是相同的。

### 例 1 压杆的屈曲

在前一章中,我们已经介绍了压杆的屈曲问题。屈曲实际上就是一种静态分岔:压杆的平衡位形的数目与稳定性会随着压力的变化而发生变化。见图所示。

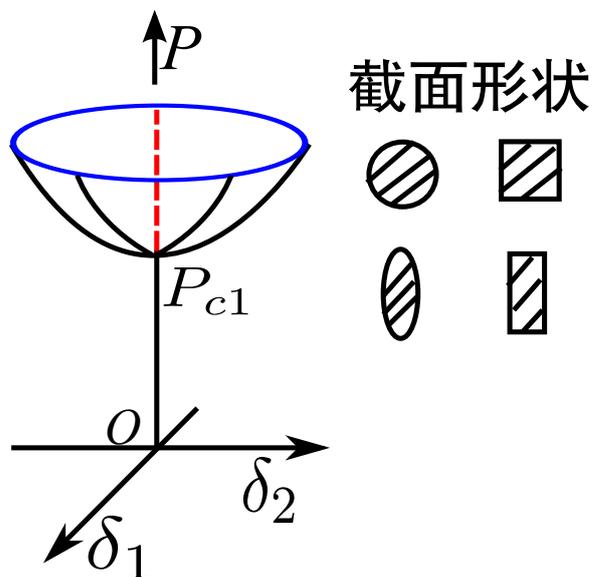


图 2.2: 压杆的静态分岔

由图可见, 当压力  $P < P_{c1}$  时, 系统只有一个平衡点(位形), 即直立状态; 而当  $P > P_{c1}$  时, 系统就有三种平衡位形: 直立态、左侧屈曲态和右侧屈曲态。从物理角度分析, 左侧与右侧的屈曲态是等价的。对于空间梁而言, 实际的屈曲态可能有无穷多个: 压杆周围  $360^\circ$  范围内每个方向都是可能的屈曲方向!

思考题: 实际的压杆发生屈曲时到底向哪个方向屈曲?

若干提示:

- 压杆的截面形状(圆形、椭圆形、正方形、矩形, 抑或其它形状);
- 压杆的形状误差(沿轴线方向的直线度);
- 压杆材料的不均匀性;
- 压杆的安装误差;
- 压杆上压力作用点、作用线方向;
- 环境因素(电磁场、温度、风向等)。
- 等等。

压杆由直立态发生屈曲后, 只能在众多(甚至于无穷多)的可能屈曲态中实现一个, 这就是对称破缺现象(Symmetry-breaking)。屈曲前的状态对称性高, 而屈曲后的状态对称性由于破缺而降低了。

## 2.3 压杆屈曲位形

在考虑压杆失稳问题时, 有一个问题: 如何求得压杆屈曲后的位形? 由于屈曲变形已经属于大变形情形, 需要利用梁的非线性变形方程进行分析。其对应的总势能密度函数为

$$U(x) = EI\sqrt{1 + w'(x)^2} + \frac{1}{2}Pw(x)^2$$

将近似的屈曲模态函数

$$w(x) = \delta \sin \frac{\pi x}{l}$$

代入后，再进行如下运算：(i)对  $\delta$  进行 Taylor 级数展开(取到二次项)；(ii)对  $x$  在  $(0, l)$  区间进行积分；(iii)对所得方程进行求解。最终可以得到

$$\delta = \pm 2l \sqrt{\frac{EI}{l^2 P - EI\pi^2}}$$

其中， $l$  为压杆长度。由此可知，压杆的临界载荷为

$$P_{cr} = \frac{EI\pi^2}{l^2}$$

一般而言，屈曲可以分为两种类型：即分岔型屈曲和极限点屈曲。

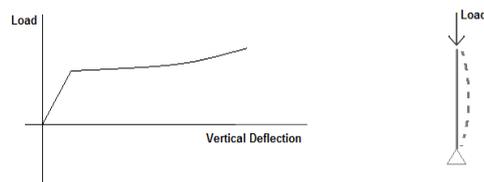


图 2.3: 分岔型屈曲

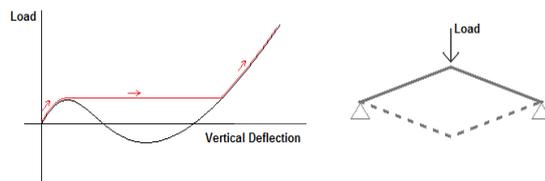


图 2.4: 极限点屈曲

## 2.4 发生静态分岔的必要条件

对于线性方程  $AX = b$ , 有唯一解的充分必要条件是  $A$  非奇异, 即  $\det A \neq 0$ 。由此可得, 若  $\det A = 0$ , 则该方程的解不唯一! 非线性情形与此完全类似: 考虑如下形式的非线性动力学方程

$$\dot{x} = F(x, \lambda), x \in R^n, \lambda \in R^p \quad (2.1)$$

其对应的平衡态方程为

$$F(x, \lambda) = 0 \quad (2.2)$$

## 2.4. 发生静态分岔的必要条件

则，发生静态分岔的必要条件是下式成立：

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0 \quad (2.3)$$

当参数数目  $p = 1$  时，称为单参数分岔，而当  $p > 1$  时则称为多参数分岔。  
又形分岔的标准方程为

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (2.4)$$

其(平衡点)解  $x$  随参数  $\mu$  的变化情况，就是所谓的分岔图。当  $\mu \leq 0$  时，此

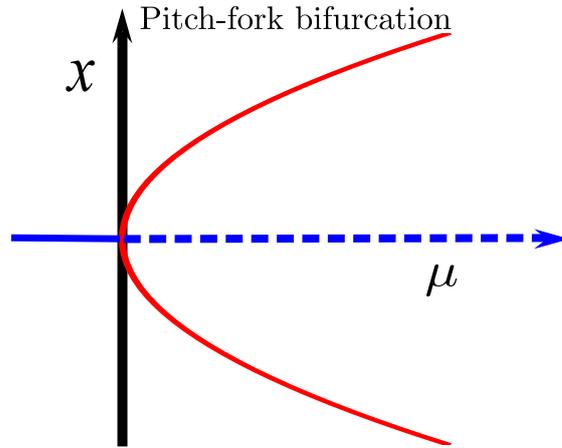


图 2.5: 叉形分岔

方程有唯一解  $x = 0$ ；当  $\mu > 0$  时，此方程有三个解： $x = 0$  和  $x = \pm\sqrt{\mu}$ 。上图表明了方程的解随参数  $\mu$  变化的情况。解的数目在  $\mu = 0$  处突然发生变化，因此方程出现分岔，通常称为“叉形分岔”。

跨临界分岔的标准方程为

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad (2.5)$$

此系统对  $\mu < 0$  有稳定结点  $O: x = 0$  和不稳定结点  $A: x = \mu$ ；在  $\mu = 0$  处有一个结点；对  $\mu > 0$  有不稳定结点  $O: x = 0$  和稳定结点  $A: x = \mu$ 。下图给出了系统解随参数  $\mu$  变化的分岔图。可以看到，在  $\mu = 0$  处，平衡点  $O$  和  $A$  的稳定性互相交换。这类分岔称为“跨临界分岔”。

同宿分岔：考虑如下方程

$$\dot{x} = y \quad (2.6)$$

$$\dot{y} = x + x^2 - xy + \mu y \quad (2.7)$$

$$(x, y) \in R^2, \mu \in R$$

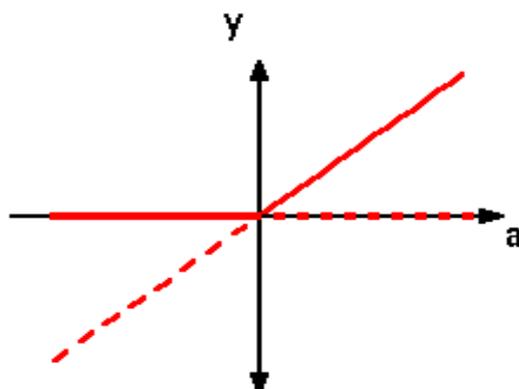


图 2.6: 跨临界分岔

该系统有两个平衡点：鞍点  $O(0,0)$  和结点  $A(-1,0)$ 。随着参数  $\mu$  的增加，并经过  $\mu = -1$  时，点  $A$  由稳定结点变为不稳定结点，由平衡点  $A$  “冒出”的稳定极限环随着  $\mu$  的增加不断扩大。当  $\mu = \mu_0 = -0.85$  时，与鞍点  $O$  相交，并成为鞍点分界线（即同宿轨线）。对于  $\mu > \mu_0$ ，同宿轨线不再存在；另一方面，当  $\mu$  由  $\mu_0$  减少时，同宿轨线也突然消失，变成一个稳定极限环，因此在  $\mu_0$  处出现同宿分岔。下图给出相图随  $\mu$  变化的情况。

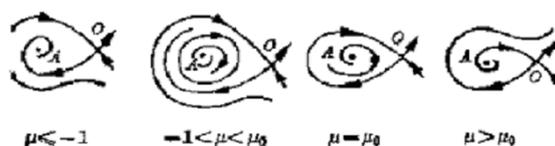


图 2.7: 同宿分岔

异宿分岔：考虑如下方程

$$\dot{x} = x^2 - y^2 - 1 \tag{2.8}$$

$$\dot{y} = \mu + y^2 - xy \tag{2.9}$$

$$(x, y) \in R^2, \mu \in R$$

此系统在  $\mu = 0$  时有连接鞍点  $A(1,0)$  和  $B(-1,0)$  的异宿轨线，而当  $\mu \neq 0$  时不存在异宿轨线。因此，在  $\mu = 0$  处出现异宿分岔，如下图。

## 2.5 静态分岔的基本问题及难点

静态分岔的基本问题是：

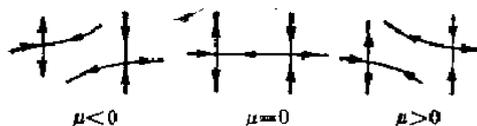


图 2.8: 异宿分岔

1. 确定分岔点

静平衡方程常常是一个(或一组)非线性方程组, 求解比较困难。常用的求解方法有: 牛顿-拉夫森(Newton-Raphson)迭代法, 可用于求解单个解。吴消元法(即吴文俊法); 同伦方法(Homotopy method); 以及 Gröbner 基方法, 等等。

2. 确定分岔前和分岔后系统的全部平衡解支

这也是一组非线性方程, 求解方法与上面所述类似。

3. 确定解的稳定性

有两种方法可以用来判断解的稳定性: Lyapunov 第一方法(间接方法)和 Lyapunov 第二方法(直接方法)。前者是将非线性系统在平衡点处进行线性化, 进而通过线性化系数矩阵来确定解的稳定性; 后者则需借助于 Lyapunov 函数等能量准则来判定。

## 2.6 平面系统平衡点的类型

对于平面动力学系统, 其平衡点的类型有: 结点(Node)、焦点(Focus)、鞍点(Saddle)、中心(Center)等 4 种。其中, 结点和焦点又分别分为稳定的和不稳定的两类。

平衡点的稳定性可由其线性部分的系数来确定。现说明如下

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} = F(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + h.o.t. \quad (2.10)$$

式中, “h.o.t.” 是指 2 阶及 2 阶以上的高阶项。平衡点的稳定性就由线性部分的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

的特征值来确定。令  $p = -(a + d)$ ,  $q = ad - bc$ , 则, 上述矩阵的特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$$

如果任一特征值的实部大于 0, 则该平衡点就是不稳定的; 反之, 如果特征值的实部均小于 0, 则该平衡点是稳定的。特征值的实部均等于 0 的情形属于临界情形: 其稳定性还需要考虑高阶项才能确定, 如果是线性系统, 那么该临界情形就对应于中心型平衡点。

平面系统的平衡点类型汇总如图

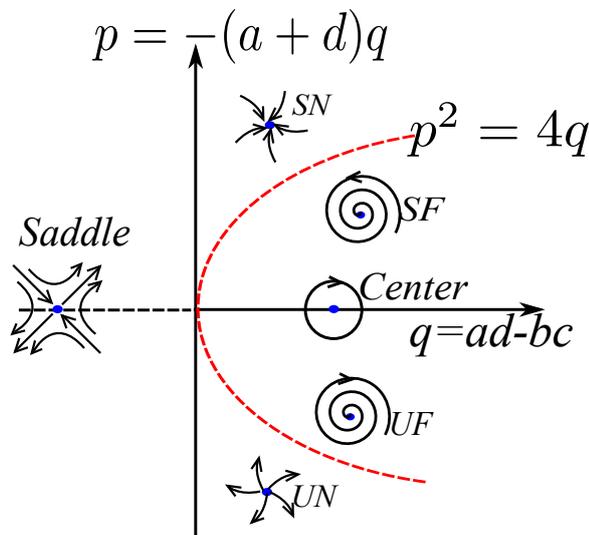


图 2.9: 平面系统平衡点的类型

## 2.7 为什么要研究静态分岔

本质上，研究分岔问题就是对含有一个或多个参数的系统（即所谓的系统族）进行分类的问题，同一类系统的定性性质是相同的，亦即在定性上是等价的。以压杆稳定性为例，失稳前为一类，失稳后为另一类。而分岔点处则为第三类(临界类)。同一类系统具有相同的拓扑性质以及动力学性质。

类似地，我们还可以考虑受压板、受压壳等结构的失稳问题。

## 2.8 突变理论(Catastrophe Theory)简介

经典的系统稳定性的理论：稳定性系统是一种当影响系统的因素连续变化时，其系统的行为也连续变化的系统，而且当因素发生微小变化，系统的行为也只发生微小的变化。

突变理论：突变现象是自然界和社会中普遍存在的另一类不具有稳定状态的客观现象。物种的消亡，国家的王朝替代，基因的变异，电器元件的击穿，等等自然与社会现象均属于突变理论的研究范畴。突变理论是由法国数学家 Thom 于 1972 年所创立，主要用于描述系统的定性性质随系统参数的变化而发生突变的现象。

突变理论就是运用一些典型函数在一些临界点（即能使系统状态在微小“扰动”下产生巨变的自变量值）的性态来刻画突变现象。一般认为突变理论是分岔理论的初级形式，(即所谓的初等突变理论)。根据初等突变理论，单参数系统有 7 种突变类型，而二参数系统有 11 种突变类型。

突变理论、分岔理论以及奇异性理论之间的关系可粗略地表示如下：

初等突变理论  $\Rightarrow$  高等突变理论  $\Rightarrow$  分岔理论  $\Rightarrow$  奇异性理论(Singularity Theory)

最简单的突变模型：  $f(x) = (1/3)x^3$ ，在  $x = 0$  处，给出一个微扰，形

成了一个函数族

$$f_a(x) = (1/3)x^3 + ax$$

上述扰动系统对应的势能函数为： $V(x, a) = x^4 + a$ ，随着参数  $a$  的变化，系统在  $x = 0$  及其邻域内，或者具有一个临界点或者具有三个临界点。这种定性性质(临界点的数目)的变化即是一种突变现象。正是参数  $a$  的微扰使得系统出现了突变。具体情况如图所示。

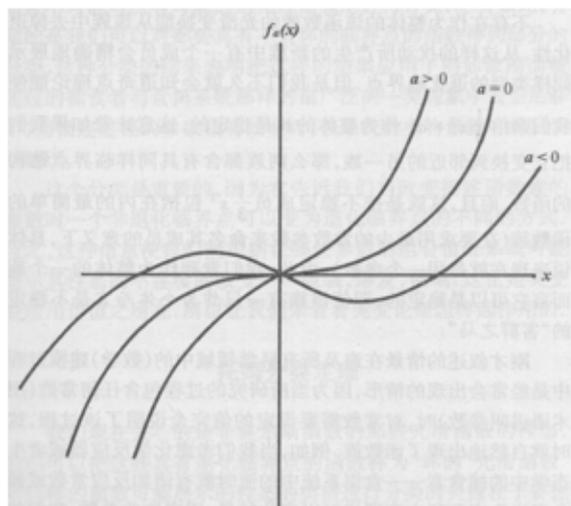


图 2.10: 突变模型示例

## 2.9 突变理论的若干应用

突变现象的例子之一就是水的气液相变。水的密度  $\rho$  是温度  $T$  和压力  $P$ 。水的两种不同状态可以由其密度来刻画，而密度本身又依赖于温度和压力等参数。由  $\rho$ 、 $T$ 、 $P$  三个变量组成的三维行为空间如图所示，其中两个水平轴表示相变条件：温度与压力，称为控制平面；垂直于控制平面的第三轴表示水的状态：密度；水的密度变化可用一个特殊曲面表示，称为行为曲面。

突变理论在社会科学领域的应用例子之一是解释社会成员的成功要素。假设创造性的人具有三要素：即成就、学识与热情。由图可以看到，具有相同的学识和热情的几个人，他们的成就可能会有实质性的差别。这取决于以往的个人历史(成长路径)，他们既可能是天才，也可能是庸才。当然，用突变理论解释社会现象需要十分谨慎：模型的合理性(包括相关的假设条件)需要验证。另外，社会系统是一个复杂性系统，仅靠简单的数学模型只能够得到某些粗略的结论，离人们所期望的定量化结果还有很大的差距。

另一个例子是狗的攻击行为的分析。

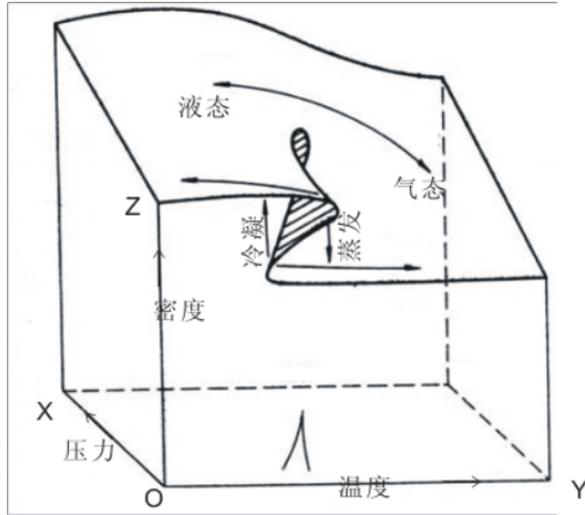


图 2.11: 水的相变

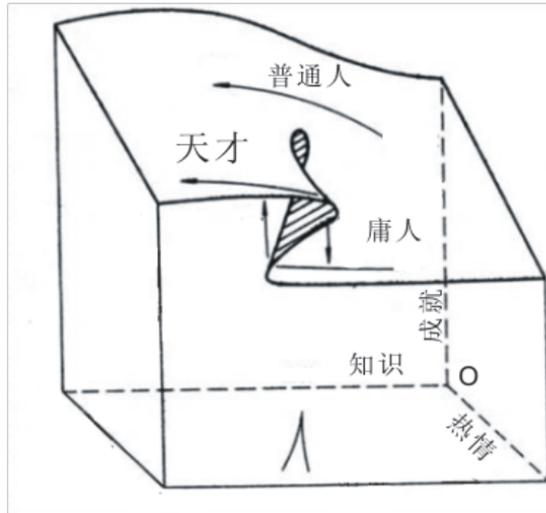


图 2.12: 成功要素模型

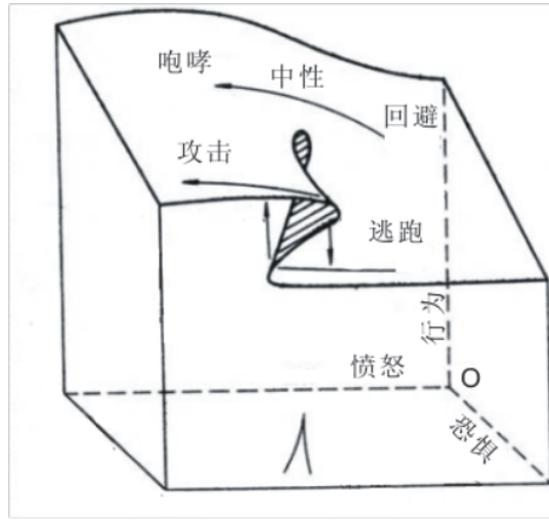


图 2.13: 狗的行为模型

## 2.10 动态分岔

对于非线性动态系统，解的极限状态(即微分方程的解当  $t \rightarrow \infty$  的状态)随系统参数的变化而发生变化的现象就是动态分岔理论的研究范畴。对于差分方程而言，上述  $t \rightarrow \infty$  可理解为迭代次数  $n \rightarrow \infty$ 。

## 2.11 动态分岔的若干类型

Hopf 分岔、闭轨分岔、环面分岔、同宿或异宿分岔等，都属于动态分岔。下面以 Hopf 分岔为例介绍动态分岔。

考虑微分方程组：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x[\mu - (x^2 + y^2)], \\ \dot{y} &= x + y[\mu - (x^2 + y^2)] \end{aligned} \quad (2.11)$$

的解随参数变化的情况。

在极坐标系中，此方程组可写成如下形式

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

利用初等积分的方法，可以得到解为

$$r(t) = \begin{cases} \sqrt{\mu(1 + Ce^{-2\mu t})^{-1}} & \mu \neq 0 \\ \sqrt{(2t + C)^{-1}} & \mu = 0 \end{cases}$$

其中  $C$  和  $t_0$  由初始条件决定。下图表示当参数取不同数值时此方程组在相平面上轨线分布情况(即相图)。

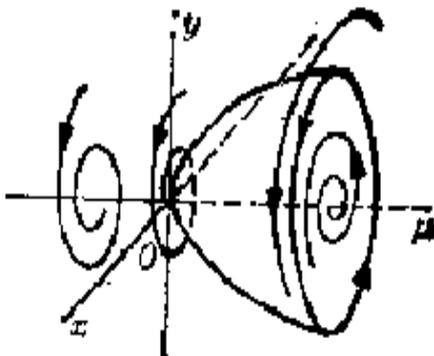


图 2.14: Hopf 分岔

## 2.12 分岔与湍流、混沌的关系

“条条道路通湍流”，通往湍流的道路有无数条。湍流是流体系统中出现的一种复杂非线性现象。它可以看作是一种时空混沌：既在时间历程上呈现出混沌也在空间上呈现出混沌。与一般混沌现象不同的是，湍流现象所涉及到的动力学自由度数目很大，同时还涉及到跨尺度现象(从大涡到小涡)。通往混沌的道路常常也就是通往湍流的道路。虽然有无穷多的可能道路，比较典型的道路有

### 1. 倍周期分岔通向混沌

这是一条通向混沌的典型道路。这条途径是一种规则的运动状态（如某种定态解或周期解）通过周期不断加倍的分岔方式逐步过渡到混沌运动状态。一个系统一旦发生倍周期分岔，必导致混沌。

以下述 Logistic 映射

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

为例，其分岔情况如图所示。

在处  $\lambda = 1$  发生第一次分岔，周期由 1 变为 2，在  $\lambda = 3$  处发生第二次分岔。随着分岔次数的增加，轨道稳定性逐渐减弱，稳定范围逐渐减小，最终导致混沌的产生。

### 普适性与 Feigenbaum 常数

在倍周期分岔趋向混沌的过程中，出现了一些普适性的常数。

### 2. Landau-Hopf 道路:

随着系统参数的改变，系统逐次分岔出不可公比的振荡频率  $f_i (i = 1, \dots, \infty)$ ，最终导致湍流的出现。从这个道路可以看出，湍流也可以视作为一种非周期信号(即具有无穷多的不可公比的频率分量)。

3. Ruelle-Takens 道路: 该典型道路十分类似于 Landau-Hopf 道路，但有所不同的是: Ruelle-Takens 认为，在通往混沌的道路上，不必经过无穷次分岔，而只需要三次即可，如图所示。这条途径可以总结为: 一种规则的运动

2.12. 分岔与湍流、混沌的关系

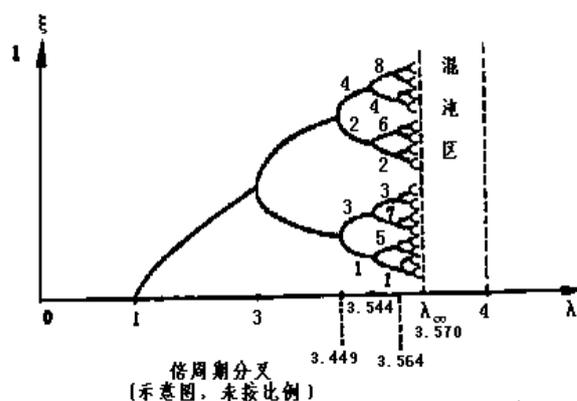
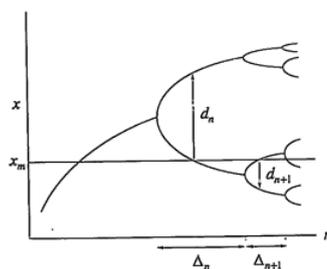


图 2.15: 倍周期分岔道路

r	period
3	2
3.499...	4
3.54409...	16
3.568759...	32
3.569946	chaotic

图 2.16: Logistic 映射的分岔



$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669... \quad \frac{d_n}{d_{n+1}} \approx -2.5029...$$

图 2.17: 普适常数

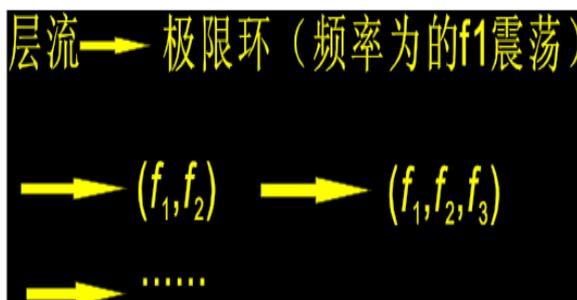


图 2.18: Landau-Hopf 道路

状态最多经过 3 次 Hopf 分岔就能变成混沌运动状态。具体地说，其通往混沌的转变可以表示为不动点  $\implies$  极限环  $\implies$  二维环面  $\implies$  混沌。每一次分岔可以看作一次 Hopf 分岔，分岔出一个新的频率。



图 2.19: Ruelle-Takens 道路

4. 阵发混沌(intermittent Chaos): 这条途径是一种规则的运动状态通过有时规则有时混乱的间歇(阵发)状态转变为混沌运动状态的。阵发混沌与倍周期分岔所产生的混沌是孪生现象，凡是观察到倍周期分岔的系统，原则上均可发现阵发混沌现象。

分岔与湍流的关系

一般而言，分岔构成混沌的前兆。

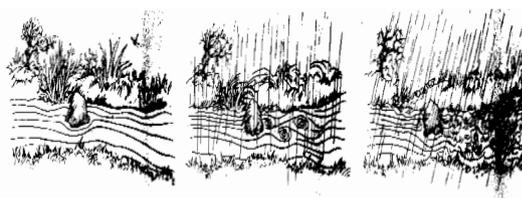


图 2.20: 分岔与湍流的关系

### 2.13 分岔点附近的临界慢化现象

越接近分岔点，系统收敛到稳态解(吸引子)的速度越慢，此即临界慢化现象，它是由德国物理学家 H. Haken 于 1982 年发现的。该现象与物理系

## 2.14. 动态分岔的难点

---

统中的相变现象十分类似。然而，与普通相变不同的是，临界慢化现象是一种单边现象：即当参数沿系统吸引子的稳定度减小的方向趋近于临界点时，才会发生临界慢化现象。

日常生活中，人们在作出重要决定之前常常表现出某种“优柔寡断”现象，实际上就是一种“临界慢化”现象；

完美事物易损原理：

即越是完美无缺的事物，就越容易受到损害。这里所谓的“完美”，在数学上说就是指其对称性高，而对称性越高的事物就越容易受到各种扰动的干扰，引起对称度的降低，此即所谓的“对称破缺”现象。

## 2.14 动态分岔的难点

### 2.14.1 分岔点的确定

### 2.14.2 分岔后新解的确定

### 2.14.3 高次分岔现象

混沌学传奇，混沌---开创新科学



## 第3章 混沌 (Chaos)

### 3.1 什么是 Chaos?

例: Logistic 映射

确定性系统: 有确定的参数和输入的系统:

随机性系统: 有随机性输入的系统:

对于线性系统:

对于非线性系统:

Chaos 的含义: 初值作微小的改变, 将会引起终值的巨大变化。

### 3.2 历史背景

1963 年, 法国气象学家 Lorenz 利用计算机发现了 Chaos 现象。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= 28x - xz - y \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z\end{aligned}\tag{3.1}$$

其相空间中的轨线如图所示。

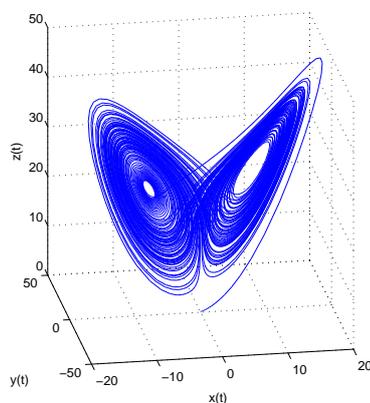


图 3.1: Lorenz 系统的相轨线

```

附：Matlab 程序
function dy = lorenz(t,y)
dy = zeros(3,1);
dy(1) = 10*(y(2)-y(1));
dy(2) = 28*y(1)-y(1)*y(3)-y(2);
dy(3) = y(1) * y(2)-8/3*y(3);
end
[T,Y] = ode45(@lorenz,[0 100],[0 0.3 0.1]);
plot3(Y(:,1),Y(:,2),Y(:,3))
其中， $x(t)$  的时间历程曲线为

```

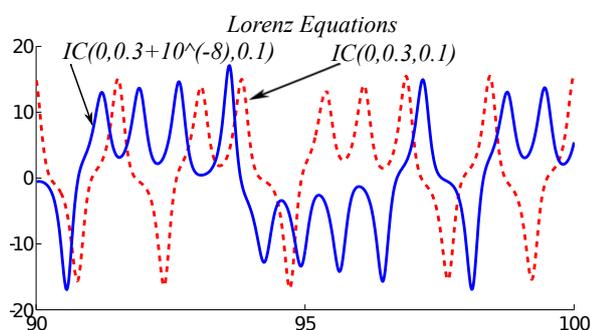


图 3.2: Lorenz 方程的时间历程

可以看到系统的相轨线极不规则，貌似一种随机运动：此即混沌现象。

但这一现象早在 19 世纪末就被法国大科学家 Poincaré 所预言（《科学与方法》）。Poincaré 在试图回答太阳系是否稳定这一问题时，发明创造了非线性动力系统的定性分析方法。

20 世纪仅有的两个数学大师--德国的 Hilbert；法国的 Poincaré。

Hilbert 23 个数学问题，其中第 16 个问题涉及极限环周期解的问题。

2000 年，数学世界纷纷抛出新的 Hilbert 式的问题，目前影响最大的式美国克雷数学研究所选出的“千年大奖问题(7 个)”。

### 3.3 与随机性的联系与区别

任一混沌过程皆可用合适的随机过程予以描述。反之，未知？

### 3.4 周期 3 意味着混沌

对于数学方程  $y = f(x)$ ，如果存在  $x_0$  使得  $x_0 \neq f(x_0)$ ，则  $x_0$  称为该方程的不动点。对于迭代方程，如果有  $x_0 \Rightarrow x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_0$ ，则称  $x_0$  为三周期点。类似地可定义  $n$  周期点。

Li-Yorke 定理(1975 年): “Period three implies chaos”，The American Mathematical Monthly, 1975 第一次在数学上严格地引入了“混沌”的定义；该文可能是数学界及物理学界被引述次数最多的当代重要论文之一；

### 3.5 Sharkovsky 定理

在 1964 年，苏联数学家沙可夫斯基(A. N. Sharkovsky) 超越时代的贡献——证明了如下定理：

自然序列：1, 2, 4, ..., ...; ... $7 \times 2^3, 5 \times 2^3, 3 \times 2^3$ ; ... $7 \times 2^2, 5 \times 2^2, 3 \times 2^2$ ; ... $7 \times 2, 5 \times 2, 3 \times 2$ ; ...7, 5, 3; 如果一个系统具有周期  $m$ ，则该系统必具有所有排在上述序列中  $m$  之前的周期。

### 3.6 若干典型混沌系统

#### 1. Duffing 方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + f(x) = e(t) \quad (3.2)$$

#### 2. Ueda 方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + x^3 = F \cos(\omega t) \quad (3.3)$$

1961 年，日本学者上田(Ueda)发现，对于某些参数  $\delta, F$  而言（比如说  $\delta = 0.05, F = 7.5$ ）这个微分方程的解，所走的轨迹当  $t$  很大时，它会乱七八糟的乱走一通，毫无规律可寻。这是以前从没有发现的事。因此那时不管是数学家或是工学院的教授没有人相信他所得到的结果。大家都认为，这只是他自己计算上的错误。他当时连文章该往何处投都不知道，因为没有人会慎重考虑他的结果。但是，自从一般人慢慢都能接受“奇异吸引子”的概念以后，大家才开始相信上田教授关于 Duffing Equation 的研究结果。1978 年暑假，法国著名教授 D. Ruelle 来日本访问，那时他才知道上田先生的结果。Ruelle 后来到世界各地宣传 Ueda 的发现，从此，上田吸引子(Ueda Attractor)又名日本吸引子(Japanese Attractor)才闻名于世。遗憾的是，头彩已被 E.N. Lorenz 抢去了。

#### 3. 蔡氏混沌电路

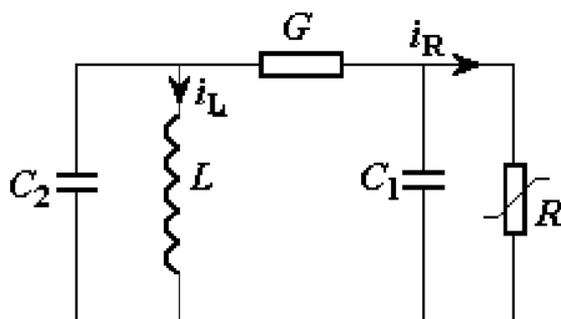


图 3.3: 蔡氏电路

这是一个具有非线性电阻的混沌电路，是由美籍华人蔡少棠首先发起研究的。图中电阻 R 是非线性的，采用分段线性设计。该电路是一个三阶自治电路，电路方程为：

$$\begin{cases} \frac{du_{c1}}{dt} = (G/C_1)(u_{c2} - u_{c1}) - (1/C_1)g(u_{c1}) \\ \frac{du_{c2}}{dt} = (G/C_2)(u_{c1} - u_{c2}) - (i_2/C_2)g(u_{c2}) \\ \frac{di_L}{dt} = -(1/L)u_{c2} \end{cases}$$

该方程可以改写为如下形式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha[y - h(x)] \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -\beta y \end{cases}$$

其中， $x = u_{c1}, y = u_{c2}, z = i_L/G, \alpha = C_2/C_1, \beta = C_2/LG^2$ 。电阻 R 是分段线性电阻，它属于对应于分段线性电阻的特性。它可以写为：

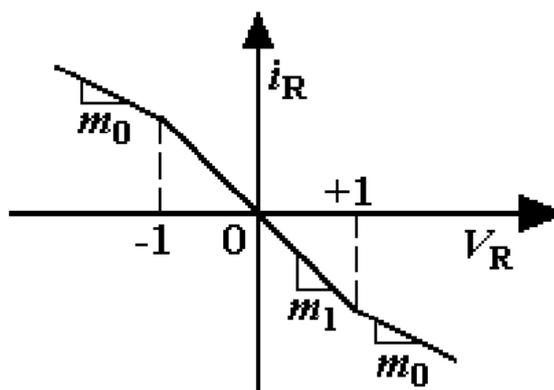


图 3.4: 非线性电阻

$$h(x) = x + g(x) = m_1x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)[|x + 1| - |x - 1|]$$

进一步，该非线性电阻还可表示为三段线性函数的形式

$$h(x) = \begin{cases} m_1x + (m_0 - m_1), & x \geq 1 \\ m_0x, & |x| \leq 1 \\ m_1x + (m_0 - m_1), & x \leq -1 \end{cases}$$

令  $\alpha=9, \beta=28, m_0=1/7, m_1=2/7$ ，则有三个平衡点：它们分别位于： $(3/2, 0, -3/2), (-3/2, 0, 3/2), (0, 0, 0)$ 。三个平衡点均为鞍点。在上述参数下，取下面的初始值： $x_0 = 0.15264, y_0 = -0.02281, z = 0.38127$ ，可得吸引子的三个二维投影如图。这种形式的奇异吸引子称为双漩(Double Scroll)结构。吸引子的维数为：2.13

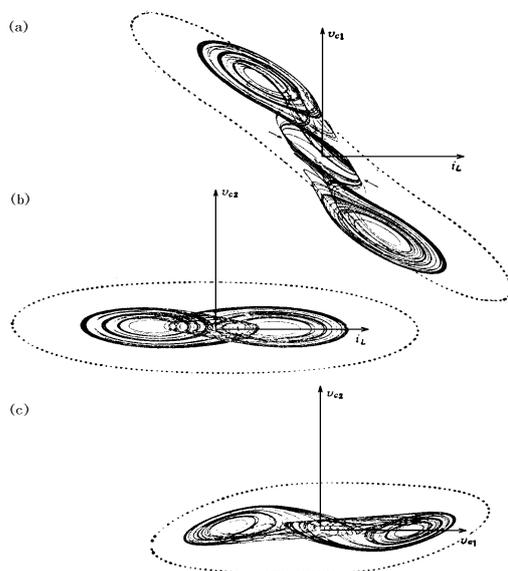


图 3.5: 蔡氏混沌电路的相图

可得吸引子的三个二维投影如图。这种形式的奇异吸引子称为双旋(Double Scroll)结构。吸引子的维数为: 2.13

4. Chen 系统类似于 Lorenz 系统, 陈关荣在 1996 年提出了 Chen 系统,

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x + xz - cy \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

一个例子:

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x) \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y \\ \dot{z} = xy - \frac{1}{3}(\alpha + 8)z \end{cases}$$

当  $\alpha = 0$  时, 上述系统就是 Lorenz 方程, 而当  $\alpha = 1$  时, 上述系统就成为 Chen 系统。

### 3.7 混沌的机理

发生混沌现象的动力学机理表现为两个方面: 拉伸效应和折叠效应。前者对应于动力学轨道的高度不稳定性: 相邻轨线相互排斥, 从而相互分离, 导致相空间中的相体积被不断拉伸变形; 后者对应于相体积的不断收缩(能量耗散), 使得系统的轨线族折来折去, 从而局限在一个有限的区域里。这种局部发散而整体收缩的机制就构成了混沌发生的基本机理。另一方面, 之所以

会发生拉伸与折叠效应，本质上还是因为多吸引子共存，导致系统的非线性状态极为丰富。

### 3.8 混沌的判别方法

混沌现象的表征：1. 时间上貌似随机；2. 相空间中表现为奇怪吸引子；3. 频谱/功率谱呈现为宽带型；4. 数值上利用 Lyapunov 指数判断；5. 动力学熵（Entropy）、分形维数等；6. 解析上 Melnikov 函数法、Shilnikov 函数法；

#### 3.8.1 运动的时间历程

#### 3.8.2 相图

#### 3.8.3 Poincare 截面

#### 3.8.4 功率谱

#### 3.8.5 Lyapunov 指数

### 3.9 一个问题

相连以后，系统会以怎样的频率振动？

内共振： $m\omega_1 = n\omega_2$ ， $m$  与  $n$  互质。给一个振子输入的能量，则该振子的能量便会逐渐传输给与其共振的振子。此时，在微扰作用下常会导致 Chaos！

#### 3.9.1 混沌现象的本质

1. 混沌是过程的科学、演化的科学，而不是状态的科学，变是混沌的本性。

当控制参量由小到大变化时，系统由稳定有序逐渐失稳，开始分岔，随着分岔按几何级数的不断增长，系统由有序到无序。当控制参量达到一个临界值时系统进入混沌区。当再增大时又会遇到一个个的周期窗口，一个个混沌区……当不断减少时系统又会由混沌逐渐向有序演化。下面对在演化过程中混沌运动状态“绝不重复，永不自交；又循环不已而且被局限在有限范围之内”的特点作些通俗的解释。比如虫口数量总是在零到最大限额之间不断变化，而且数量又年年不同；气候则总是在好天气与坏天气之间反反复复，但又没有哪两天有完全相同的天气。这就如同世上没有两片相同的树叶，没有两个相同的指纹一样。另外，由虫口方程迭代可见，只有在远离平衡的条件下，混沌系统才能演化达到混沌态。

2. 混沌现象只能出现在非线性系统而不能出现在线性系统中。

庞加莱的三体问题、蝴蝶效应和昆虫繁衍问题等，涉及的都是非线性方程。在这些方程如虫口方程中没有外加随机变量，即不存在产生随机性的外部原因。因此这种随机性是系统本身固有的，是内在随机性。而牛顿力学等的“内在随机性”的根源就在于其动力学方程中有非线性项存在，这与分子无规运动的随机性不同。如前所述，非线性方程与线性方程不同，对后者叠加原理成立，整体等于部分之和；对于前者，叠加原理不成立，整体可以大

于部分之和。正如在前面已提到的那样，在非线性系统内部存在着感应、诱导、协同、整合、吸引、排斥、干涉、放大等种种非线性交叉耦合作用，这种作用是产生混沌现象复杂性的本质原因。可见非线性是关键，内在随机性也并非牛顿力学的专利。

3. 混沌不等同于混乱，它是一种确定论系统中出现的貌似不规则的有序运动。

这种有序不同于我们所熟悉的有序——寻常有序、简单有序、线性有序。现在说的有序是乱中有序，是有序与无序的结合，是非线性序——混沌序。就是说到混乱它也是一种确定性的混乱，形式的混乱。各种混沌现象支持以上观点。就是在混沌区内也并非所有的值对应的都是混沌状态，在混沌区中似乎乱也乱得有规律。无限嵌套的自相似结构的存在不仅说明混沌有序，而且说明这是一种复杂有序，高级有序！倍周期分岔过程具有规律性是容易理解的，而普适常数——费根鲍姆常数的存在更是一个有力证明。费根鲍姆常数的存在反映了混沌演化过程中的有序性。值得强调的是，费根鲍姆常数并不限于虫口方程的迭代，对于诸如一类的非线性方程得到的值与前面给出的值竟精确相等，这反映了混沌演化有着普遍的“发展规律”。

4. 真实的自然界介乎完全的确定论和纯粹的概率论之间。

混沌现象迫使我们不得不重新审视周围世界，探究世界的本质。自然界本是一个统一的整体，但自然科学中有确定论和概率论两套描述体系。牛顿以来的科学传统比较推崇确定论体系，而把概率论作为补充。其实，完全的确定论和纯粹的概率论都是抽象后的极限情况。即当混沌运动不显著时可用确定论来描述。当混沌运动剧烈时就要考虑运用概率论的可能性了。真实的自然界实际上介乎二者之间。因为世界本质上是非线性的，线性化只能是非线性的一种合理近似。过去我们在确定论，线性化方面的研究取得了巨大成就，今后应该在混沌现象方面，在非线性的研究方面有较多的投入。

控制论的创立者维纳曾引用一首民谣对混沌现象作了生动描述：

“缺掉一枚钉，坏了一支蹄铁；  
缺少一支蹄铁，跌翻了一匹马；  
翻了一匹马，死了一个骑马的勇士；  
死了这位骑马勇士，失去这场战争的胜利；  
失去了这个胜利，亡掉了这一帝国！”——乔治·赫伯特

这又不妨叫做“蹄钉效应”。蹄钉效应对混沌现象小误差的繁殖、生长和逐级放大的特点描绘得尤其逼真。

## 3.10 若干应用

混沌现象经过近几十年的深入研究，已经取得了许多突破。目前，混沌理论已广泛应用于物理、天文、化学、生物、医学、气象等自然科学学科，也已经开始应用于激光、超导等众多高科技领域，还创建了混沌工科学等分支学科，甚至已经拓展到社会科学的众多方面。比如股市行情的风云变幻，市场经济的潮涨潮落就或多或少地有着蝴蝶效应的味道，在这些方面应用混沌理论相信是很有前途的。混沌的出现，一方面预示着人们认识世界的预测能力将受到根本性的限制，另一方面则又大大转变了人们的传统观念，向人

们提供了研究问题的新思路、新方法。过去人们往往认为搜集到的许多复杂的随机信息是一种偶然现象的反映，甚至认为是“噪声”，是实验的失败，因而弃置一旁，不予理睬。现在，人们意识到以前可能错了，这些信息里有相当一部分或许可以归入混沌一类，而可以另辟蹊径，用混沌的方法去进行研究，或者能从混沌中找到出路，甚至取得令人意想不到的结果。鉴于混沌的复杂性，要用好它往往也不是一件轻而易举的事。

### 3.10.1 医学用途

医学：心电图、脑电图、精神病的分析等。“混沌状态是健康的吗？”，Science,243(3 Feb. 1989) 604 607 同步是可怕的；共振引起桥的坍塌；正是“混沌态”才能够对各种“熟悉的”和“不熟悉的”输入（刺激）信号作出适当的响应；正常人的脑电波是混沌的；青年比老年更混沌；癫痫病人的脑电波呈现某种规律性（周期性信号）；帕金森病——其特征是肌肉颤振的不能控制——出现了同步现象。

### 3.10.2 故障诊断

故障诊断：传统方法是傅立叶分析。在此基础上，又发展了小波分析等。但对于非线性的特征还缺乏有效的提取手段。为此，混沌的特征提取，Liapunov 特性指数，分形维数等工具，提供了新的可能性。

### 3.10.3 保密通讯

保密通信：传统的保密通信采用的加密方法是基于素数分解的方法。现在，可以采用混沌信号进行加密。

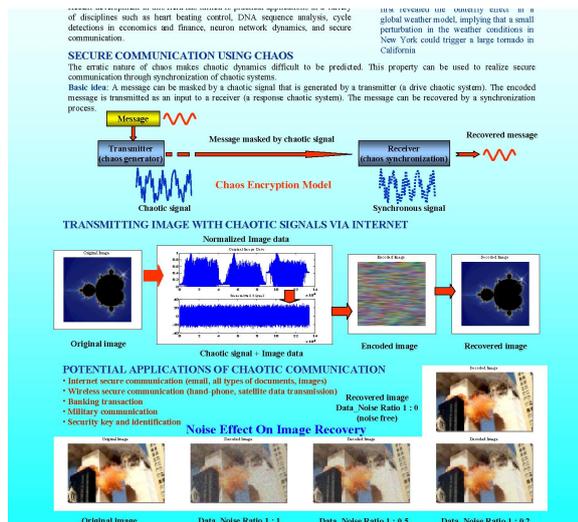


图 3.6: 保密通讯原理示意图

潜艇的消噪问题;

### 3.10.4 混合

化学反映器；面包师揉面；燃烧。

### 3.10.5 天气预报，地震预报

### 3.10.6 湍流问题

湍流又称紊流。通俗地说就是流体常有不规则涨落的紊乱流动叫湍流。湍流的运动非常复杂，大旋涡中套小旋涡，小旋涡中还有小旋涡。湍流问题被称为经典物理学的百年难题。尽管苏联物理学家朗道在 1944 就对湍流发生机制进行了深入研究，并取得重大突破。人们越来越多地将混沌理论应用于湍流的研究，获得了许多重要成果。从混沌现象着手考察了湍流的发生机制，研究了通往混沌的道路，提出了用混沌来描述湍流形成的新观点，根据流体中所发生的实际情况建立新的统计模型，有希望在探求湍流过程的共同特性上得到新的认识。湍流现象太复杂，它不仅有时间上的混乱，而且还有空间上的混乱，还会出现大尺度的规则运动。还存在许多难题。湍流之谜还不能说已经最终解开。但无论如何，人们已经清楚地看到了攻克这一百年难题的希望。

