10　足球队排名问题

1） 竞赛图法

2） 层次分析法

问题的提出

表13-1(**P_241**) 给出我国12支球队在1988-1989年全国足球甲级联赛中的成绩, 要求

(1)设计一个依据这些成绩排出 诸名次的算法, 并给出用该算法排名次的结果

(2) 把算法推广到任意个队的情况

(3) 讨论数据应具备什麽样的条件, 用你的方法才能够排出诸队的名次

竞赛图法

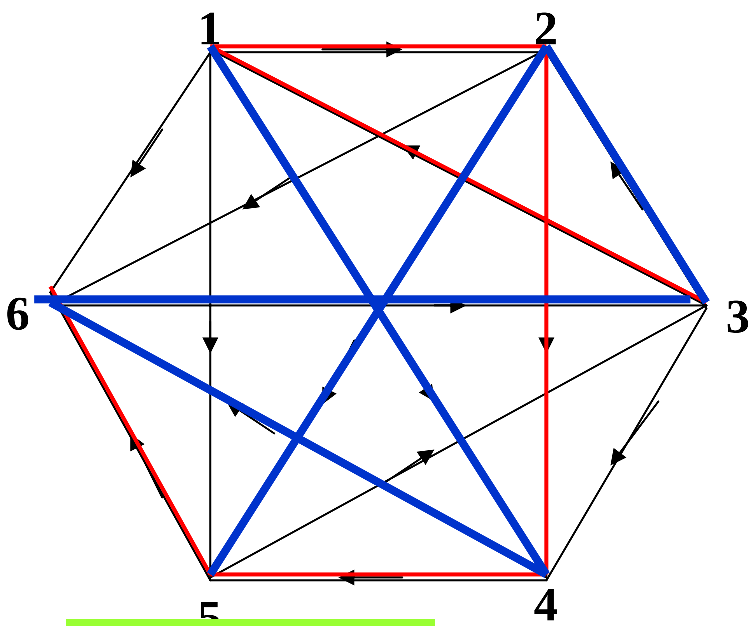
完全图的定向图 G=(V,E) ---- 竞赛图

应用：循环比赛的名次

- n支球队循环赛，每场比赛只计胜负，没有平局。
- 根据比赛结果排出各队名次

例

6支球队比赛结果



方法1：寻找按箭头方向通过全部顶点的路径。

312456　　146325　　……

无法排名

方法2：计算得分：1队胜4场，2, 3队各胜3场，4, 5队各胜2场，6队胜1场。2, 3队，4, 5队无法排名

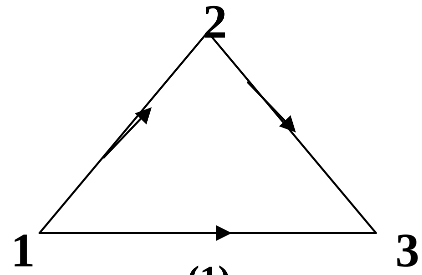
3→2，4 →5

排名 132456 合理吗

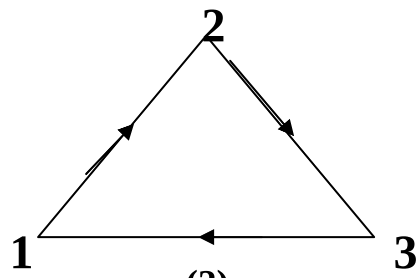
循环比赛的结果——竞赛图

每对顶点间都有边相连的有向图

3个顶点的竞赛图



(1)



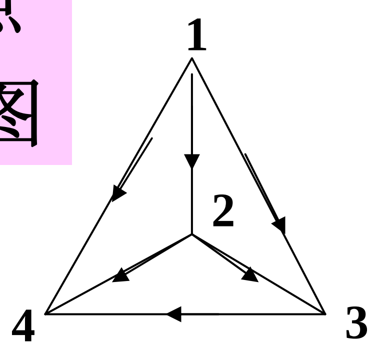
(2)

名次

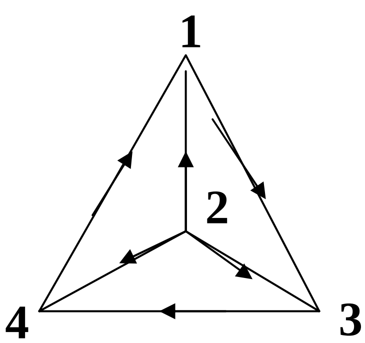
{1，2，3}

{(1,2,3)}并列

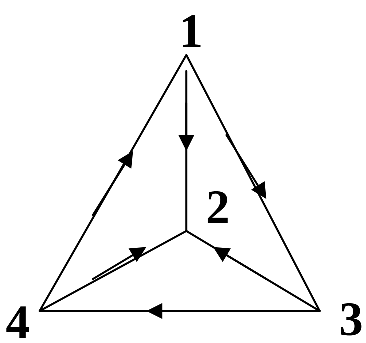
4个顶点的竞赛图



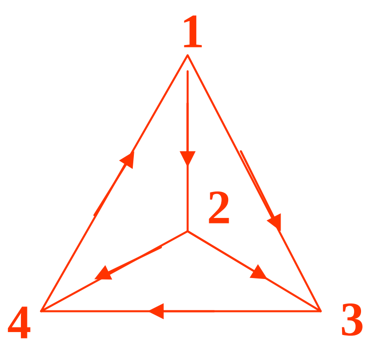
(1)



(2)



(3)



(4)

名次

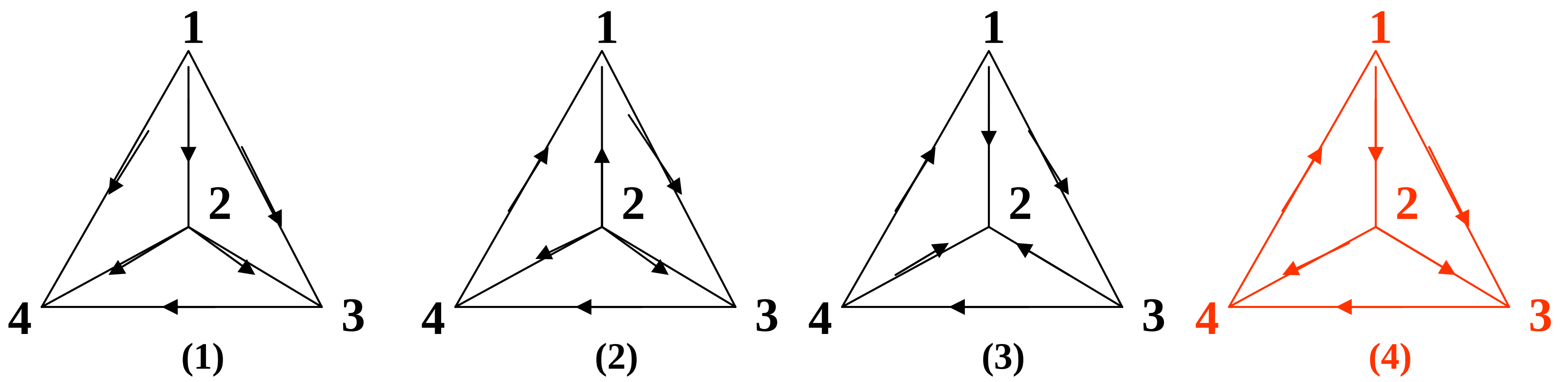
{1, 2, 3, 4}

{2,(1,3,4)}

{(1,3,4), 2}

{(1,2),(3,4)}

{1, 2, 3, 4}?



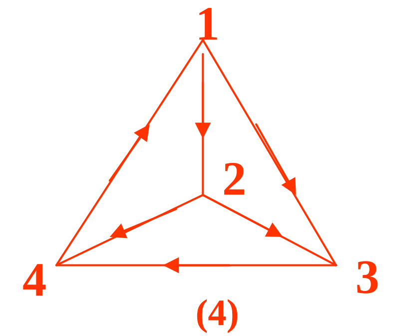
竞赛图的3种形式

- 具有唯一的完全路径，如**(1)**；
- 双向连通图——任一对顶点存在两条有向路径相互连通，如**(4)**；
- 其他，如**(2)**，**(3)**。

竞赛图的性质

- 必存在完全路径；
- 若存在唯一的完全路径，则由它确定的顶点顺序与按得分排列的顺序一致，如**(1)**。

双向连通竞赛图G=(*V*,*E*)的名次排序



邻接矩阵

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E \\ 0, & v_i v_j \notin E \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得分向量

$$s = (s_1, s_2, \cdots, s_n)^T$$

$$s = Ae,\ e = (1,1,\cdots,1)^T$$

$s^{(1)} = Ae = (2,2,1,1)^T$ ~ 1级得分向量

$s^{(2)} = As^{(1)} = (3,2,1,2)^T$ ~ 2级得分向量

$s^{(3)} = (3,3,2,3)^T, \quad s^{(4)} = (5,5,3,3)^T$

$s^{(5)} = (8,6,3,5)^T, \quad s^{(6)} = (9,8,5,8)^T$

$s^{(7)} = (13,13,8,9)^T, s^{(8)} = (21,17,9,13)^T$

$$s^{(k)} = As^{(k-1)} = A^k e$$

$$k \to \infty, s^{(k)} \to ?$$

……

双向连通竞赛图的名次排序

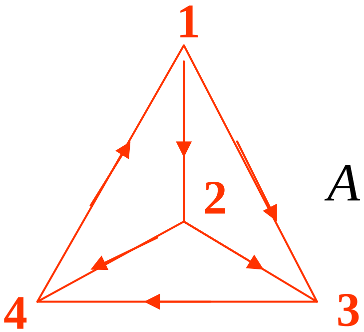
$$s^{(k)} = As^{(k-1)} = A^k e$$

• 对于**n(>3)**个顶点的双向连通竞赛图，存在正整数**r**，使邻接矩阵**A** 满足**A^r >0**，**A**称素阵

• 素阵**A**的最大特征根为正单根λ，对应正特征向量**s**，且

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k e}{\lambda^k} = s$$

⇨ $k \to \infty, s^{(k)}$(归一化后)$\to s$ ⇨ 用**s**排名



(4)

{1, 2, 3, 4}?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

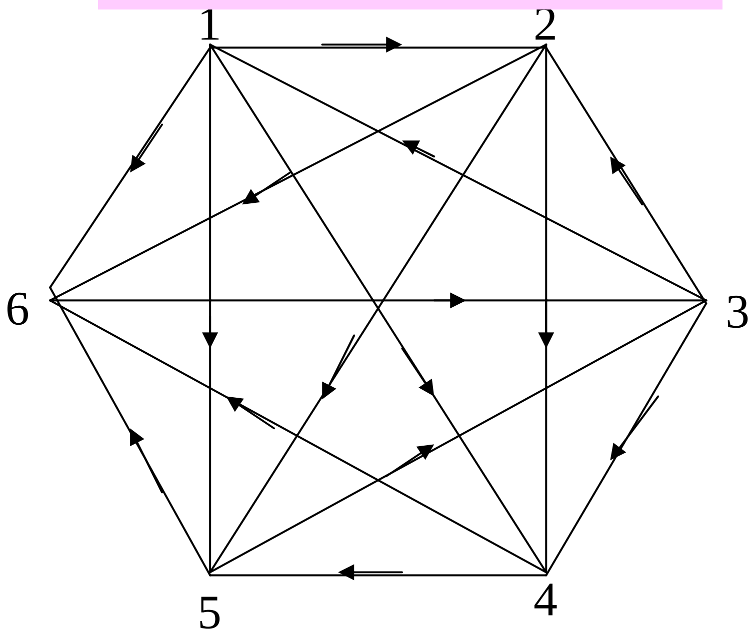
⇨ $\lambda = 1.4,$

$s = (0.323, 0.280, 0.167, 0.230)^T$

排名为{1，2，4，3}

6支球队比赛结果

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$



$$s^{(1)}=(4,3,3,2,2,1)^T,\qquad s^{(2)}=(8,5,9,3,4,3)^T$$

$$s^{(3)}=(15,10,16,7,12,9)^T,\qquad s^{(4)}=(38,28,32,21,25,16)^T$$

$$\lambda=2.232,\ s=(0.238,0.164,0.231,0.113,0.150,0.104)^T$$

排名次序为{1，3，2，5，4，6}

竞赛图的3种形式

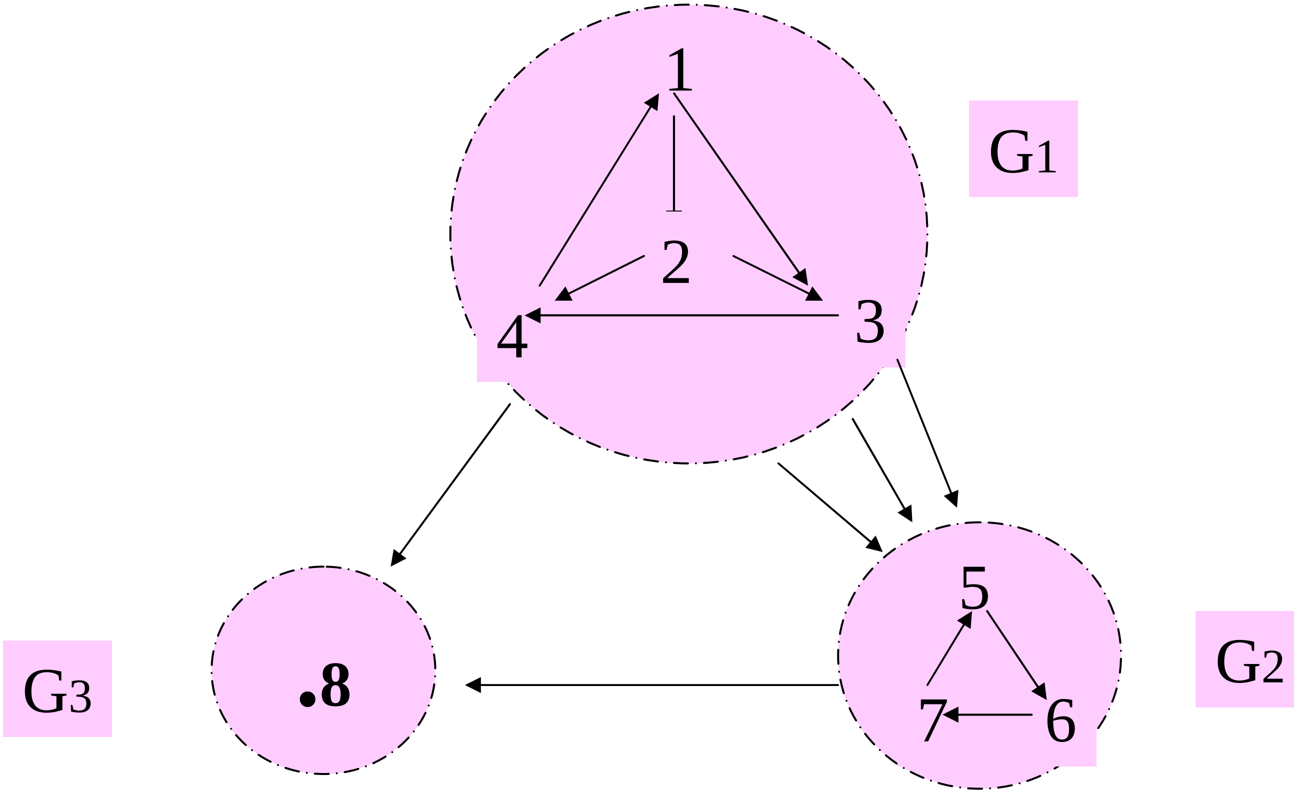
- 具有唯一的完全路径，如**(1)**;

- 双向连通图——任一对顶点存在两条有向路径相互连通，如**(4)**;

- 其他，如**(2)**，**(3)**。

其它情况：

既没有唯一完全路径又不是双向连通的竞赛图



名次排列为：1 2 4 3 （5 6 7） 8

一般排名问题的算法：

(1) 构造有向竞赛图G=(V, E)

(2) 将G 的所有双向连通分图排序为G1, G2,…, Gn： 使得当 $i<j$ 时，一端在Gi内另一端在Gj内的所有边，其头总在Gi内

(3) 对G的至少有四个顶点的每一个双向连通分图，求其邻接矩阵的最大特征值所对应的特征向量。按特征向量分量的大小，依次定出该分图对应参赛者的名次。

(4) 首先将G1的参赛者排名，然后接着将G2中的参赛者排名，依次类推，最后得到全体参赛者的名次

用竞赛图法解决足球队排名问题:----构造竞赛图

(1) 根据建边情况建立矩阵 $A=(a_{ij})$

$a_{ii}=0$

$while\ \ i\neq j,\ \ if\ with\ edge\ (T_i,T_j), let\ a_{ij}=1, a_{ji}=0$

$if\ without\ edge\ (T_i,T_j), let\ a_{ij}, a_{ji} none$

(2) 计算得分向量 a_i ，二级得分向量 $a_i^{(2)}$

a_i 以 T_i 为尾的边的数目

$a_i^{(2)}$ 被 T_i 打败的对的得分之和

(3) 完善邻接矩阵

如果 T_i 与 T_j 之间没有边连接, 比较 a_i 与 a_j

若 $a_i > a_j$, 建立边 (T_i, T_j)

若 $a_i < a_j$, 建立边 (T_j, T_i)

若 $a_i = a_j$, 比较 $a_i^{(2)}$ 与 $a_j^{(2)}$

(4) 根据邻接矩阵得到竞赛图

层次分析模型

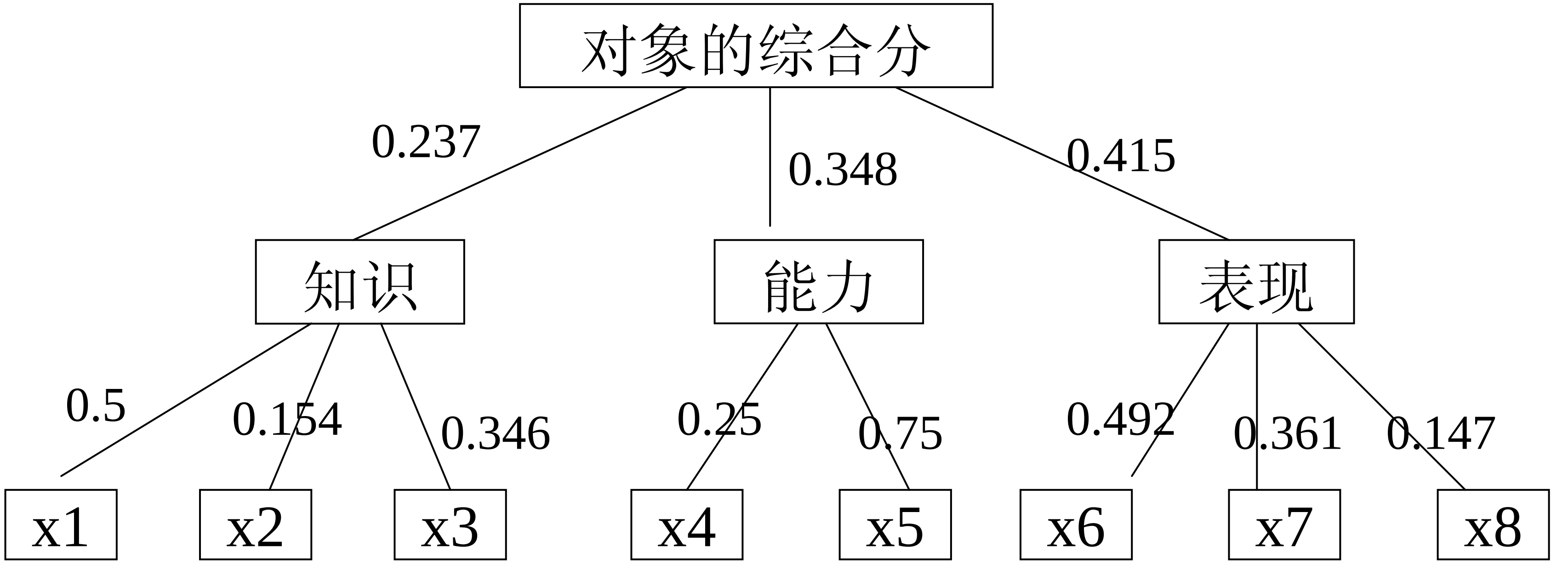
背景

- 日常工作、生活中的决策问题
- 涉及经济、社会等方面的因素
- 作比较判断时人的主观选择起相当大的作用，各因素的重要性难以量化
- **Saaty**于**1970**年代提出层次分析法 **AHP (Analytic Hierarchy Process)**
- **AHP——**一种定性与定量相结合的、系统化、层次化的分析方法

层次分析法的应用

- 应用领域：经济计划和管理，能源政策和分配，人才选拔和评价，生产决策，交通运输，科研选题，产业结构，教育，医疗，环境，军事等。
- 处理问题类型：决策、评价、分析、预测等。
- 建立层次分析结构模型是关键一步，要有主要决策层参与。
- 构造成对比较阵是数量依据，应由经验丰富、判断力强的专家给出。

例 招聘工作人员懂得层次结构模型



评价公式

$$0.119x_1 + 0.036x_2 + 0.082x_3 + 0.087x_4 + 0.261x_5 + 0.204x_6$$
$$+0.15x_7 + 0.061x_8$$

采用5分制, 甲乙丙的得分情况

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
甲	5	5	5	5	4	3	4	5
已	3	2	4	5	5	5	4	3
丙	3	3	4	2	5	5	5	4

综合分:

甲: 4.181

乙: 4.300

丙: 4.286

问题: 如何确定权系数 $w_1, w_2, \cdots, w_n$?

确定权系数的步骤:

$$y = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$$

(1) 从 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中任取 x_i 与 x_j ，比较它们对 y贡献的大小给赋值

(2) 建立逆对称矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n} = (x_i / x_j)_{n\times n}$ ，$a_{ij} > 0, a_{ji} = \dfrac{1}{a_{ij}}$

(3) 迭代 取 $e_0 = \left(\dfrac{1}{n} \quad \dfrac{1}{n} \cdots \dfrac{1}{n}\right)^T \Longrightarrow e_k = \dfrac{Ae_{k-1}}{\|Ae_{k-1}\|},$

其中 $\|Ae_{k-1}\|$ 为其各分量之和

注: 可以证明向量序列 $\{e_k\}$ 收敛, 记其极限为 e

则全系数可取 $w_i = a_i$

层次分析的基本步骤

层次分析过程可分为四个基本步骤：

（1）建立层次结构模型；

（2）构造出各层次中的所有判断矩阵；

（3）层次单排序及一致性检验；

（4）层次总排序及一致性检验。

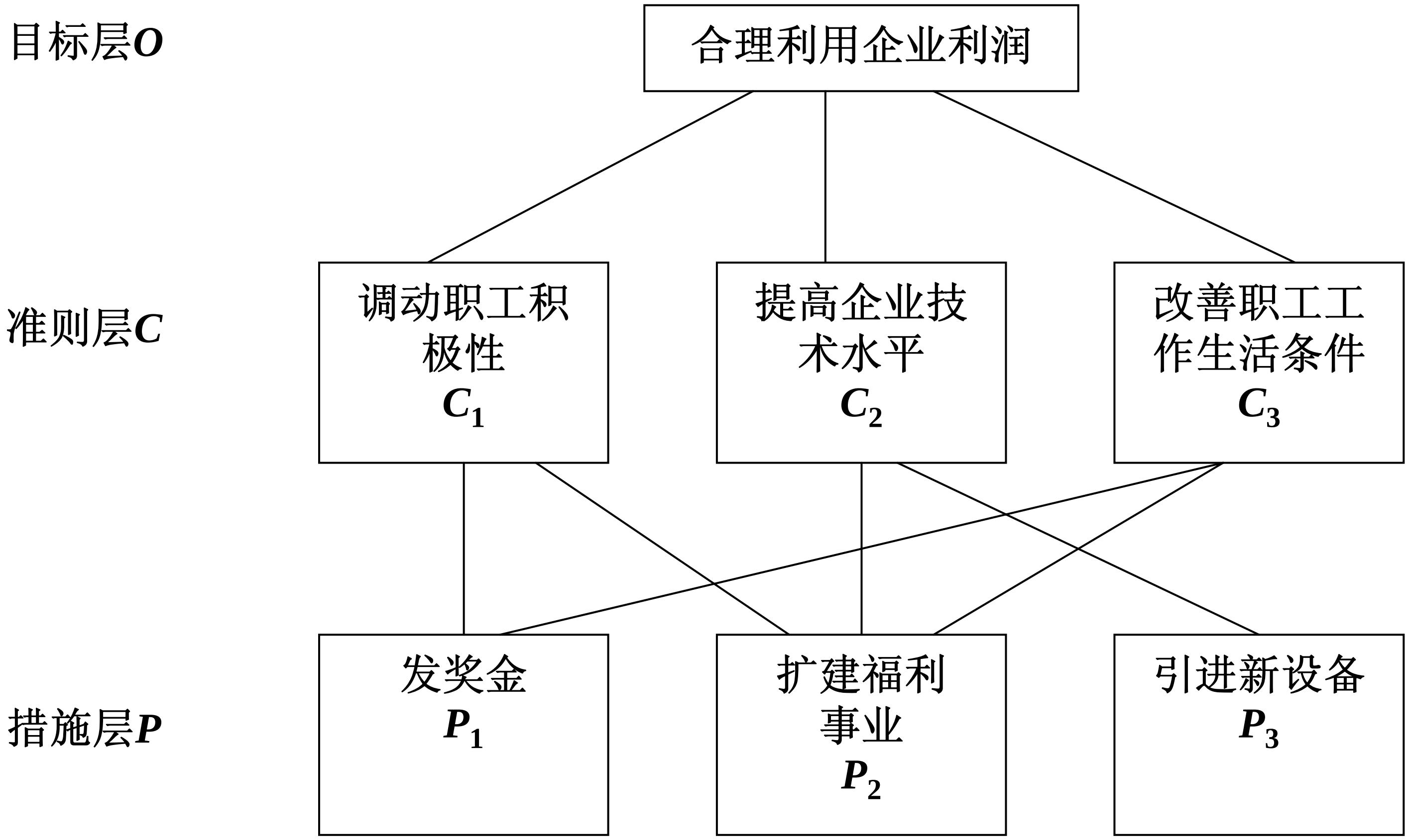
下面通过一个简单的实例来说明各步骤中所做的工作。

例　某工厂有一笔企业留成利润要由厂领导决定如何使用。可供选择的方案有：给职工发奖金、扩建企业的福利设施（改善企业环境、改善食堂等）和引进新技术新设备。工厂领导希望知道按怎样的比例来使用这笔资金较为合理。

步1 建立层次结构模型

首先要根据问题的因果关系并将这些关系分解成若干个层次。较简单的问题通常可分解为目标层（最高层）、准则层（中间层）和方案措施层（最低层）。 经过双方沟通，分析者了解到如下信息：决策者的目的是合理利用企业的留成利润，而利润的利用是否合理，决策者的主要标准为：（1）是否有利于调动企业职工的积极性，（2）是否有利于提高企业的生产能力，（3）是否有利于改善职工的工作、生活环境。分析者可以提出自己的看法，但标准的最终确定将由决策者决定。

根据决策者的意图，可以建立起本问题的层次结构模型



图中的连线反映了因素间存在的关联关系，哪些因素存在关联关系也应由决策者决定。

注:

1)　对于因果关系较为复杂的问题也可以引进更多的层次。

2)　建立层次结构模型是进行层次分析的基础，它将思维过程结构化、层次化，为进一步分析研究创造了条件。

步2 构造判断矩阵

层次结构反映了因素之间的关系，例如上图中目标层利润利用是否合理可由准则层中的各准则反映出来。但准则层中的各准则在目标衡量中所占的比重并不一定相同，在决策者的心目中，它们各占有一定的比例。

在确定影响某因素的诸因子在该因素中所占的比重时，遇到的主要困难是这些比重常常不易定量化。虽然你必须让决策者根据经验提供这些数据，但假如你提出“调动职工积极性在判断利润利用是否合理中占百分之几的比例”之类的问题，不仅会让人感到难以精确回答，而且还会使人感到你书生气十足，不能胜任这一工作。此外，当影响某因素的因子较多时，直接考虑各因子对该因素有多大程度的影响时，常常会因考虑不周全、顾此失彼而使决策者提出与他实际认为的重要性程度不相一致的数据，甚至有可能提出一组隐含矛盾的数据。

Saaty等人建议可以采取对因子进行两两比较建立成对比较矩阵的办法。即每次取两个因子x_i和x_j，以a_{ij}表示x_i和x_j对Z的影响大小之比，全部比较结果用矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$表示，称A为$Z-X$之间的成对比较判断矩阵（简称判断矩阵）。容易看出，若x_i和x_j对Z的影响之比为a_{ij}，则x_j和x_i对Z的影响之比应为 $a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$

定义　若矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$满足

定性到定量的转化

（i）$a_{ij}>0$，

（ii）$a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$　（$i, j = 1,2,\dots,n$），

则称之为正互反矩阵（易见$a_{ii}=1, i = 1, \dots, n$）。

如何确定a_{ij}的值，Saaty等建议引用数字1-9及其倒数作为标度。他们认为，人们在成对比较差别时，用5种判断级较为合适。即使用相等、较强、强、很强、绝对地强表示差别程度，a_{ij}相应地取1, 3, 5, 7和9。在成对事物的差别介于两者之间难以定夺时，a_{ij}可分别取值2、4、6、8。

步3　层次单排序及一致性检验

上述构造成对比较判断矩阵的办法虽能减少其他因素的干扰影响，较客观地反映出一对因子影响力的差别。但综合全部比较结果时，其中难免包含一定程度的非一致性。如果比较结果是前后完全一致的，则矩阵A的元素还应当满足：

$$a_{ij}a_{ik} = a_{ik}, \forall \quad \boldsymbol{i}、\boldsymbol{j}、\boldsymbol{k} = 1,2,\ldots,\boldsymbol{n}$$

定义　满足上述关系式的正互反矩阵称为一致矩阵。

- 如果判断者前后完全一致，则构造出的成对比较判断矩阵应当是一个一致矩阵。

- 如果判断者前后不完全一致，在n 较大时几乎可以说是无法办到的，其中多少带有一定程度的非一致性。更何况比较时采用了1-9 标度，已经接受了一定程度的误差，就不应再要求最终判断矩阵的严格一致性。如何检验构造出来的（正互反）判断矩阵A 是否严重地非一致，以便确定是否接受A，并用它作为进一步分析研究的工具?

Saaty等人在研究正互反矩阵和一致矩阵性质的基础上，找到了解决这一困难的办法，给出了确定矩阵A中的非一致性是否可以允忍的检验方法。

定理 正互反矩阵A的最大特征根 λ_{max} 必为正实数，其对应特征向量的所有分量均为正实数。A的其余特征根的模均严格小于 λ_{max}。（证明从略）

现在来考察一致矩阵A的性质，如果判断者的判断结果完全一致，则构造出来的一致矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\omega_1}{\omega_1} & \frac{\omega_1}{\omega_2} & \cdots & \frac{\omega_1}{\omega_n} \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} & \frac{\omega_2}{\omega_2} & \cdots & \frac{\omega_2}{\omega_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\omega_n}{\omega_1} & \frac{\omega_n}{\omega_2} & \cdots & \frac{\omega_n}{\omega_n} \end{bmatrix}$$

容易看出，一致矩阵A具有以下性质：

定理　若A为一致矩阵，则

（1）**A**必为正互反矩阵。

（2）**A**的转置矩阵$\mathbf{A}^{T}$也是一致矩阵。

（3）**A**的任意两行成比例，比例因子（即$\mathbf{w}_i/\mathbf{w}_j$）大于零，从而$\boldsymbol{rank}$（**A**）=**1**（同样，**A**的任意两列也成比例）。

（4）**A**的最大特征根$\lambda_{\max}=\boldsymbol{n}$，其中$\boldsymbol{n}$为矩阵**A**的阶。**A**的其余特征根均为零。

（5）若**A**的最大特征根$\lambda_{\max}$，对应的特征向量为$\boldsymbol{W}=$（$\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n$）^{I}，则 $\boldsymbol{a}_{ij}=\mathbf{w}_i/\mathbf{w}_j$，$\forall\ \boldsymbol{i,j}=\mathbf{1,2,\ldots,}\boldsymbol{n}$。

（注）：（1）、（2）可由一致矩阵定义得出，（3）-（5）均容易由线性代数知识得到，证明从略）。

定理 n阶正互反矩阵A为一致矩阵当且仅当其最大特征根$\lambda_{max}=n$，且当正互反矩阵A非一致时，必有$\lambda_{max}>n$。

证明：设正互反矩阵A的最大特征根为λ_{max}，
对应的特征向量为$W=(w_1,\ldots,w_n)^T$。

由定理，$\lambda_{max}>0$且$w_i>0$，$i=1,\ldots,n$。又由特征根和特征向量的性质知，$AW=\lambda_{max}W$，

故 $$\lambda_{\max} w_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_j \quad , i = 1,\ldots,n \qquad (7.7)$$

（7.7）式两边同除w_i且关于i从1到n相加，得到

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(w_j / w_i)$$

即 $$\lambda_{\max} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i} + \frac{1}{a_{ij}\frac{w_j}{w_i}}\right) \qquad (7.8)$$

（7.8）式的括号内共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 项。

现证明必要性，由一致矩阵性质（5），有 $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$ ，
故由（7.8）式，得 $\lambda_{\max}=n$。

再证明充分性。由于

$$a_{ij}\frac{w_j}{w_i}+\frac{1}{a_{ij}\frac{w_j}{w_i}}\geq 2 \qquad \textbf{(7.9)}$$

当且仅当 $a_{ij}\frac{w_j}{w_i}$ =1（即 $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$ ）时（7.9）式中的等号成立，

故由（7.8）式 $\lambda_{\max}=n$。因而当 $\lambda_{\max}=n$ 时必有 $a_{ij}\frac{w_j}{w_i}=1$，

于是 $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}\ \forall i,j,k=1,2,\ldots,n$ 成立，**A**为一致矩阵。

当**A**非一致矩阵时，（7.9）式中的等号不能对一切 i，j 成立，从而必有 $\lambda_{\max}>n$。

由于特征根连续地依赖于a_{ij}，故λ_{max}比n大得越多，A的非一致性程度也就越为严重，λ_{max}对应的标准化特征向量也就越不能真实地反映出$X=\{x_1, \ldots, x_n\}$在对因素Z的影响中所占的比重。因此，对决策者提供的判断矩阵有必要作一次一致性检验，以决定是否能接受它。为确定多大程度的非一致性是可以允忍的，Saaty等人采用了如下办法：

（1）求出 $CI = \dfrac{\lambda_{max} - n}{n-1}$，称$CI$为A的一致性指标。

- 当且仅当A为一致矩阵时，$CI = 0$。CI的值越大，A的非一致性越严重。
- 利用线性代数知识可以证明，A的n个特征根之和等于其对角线元素之和（即n）故CI事实上是A的除λ_{max}以外其余$n-1$个特征根的平均值的绝对值。若A是一致矩阵，其余$n-1$个特征根均为零，故$CI=0$；否则，$CI>0$，其值随A非一致性程度的加重而连续地增大。当CI略大于零时（对应地，λ_{max}稍大于n），A具有较为满意的一致性；否则，A的一致性就较差。

（2）***CI***值虽然能反映出非一致性的严重程度，但仍未能指明该非一致性是否应当被认为是可以允许的。

Saaty等人又研究了他们认为最不一致的矩阵——用从**1~9**及其倒数中随机抽取的数字构造的正互反矩阵，取充分大的子样，求得最大特征根的平均值 $\lambda'_{\max}$,并定义

$$RI = \frac{\lambda'_{\max} - n}{n-1}$$

称***RI***为平均随机一致性指标。

对***n*** **=1,…,11,**，**Saaty**给出了***RI***的值，如表**7.10**所示。

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
RI	**0**	**0**	**0.58**	**0.90**	**1.12**	**1.24**	**1.32**	**1.41**	**1.45**	**1.49**	**1.51**

（3）将CI与RI作比较，定义 $CR=\dfrac{CI}{RI}$ (随机一致性比率)

在CR<0.10时可以认为判断矩阵具有较为满意的一致性，否则就应当重新调整判断矩阵，直至具有满意的一致性为止。

综上所述，在步3中应先求出A的最大特征根λ_{max}及λ_{max}对应的特征向量W=（w_1，…，w_n）^{T}，进行标准化，使得 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

再对A作一致性检验：计算 $CI=\dfrac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$，

查表得到对应于n的RI值，求 $CR=CI/RI$ ，

若CR<0.1，则一致性较为满意，以 ω_i作为因子x_i 在上层因子Z 中所具有的权值。否则必需重新作比较，修正A中的元素。只有在一致性较为满意时，W的分量才可用作层次单排序的权重。

现对本节例（即合理利用利润问题的例子）进行层次单排序。

为求出C_1、C_2、C_3在目标层A中所占的权值，构造$O-C$层的成对比较矩阵，设构造出的成对比较判断知阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

于是经计算，A的最大特征根$\lambda_{max}=3.038$，$CI=0.019$，查表得$RI=0.58$，故$CR=0.033$。因$CR<0.1$，接受矩阵A，求出A对应于λ_{max}的标准化特征向量 $W=(0.105, 0.637, 0.258)^T$，以W的分量作为$C_1$、$C_2$、$C_3$在目标0中所占的权重。

类似求措施层中的P_1、P_2在C_1中的权值，P_2、P_3在 C_2中的权值及P_1、P_2在C_1中的权值：

C_1	P_1	P_2
P_1	1	3
P_2	$\frac{1}{3}$	1

C_2	P_2	P_3
P_2	1	$\frac{1}{5}$
P_3	5	1

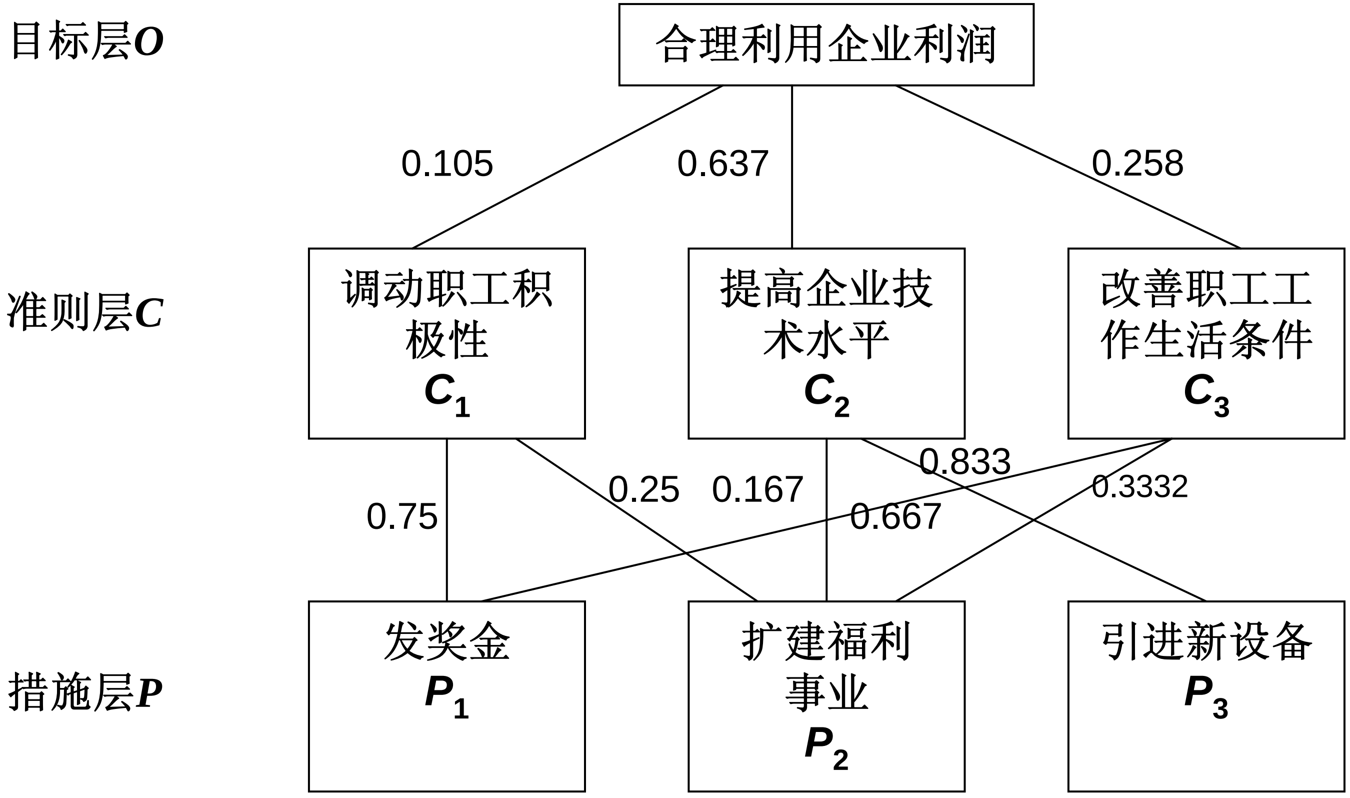
C_3	P_1	P_2
P_1	1	2
P_2	$\frac{1}{2}$	1

$\lambda_{max}=2$，$CI = CR = 0$
$W = (0.75, 0.25)^T$

$\lambda_{max}=2$，$CI = CR = 0$
$W = (0.167, 0.833)^T$

$\lambda_{max}=2$，$CI = CR = 0$
$W = (0.66, 0.333)^T$

经层次单排序，得到图


目标层O
合理利用企业利润
0.105
0.637
0.258
准则层C
调动职工积极性 C_1
提高企业技术水平 C_2
改善职工工作生活条件 C_3
0.75
0.25
0.167
0.833
0.667
0.3332
措施层P
发奖金 P_1
扩建福利事业 P_2
引进新设备 P_3

步4 层次总排序及一致性检验

最后，在步骤（4）中将由最高层到最低层，逐层计算各层次中的诸因素关于总目标（最高层）的相对重要性权值。

设上一层次（A层）包含$A_1,\ldots,A_m$共m个因素，它们的层次总排序权值分别为$a_1,\ldots,a_m$。又设其后的下一层次（B层）包含n个因素$B_1,\ldots,B_n$，它们关于A_j的层次单排序权值分别为$b_{1j},\ldots,b_{nj}$（当B_i与A_j无关联系时，$b_{ij}=0$）。现求B层中各因素关于总目标的权值，即求B层各因素的层次总排序权值$b_1,\ldots,b_n$，计算按表7.11所示方式进行,即 $b_i=\sum_{j=1}^{m} b_{ij}a_j\ i=1,\ldots,n$。

层A \ 层B	A_1 a_1	A_2 a_2	… …	A_m A_m	B层总排序权值
B_1	b_{11}	b_{12}	…	B_{1m}	$\sum_{j=1}^{m} b_{1j}a_j$
B_2	b_{21}	b_{22}	…	B_{2m}	$\sum_{j=1}^{m} b_{2j}a_j$
…	…	…	…	…	…
B_n	b_{n1}	b_{n2}	…	b_{nm}	$\sum_{j=1}^{m} b_{nj}a_j$

例如，对于前面考察的工厂合理利用留成利润的例子，措施层层次单排序权值的计算如表所示。

层C 层P	C_1	C_2	C_3	层P的总排序权值
	0.105	0.637	0.258	
P_1	0.75	0	0.667	0.251
P_2	0.25	0.167	0.333	0.218
P_3	0	0.833	0	0.531

对层次总排序也需作一致性检验，检验仍象层次总排序那样由高层到低层逐层进行。这是因为虽然各层次均已经过层次单排序的一致性检验，各成对比较判断矩阵都已具有较为满意的一致性。但当综合考察时，各层次的非一致性仍有可能积累起来，引起最终分析结果较严重的非一致性。

设B层中与A_j相关的因素的成对比较判断矩阵在单排序中经一致性检验，求得单排序一致性指标为$CI(j)$，（$j=1, \ldots, m$），相应的平均随机一致性指标为$RI(j)$（$CI(j)$、$RI(j)$已在层次单排序时求得），则B层总排序随机一致性比率为

$$\boldsymbol{CR} = \frac{\sum_{j=1}^{m} CI(j)a_j}{\sum_{j=1}^{m} RI(j)a_j}$$

当$CR<0.10$时，
认为层次总排序结果具有较满意的一致性并接受该分析结果。

对于上表P层总排序，由于C—P层间的三个判断矩阵的一致性指标（即$CI(j)$，j=1，2，3）均为0，故P层总排序的随机一致性比率CR=0，接受层次分析结果，将留成利润的25.1%用于发奖金，21.8%用于扩建福利事业，余下的53.1%用于引进新技术新设备。

层次分析

从对问题的具体情况的了解出发,建立层次结构模型,进行决策分析. **层次分析法将定性分析与定量分析结合起来完成以上步骤，给出决策问题的定量结果.**

应 用

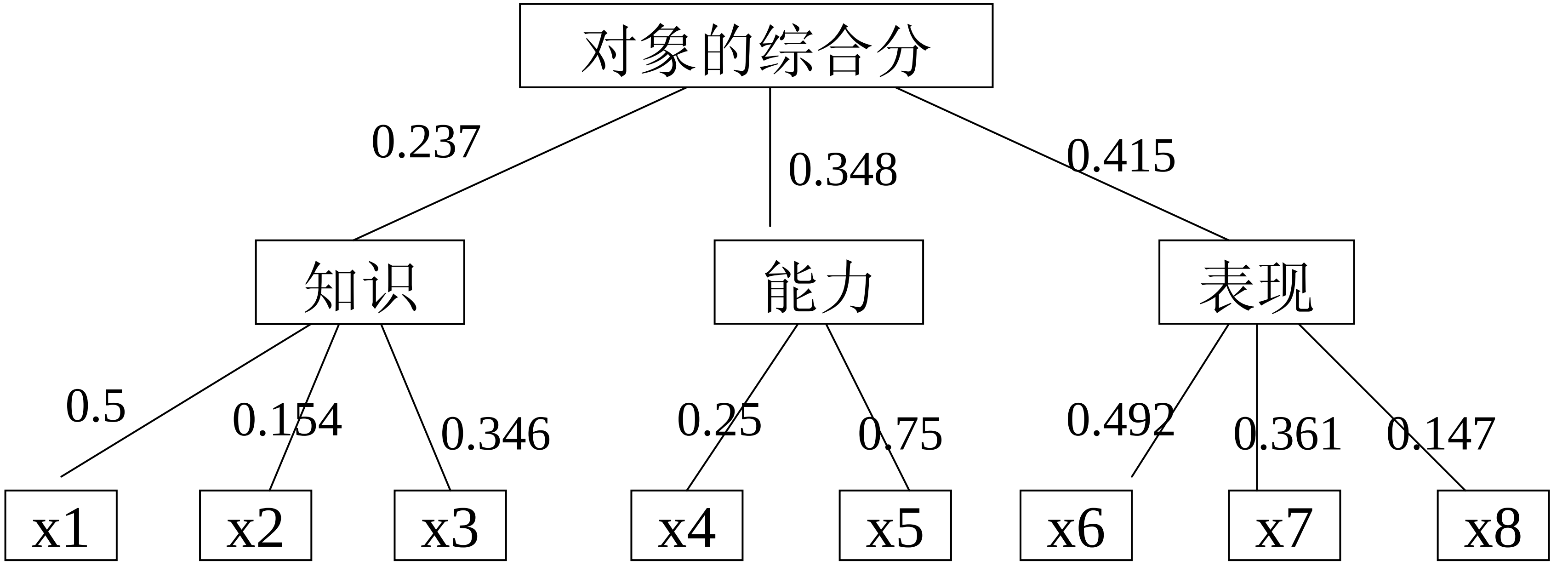
(1) 综合评价

- 设评价指标共有个,为 $x_{1,} x_2, \cdots, x_n$
- 它们对最高层有权系数对应为 $w_1, w_2, \cdots, w_n$

在对所有评价指标采用同一的分制时, 综合分为

$$y = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$$

例　招聘工作人员懂得层次结构模型



评价公式

$$0.119x_1+0.036x_2+0.082x_3+0.087x_4+0.261x_5+0.204x_6$$
$$+0.15x_7+0.061x_8$$

采用5分制，甲乙丙的得分情况

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
甲	5	5	5	5	4	3	4	5
已	3	2	4	5	5	5	4	3
丙	3	3	4	2	5	5	5	4

综合分:

甲: 4.181

乙: 4.300

丙: 4.286

(2) 投入量的分配

投入量给定，要把它们分配到若干部门去，把权系数当成分配的百分比率。---如例题

(3) 估计与预测

把权系数当成离散型概率来看，最高层是行为方式，最底层各结点表示可能出现的前景或产生的后果，权系数形成一个概率分布，显然，这种概率只是先验的估计值，还需追加信息以求改进。如例4—p194

层次分析法的若干问题

- 正互反阵的最大特征根是否为正数？特征向量是否为正向量？一致性指标能否反映正互反阵接近一致阵的程度？

- 怎样简化计算正互反阵的最大特征根和特征向量？

- 为什么用特征向量作为权向量？

- 当层次结构不完全或成对比较阵有空缺时怎样用层次分析法？

1. 正互反阵的最大特征根和特征向量的性质

定理1　正矩阵A 的最大特征根λ是正单根，对应正特征向量w，且 $\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{e^T A^k e}=w,\quad e=(1,1,\cdots,1)^T$

正互反阵的最大特征根是正数，特征向量是正向量。

定理2　n阶正互反阵A的最大特征根$\lambda \geq n$，$\lambda = n$是A为一致阵的充要条件。

一致性指标 $CI=\frac{\lambda-n}{n-1}$ 定义合理

2. 正互反阵最大特征根和特征向量的简化计算

- 精确计算的复杂和不必要
- 简化计算的思路——一致阵的任一列向量都是特征向量，一致性尚好的正互反阵的列向量都应近似特征向量，可取其某种意义下的平均。

和法——取列向量的算术平均

例 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 1/2 & 1 & 4\\ 1/6 & 1/4 & 1\end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{列向量归一化}}$ $\begin{bmatrix}0.6 & 0.615 & 0.545\\ 0.3 & 0.308 & 0.364\\ 0.1 & 0.077 & 0.091\end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{算术平均}}$ $\begin{bmatrix}0.587\\ 0.324\\ 0.089\end{bmatrix}=w$

$$Aw=\begin{bmatrix}1.769\\ 0.974\\ 0.286\end{bmatrix}$$

$$Aw=\lambda w \Rightarrow \lambda=\frac{1}{3}\left(\frac{1.769}{0.587}+\frac{0.974}{0.324}+\frac{0.268}{0.089}\right)=3.009$$

精确结果:$w=(0.588,0.322,0.090)^T$, $\lambda=3.010$

简化计算

根法——取列向量的几何平均

幂法——迭代算法

1）任取初始向量$w^{(0)}$, k:=0，设置精度ε

2) 计算 $\tilde{w}^{(k+1)} = Aw^{(k)}$

3）归一化 $w^{(k+1)} = \tilde{w}^{(k+1)} / \sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i^{(k+1)}$

4）若 $\max_i \left| w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)} \right| < \varepsilon$，停止;

否则，k:=k+1, 转2

5) 计算 $\lambda = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\tilde{w}_i^{(k+1)}}{w_i^{(k)}}$

3. 特征向量作为权向量——成对比较的多步累积效应

问题

一致阵A, 权向量$w=(w_1,\ldots w_n)^T$, $a_{ij}=w_i/w_j$

A不一致，应选权向量w使w_i/w_j与a_{ij}相差尽量小（对所有i,j)。

用拟合方法确定w ⇨

$$\min_{w_i(i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}-\frac{w_i}{w_j}\right)^2$$

非线性最小二乘

线性化——对数最小二乘

$$\min_{w_i(i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\ln a_{ij}-\ln\frac{w_i}{w_j}\right)^2$$

结果与根法相同

多步累积效应

• 按不同准则确定的权向量不同，特征向量有什么优点。

成对比较

C_i:C_j (直接比较)

a_{ij} ~ 1步强度

$$A^2 = (a_{ij}^{(2)}) \quad a_{ij}^{(2)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} a_{sj}$$

$a_{ij}^{(2)}$ ~ 2步强度

$a_{is}a_{sj}$~ C_i通过C_s 与C_j的比较

更能反映C_i对C_j 的强度

$A^k = (a_{ij}^{(k)}), \quad a_{ij}^{(k)} \sim k$步强度

体现多步累积效应

$$\forall i, j, \exists k_0, k > k_0, a_{is}^{(k)} \ge a_{js}^{(k)} \text{或} a_{is}^{(k)} \le a_{js}^{(k)} (s = 1, \cdots n)$$

$\Rightarrow$ 当k足够大, A^k第i行元素反映C_i的权重 $\Rightarrow$ 求A^k的行和

定理1 $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{A^k e}{e^T A^k e} = w$

特征向量体现多步累积效应

4. 残缺成对比较阵的处理

例 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \theta \\ 1/2 & 1 & 2 \\ \theta & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ 辅助矩阵 $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & w_1/w_3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ w_3/w_1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

θ为残缺元素

$Cw=\lambda w \Rightarrow \lambda=3,\ w=(0.5714,0.2857,0.1429)^T$

$\Updownarrow$

$\bar{A}w=\lambda w$

$\bar{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\bar{a}_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & i\neq j, a_{ij}\neq\theta \\ 0, & i\neq j, a_{ij}=\theta \\ m_i+1, & i=j \end{cases}$$

m_i~A第i行中θ的个数

确定权系数的步骤:

$$y = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$$

(1) 从 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中任取 x_i 与 x_j ，比较它们对 y贡献的大小给赋值

(2) 建立逆对称矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n} = (x_i / x_j)_{n\times n}$ ，$a_{ij} > 0, a_{ji} = \dfrac{1}{a_{ij}}$

(3) 迭代　　取 $e_0 = \left(\dfrac{1}{n} \quad \dfrac{1}{n} \cdots \dfrac{1}{n}\right)^T \Longrightarrow e_k = \dfrac{Ae_{k-1}}{\left\|Ae_{k-1}\right\|}$,

其中 $\left\|Ae_{k-1}\right\|$ 为其各分量之和

注: 可以证明向量序列 $\{e_k\}$ 收敛, 记其极限为 $e = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

则全系数可取 $w_i = a_i$

层次分析的基本步骤

层次分析过程可分为四个基本步骤：

（1）建立层次结构模型；

（2）构造出各层次中的所有判断矩阵；

（3）层次单排序及一致性检验；

（4）层次总排序及一致性检验。

应用层次分析法对足球队排名

为了排出名次, 一个好的排名算法应满足下列基本要求:

(1) 保序性

(2) 稳定性

(3) 能够处理不同场比赛的权重

(4) 能够判断成绩表的可约性

(5) 能够准确的进行补残

(6) 容忍不一致的现象

(7) 对数据可依赖程度给出较为精确的描述

基本假设和约定

假设1: 参赛各队存在客观的真实实力---任何一种排名的 基础

假设2: 在每场比赛中体现出来的强队对弱队的表面实力对比是以它们的真实实力对比为中心的互相独立的正态分布

$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 真实实力向量, 排名向量

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 比赛成绩的判断矩阵, 其中 a_{ij} 是T_i 对T_j 的相对强弱程度, T_i 与 T_j 成绩残缺时约定 $a_{ij}=0$, 而且

$$a_{ij}\geq 0,\ \ a_{ij}=1/a_{ji},\ \ a_{ii}=1$$

矩阵 $A_{n\times n}$ 可约 若A能用行列同时调换化为$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}$

算 法

第1步：根据比赛成绩表构造判断矩阵A

i 从1,…,n, j 从1,…, n 循环

(1) 若 T_i 与 T_j 互胜场次相等, 则

1） 净胜球=0， $a_{ij} = a_{ji} = 1$； 跳出作下一步循环

2） T_i 净胜球多时， 以 T_i 净胜 T_j 一场作后续处理

(2) 若 T_i 净胜 T_j k 场 且 $k>0$, 则

1) $$b_{ij} = \begin{cases} 2k, & 1 \le k \le 4 \\ 9, & k > 4 \end{cases}$$

2) m_{ij} = T_i 胜 T_j 平均每场净胜球数

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & m_{ij} > 2 \\ 0, & 0 \le m_{ij} \le 2 \\ -1, & m_{ij} < 0 \end{cases}$$

3) $a_{ij} = b_{ij} + d_{ij}, \quad a_{ji} = 1/a_{ij}$

(3) 若 T_i 与 T_j 无比赛成绩，则 $a_{ij} = a_{ji} = 0$

第2 步: 检测矩阵A 的可约性,如果可约则输出可约信息后退出

第3步: 构造辅助矩阵 $\tilde{A}$

i 从1,…,n, j 从1,…, n 循环

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq j, a_{ij} \neq 0 \\ m_i + 1, & i = j, m_i \text{为A的第 } i \text{ 行0的个数} \\ 0, & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

第4 步：计算 $\tilde{A}$ 的主特征值 $\lambda_{\max}$ 和主特征向量 $\boldsymbol{w}$

(1) 允许误差ε，任取初始正向量 $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T$，令$k=0$，计算

$$m_0 = \max_{1 \le i \le n} \left\{ x_i^{(0)} \right\} \qquad y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \cdots y_n^{(0)})^T = \frac{1}{m_0} x^{(0)}$$

(2) 迭代计算

$$x^{(k+1)} = \tilde{A} y^{(k)} \qquad m_{k+1} = \max_{1 \le i \le n} \left\{ x_i^{(k+1)} \right\}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{1}{m_{k+1}} x^{(k+1)} \qquad k = k + 1$$

$$till \quad |m_{k+1} - m_k| < \varepsilon$$

(3) $\lambda_{\max} = m_k;\quad w = y^{(k+1)} / \sum_{i=1}^{n} y_i^{(k)}$

第5 步：按 w 各分量由大到小的顺序对参赛各队排名次

第6步：计算 $$h = \sum_{\substack{w_i > w_j \\ a_{ij} \neq 0}} \left(\frac{a_{ij}}{w_i / w_j} - 1\right)^2 + \sum_{\substack{w_i = w_j \\ a_{ij} \neq 0, i > j}} \left(\frac{a_{ij}}{w_i / w_j} - 1\right)^2$$

$$Y = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}$$ 其中 m_i 为A的第i 行0的个数

根据2h 查 χ^2 表得到可依赖程度 $\alpha = P(\chi^2 Y > 2h)$

关于算法的说明

- 第1步可以有不同的方法
- 第2步判断矩阵A对应的图的连通性
- 第3步当A残缺时完善判断矩阵
- 第4步计算特征向量, 然后排序

算法的理论分析

- 排名的合理性和保序性
- 对残缺的处理
- 对手的强弱对自己排名的影响
- 模型的稳定性的分析
- 关于可依赖程度的分析

对手的强弱对自己排名的影响

排名向量满足 $\tilde{A}w = \lambda_{\max} w$ 则

$$w_i = \frac{1}{\lambda_{\max}} \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} w_j, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

固定 a_{ik} 令 w_k 变大,则 $\tilde{a}_{ik} w_k$ 就会变大, 从而引起 w_i 变大

模型的稳定性的分析

判断矩阵作微小变动时,主特征根的变动是微小的, 近而主特征向量的变动是微小的. 故排名稳定