12 传染病模型

传染病是人类的大敌，通过疾病传播过程中若干重要因素之间的联系建立微分方程加以讨论，研究传染病流行的规律并找出控制疾病流行的方法显然是一件十分有意义的工作。在本节中，我们将主要用多房室系统的观点来看待传染病的流行，并建立起相应的多房室模型。

问题的提出：

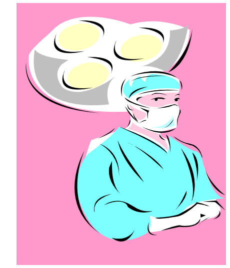
医生们发现，在一个民族或地区，当某种传染病流传时，波及到的总人数大体上保持为一个常数。即既非所有人都会得病也非毫无规律，两次流行（同种疾病）的波及人数不会相差太大。如何解释这一现象呢？试用建模方法来加以证明。

传染病模型

问题

- 描述传染病的传播过程
- 分析受感染人数的变化规律
- 预报传染病高潮到来的时刻
- 预防传染病蔓延的手段
- 按照传播过程的一般规律，用机理分析方法建立模型

模型1　已感染人数 (病人) $i(t)$



假设

• 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模

$$i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t)=i_0 e^{\lambda t}}$$

$$\Rightarrow t\to\infty \Rightarrow i\to\infty \quad ?$$

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加 $\Rightarrow$ 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

模型2　区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

1）总人数N不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$

SI 模型

2）每个病人每天有效接触人数为λ, 且使接触的健康人致病

λ ~ 日接触率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

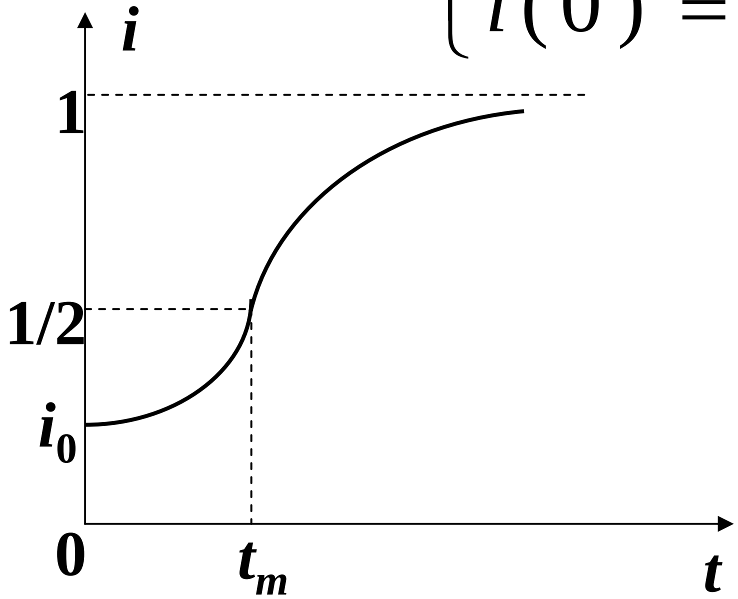
$$\frac{di}{dt}=\lambda si$$

$$s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Logistic 模型}$$



$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1}\ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

$t=t_m$, di/dt 最大

t_m~传染病高潮到来时刻

λ (日接触率)↓ → t_m↑

$t \to \infty \Rightarrow i \to 1$?

病人可以治愈！

模型3 传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染

SIS 模型

增加假设 3）病人每天治愈的比例为μ

μ~日治愈率

建模 $N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

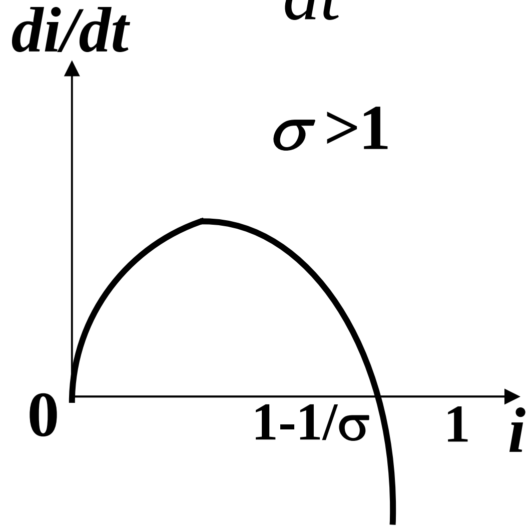
λ~日接触率

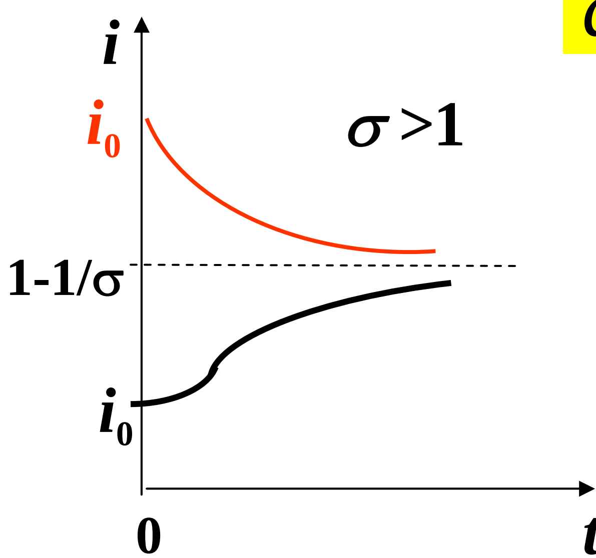
$1/\mu$~感染期

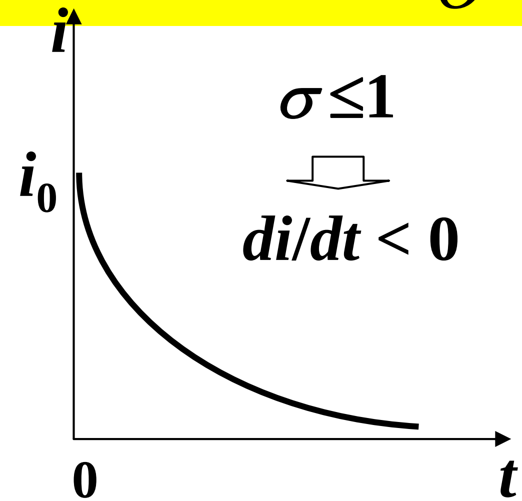
$\sigma=\lambda/\mu$

σ~一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为**接触数**。

模型3 $\frac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \quad \sigma=\lambda/\mu$ $\quad \frac{di}{dt}=-\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$







$$i(\infty)=\begin{cases}1-\frac{1}{\sigma}, & \sigma>1\\ 0, & \sigma\le 1\end{cases}$$

接触数σ=1 ~ 阈值

$\sigma\le 1 \Rightarrow i(t)\downarrow$

$\sigma>1$, i_0小 $\Rightarrow i(t)$按S形曲线增长

感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

模型4

传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称**移出者**

SIR模型

假设

1）总人数N不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$

2）病人的日接触率λ, 日治愈率μ,

接触数 $\sigma=\lambda/\mu$

建模

$$s(t)+i(t)+r(t)=1$$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程

模型4

SIR模型

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i \\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si \\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0 \end{cases} \Rightarrow$$

无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解

$\Downarrow$

在相平面 $s\sim i$ 上研究解的性质

$i_0+s_0\approx 1$(通常 $r(0)=r_0$ 很小)

模型4

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去dt

$\sigma = \lambda / \mu$

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

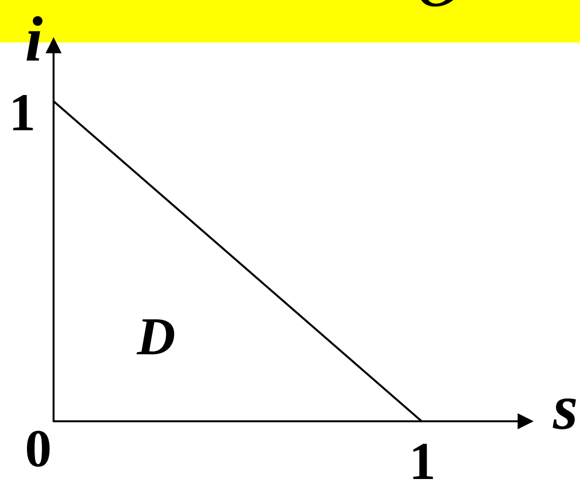
相轨线

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

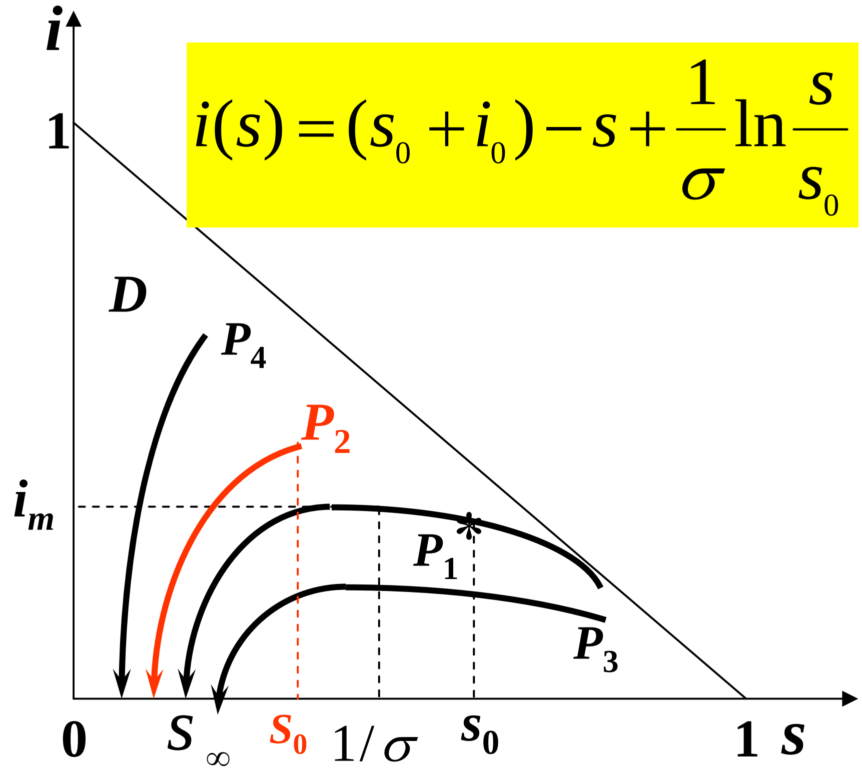
$$D = \{(s,i) \mid s \geq 0,\ i \geq 0,\ s + i \leq 1\}$$

在D内作相轨线$i(s)$的图形，进行分析



模型4 相轨线 $i(s)$ 及其分析 **SIR模型**

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i\\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si\\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{di}{ds}=\dfrac{1}{\sigma s}-1\\ i\big|_{s=s_0}=i_0\end{cases}$$



$$i(s)=(s_0+i_0)-s+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$

$s(t)$单调减→相轨线的方向

$$s=1/\sigma,\ i=i_m\qquad t\to\infty,\ i\to 0$$

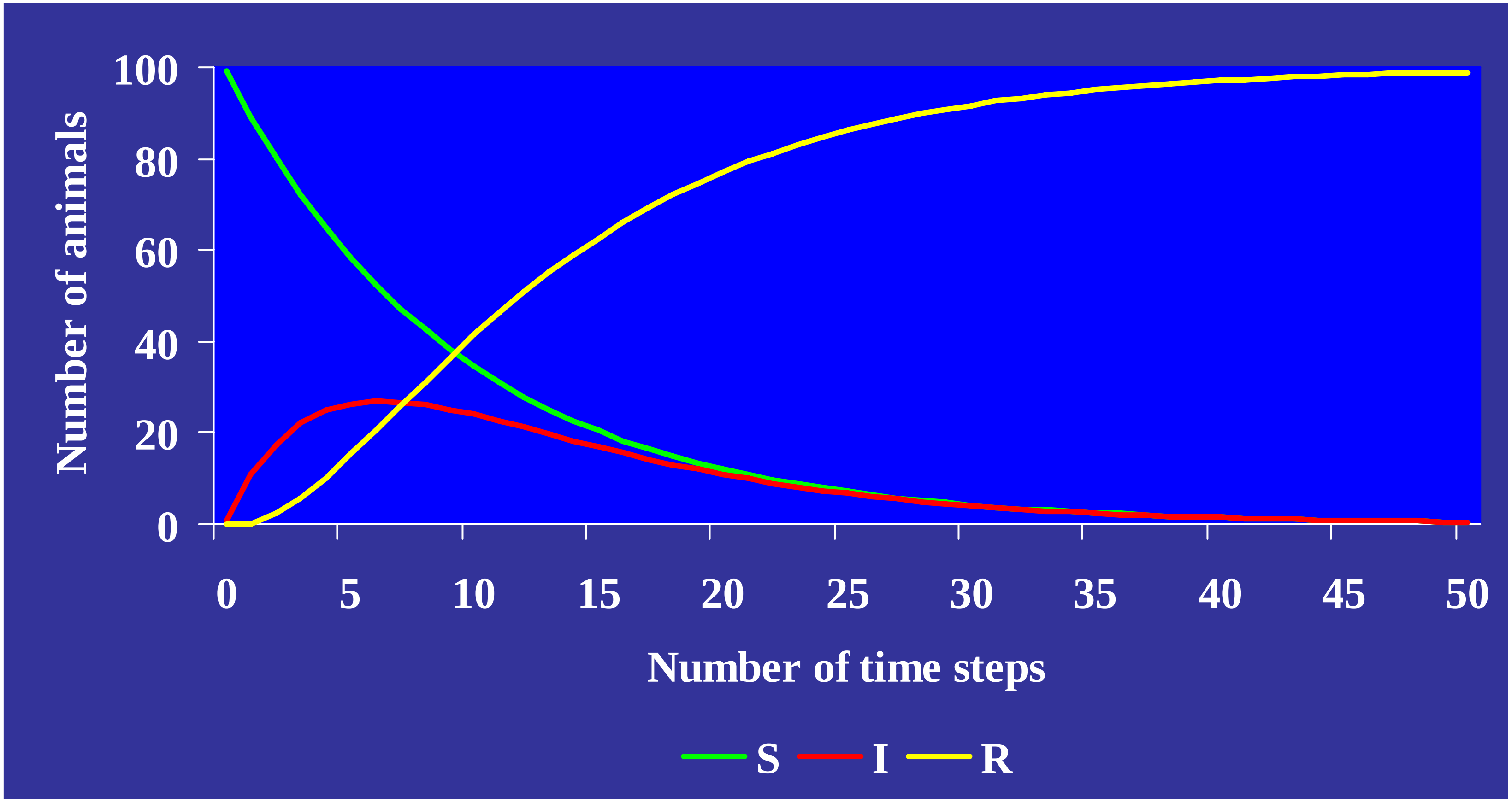
s_∞满足 $s_0+i_0-s_\infty+\dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{s_\infty}{s_0}=0$

P_1: $s_0>1/\sigma\to i(t)$先升后降至0 ⇨ 传染病蔓延

P_2: $s_0<1/\sigma\to i(t)$单调降至0 ⇨ 传染病不蔓延

$1/\sigma$ 阈值

Course of number of S, I and R animals in a closed population



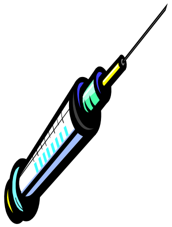
模型4 预防传染病蔓延的手段 SIR模型

传染病不蔓延的条件——$s_0<1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ ⇨ 降低 $\sigma(=\lambda/\mu)$ ⇨ $\lambda\downarrow,\ \mu\uparrow$

  λ (日接触率)$\downarrow \Rightarrow$ 卫生水平$\uparrow$

  μ(日治愈率)$\uparrow \Rightarrow$ 医疗水平$\uparrow$



- 降低 s_0 ⇨ 提高 r_0 ⇨ 群体免疫

$$s_0+i_0+r_0=1$$

(1) Models with birth and death

$$S' = A - \beta SI - dS$$
$$I' = \beta SI - \gamma I - dI$$
$$R' = \gamma I - dR$$

The total population gives $N = S + I + R$

$$N' = A - dN$$

$$S' = A - \beta SI - dS$$
$$I' = \beta SI - \gamma I - dI$$

Basic reproduction number R0

$$R_0 = \frac{\beta A}{(d+\gamma)d}$$

(2) Models with birth and death

$$S' = b(S + I + R) - \beta SI - dS$$

$$I' = \beta SI - \gamma I - dI$$

$$R' = \gamma I - dR$$

The total population gives $N' = bN - dN$

1) $b > d, \quad N \to +\infty$

2) $b = d, \quad N \ \ constant$

SARS建模和预测

SARS是21世纪第一个在世界范围内传播的传染病。SARS从2002年11月份开始在我国和世界范围内流行，到2003年6月23日为止，世界卫生组织(WHO)报道的SARS患者已经达到了8459人，其中802人死亡。

中国是SARS流行的重灾区，到2003年6月23日为止的SARS患者为5326人，其中347人死亡。给人民生活和国民经济的发展带来了巨大的影响。

ＳＡＲＳ是由一种冠状病毒引起的传染性很强的呼吸道传染病，它主要通过近距离空气飞沫以及接触病人呼吸道分泌物和密切接触进行传播，也可能通过病人飞沫污染物、如通过手、衣物、食物、水或环境等途径传播。ＳＡＲＳ潜伏期一般为2-11天，在潜伏期无感染 。SARS患者的主要症状有：发热（体温38℃以上）为首发症状，多为高热，并可持续1-2周以上，可伴有寒战或其他症状，包括头痛、全身酸痛和不适、乏力，部分病人在早期也会有轻度的呼吸道症状(如咳嗽、咽痛等）。 SARS患者治愈后不会再被感染。

假设：

1）单位时间感染的人数与现有的感染者成比例；

2）单位时间内治愈的人数与现有的感染者成比例；

3）单位时间内死亡的感染者人数与现有的感染者成比例；

4）SARS患者治愈恢复后不再被感染；

5）各类人口的自然死亡可以忽略；

6）忽略迁移的影响。

模型

令I(t)是第t天时SARS感染者的数量， 则

$$I(t+1)=I(t)+ b(t)I(t)-[d(t)+c(t)]I(t),$$

b(t)为感染率，d(t)为死亡率，c(t)为治愈率。

模型简化为

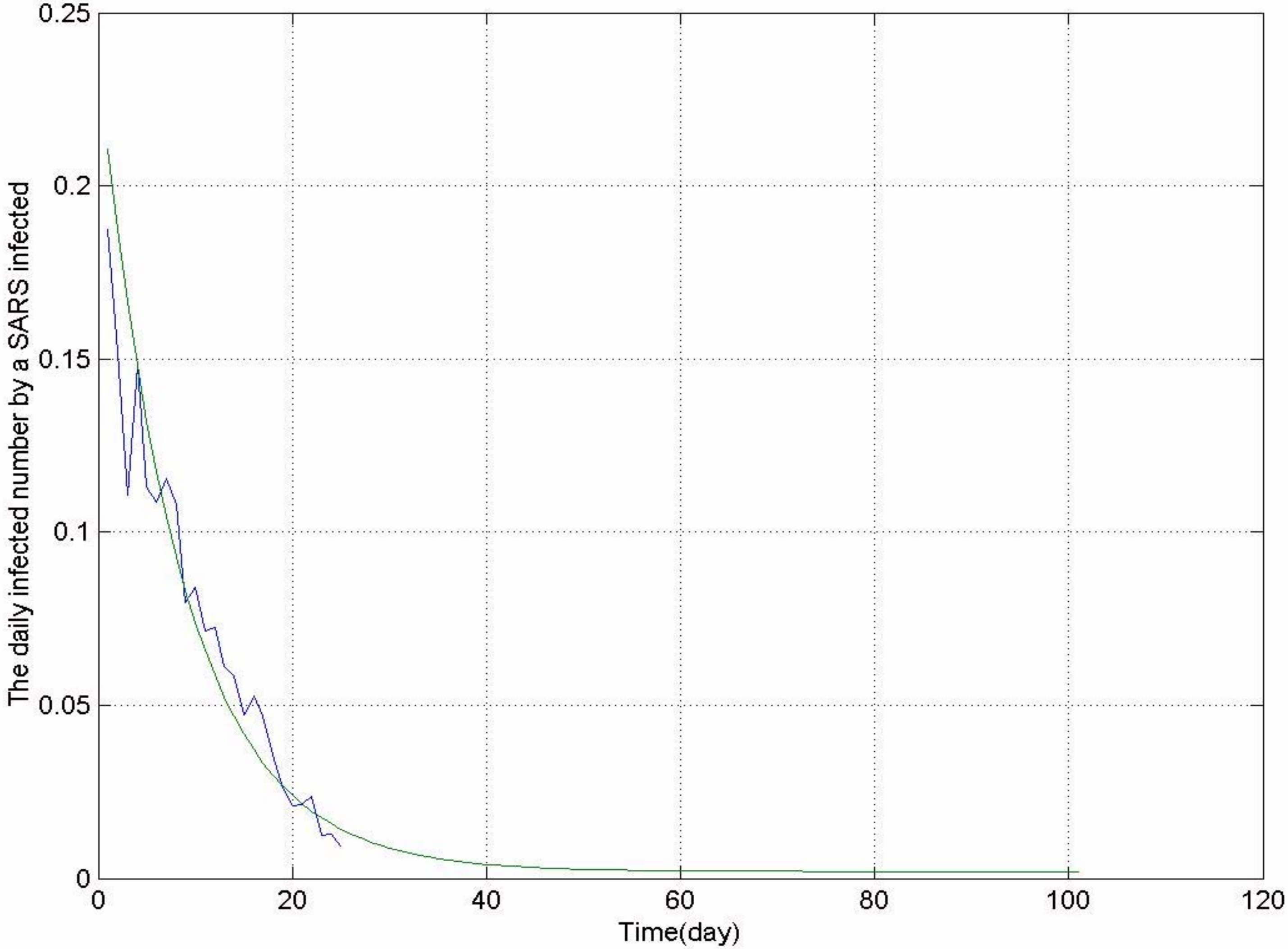
$$I(t+1)=I(t)+ r(t)I(t)$$

只要知道开始时SARS的感染人数和函数b(t)，就可以利用该模型进行预测。

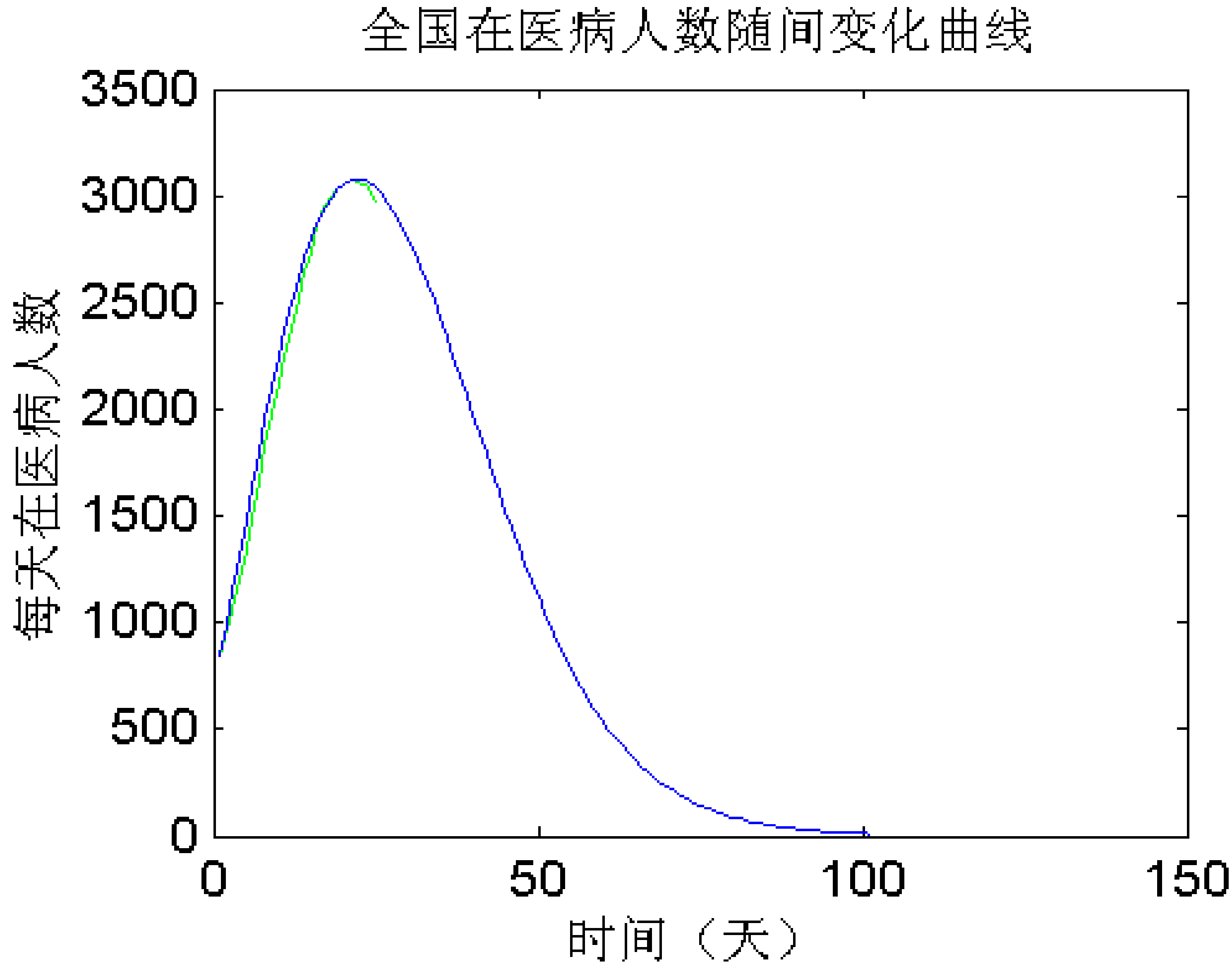
r(t)的估计

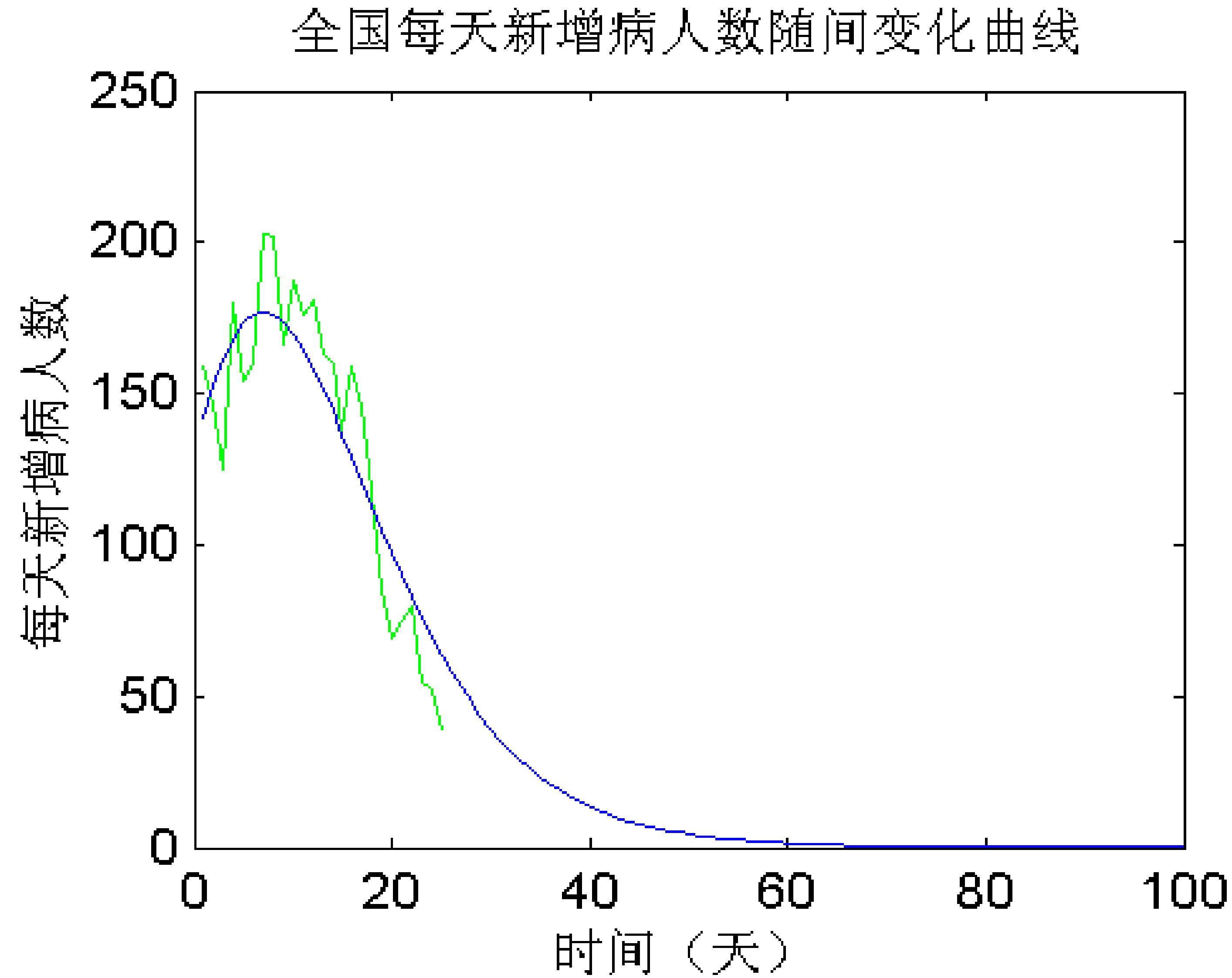
$$r(t)=[I(t+1)-I(t)]/I(t)$$

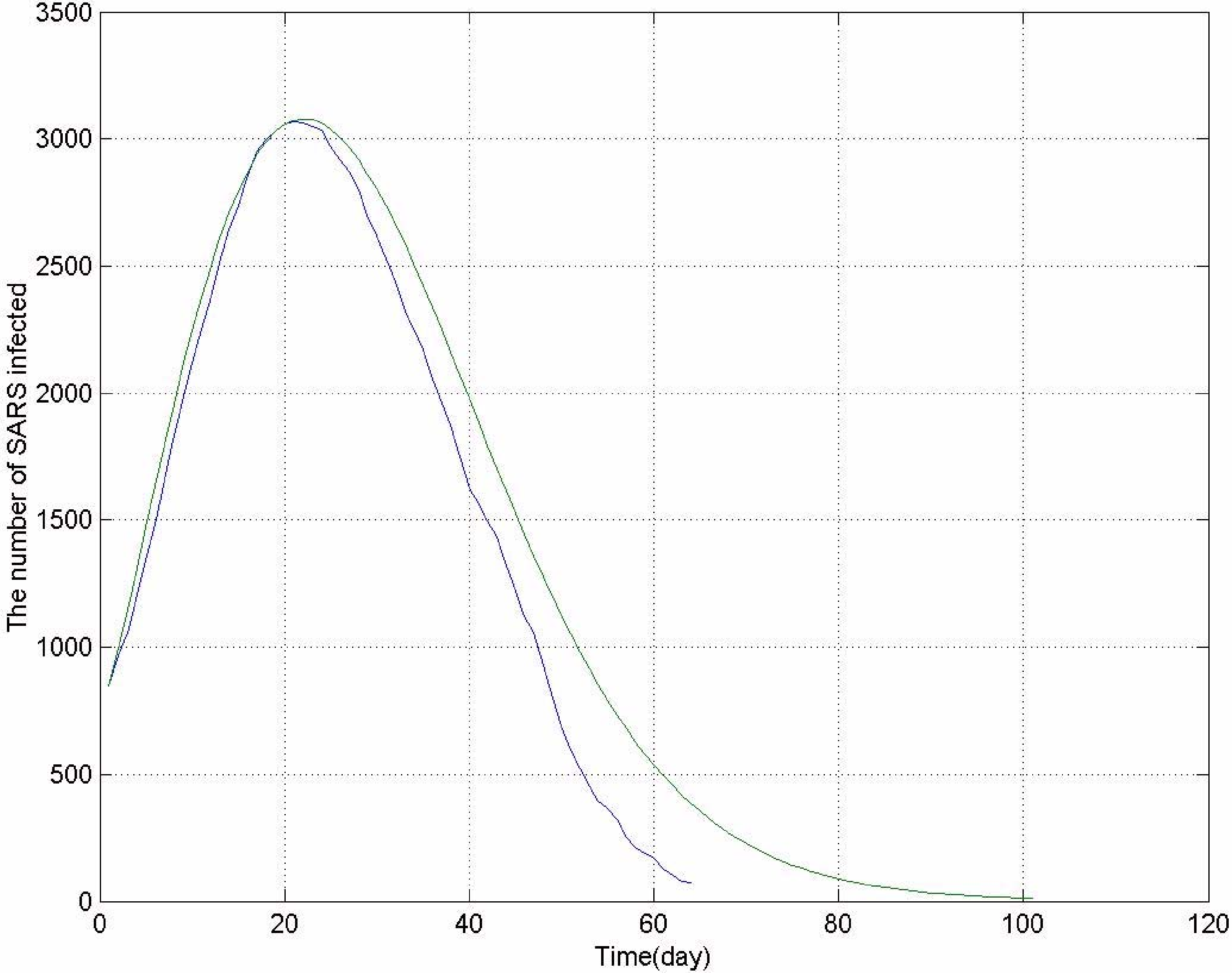
利用实际数据计算，再进行曲线拟合



0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
20
40
60
80
100
120
Time(day)
The daily infected number by a SARS infected


全国在医病人数随间变化曲线
每天在医病人数
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0
50
100
150
时间（天）


全国每天新增病人数随间变化曲线
每天新增病人数
时间（天）
250
200
150
100
50
0
0
20
40
60
80
100


3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
The number of SARS infected
0
20
40
60
80
100
120
Time(day)

SARS传播过程的成功预测

建立了SARS在我国的传播模型，进行了理论研究并研制了预测与控制分析软件，于2003年5月21日向新闻媒体发布了我们的研究结果，预测按世界卫生组织(WHO)的标准，我国将于2003年6月下旬解除旅游警告。届时全国感染者数量累计6000人左右。与后来的实际情况吻合良好。我们还对不同隔离强度的影响作了具体研究。建模思路与确定参数的反推法为今后的研究提供了新思路。