第5章 微积分的应用

- 雨中行走问题
- 新产品销售量
- 水的流出问题
- 追线问题
- 最速降线问题
- 最短路径问题
- 体内药物浓度的变化

1　雨中行走问题

人们外出行走，途中遇雨，未带雨伞势必淋雨，自然就会想到，走多快才会少淋雨呢？一个简单的情形是只考虑人在雨中沿直线从一处向另一处进行时，雨的速度（大小和方向）已知，问行人走的速度多大才能使淋雨量最少？

参与这问题的因素：

1. 降雨的大小；
2. 风（降雨）的方向；
3. 路程的远近和人跑的快慢

[模型的假设]

1. 设雨滴下落的速度为 r （米/秒），降水强度（单位时间平面上的降水厚度）为 I（厘米/时)，且 r ，I 为常量.

2. 设雨中行走的速度为v（米/秒），（固定不变）. 雨中行走的距离为D（米）.

3. 设降雨的角度（雨滴下落的反方向与人前进的方向之间的夹角）为θ（固定不变）.

4. 视人体为一个长方体，其身高为 h（米），身宽为 w（米），厚度为d（米）.

[模型的建立]

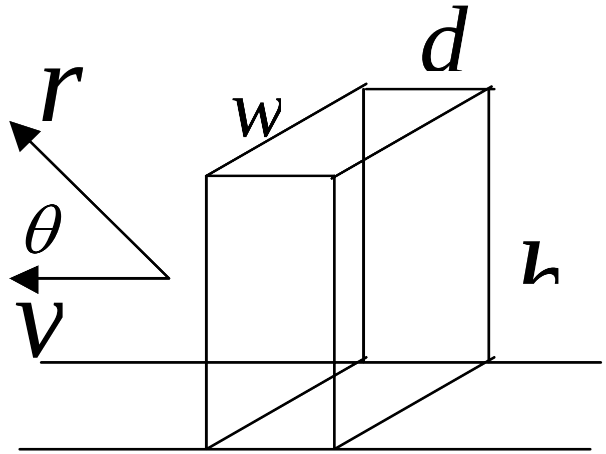
降雨强度系数 $p=\frac{I}{r}$，$p\le 1, p=1$ 时意味着大雨倾盆.

当雨水是迎面而来落下时, 被淋湿的部分将仅仅是人体的顶部和前方.

令 C_1, C_2 分别是人体的顶部和前部的雨水量.

考虑顶部的雨水量 C_1：

顶部面积 $S_1 = wd$.



雨滴垂直速度的分量 $r\sin\theta$.

则在时间 $t=\frac{D}{v}$ 内淋在顶部的雨 $C_1=(D/v)wd(pr\sin\theta)$

再考虑人体前部的雨水量：

前部面积 $S_2 = wh$，雨速分量为 $r\cos\theta + v$，

则 $t = \dfrac{D}{v}$ 内的 C_2 为 $C_2 = \dfrac{D}{v}\left[wph(r\cos\theta + v)\right]$

于是在整个行程中被淋到的雨水总量为

$$C = C_1 + C_2 = \frac{pwD}{v}\left[dr\sin\theta + h(r\cos\theta + v)\right] \cdots\cdots (1)$$

［数据假设及模型求解］

设 r=4 米/秒，I =2 厘米/小时，可得

$p = 1.39\times 10^{-6}$，$D = 1000$米，$h = 1.50$米，

$w = 0.50$米，$d = 0.20$米.

$$C = \frac{6.95\times 10^{-4}}{v}(0.8\sin\theta + 6\cos\theta + 1.5v) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

1. 当$0^0<\theta<90^0$时, $\sin\theta,\cos\theta>0$, C 是v的减函数.

人将以最快的速度跑, 淋雨量最小, 取$v=6$米/秒.

当$\theta=60^0$时, $C=14.7\times10^{-4}$米^3 $=1.47$升

2. 当$\theta=90^0$时, $C=\dfrac{6.95\times10^{-4}}{v}\left(0.8\sin 90^0+1.5v\right)$

$$=6.95\times10^{-4}\left(1.5+0.8/v\right)$$

取$v=6$米/秒, $C=11.3\times10^{-4}$米^3 $=1.13$升

3. 当$90^0<\theta<180^0$时, 令$\theta=90^0+\alpha$则$0<\alpha<90^0$,

此时$C=pwD\left[h+(dr\cos\alpha-hr\sin\alpha)/v\right]$

或 $C=6.95\times10^{-4}[1.5+\left(0.8\cos\alpha-6\sin\alpha\right)/v]$

这种情形，雨滴将从后面向人体落下，但当α充分大时，C 可能为负值，这显然不合理，这主要是我们开始讨论时，假定了人体是一面淋雨，当$0^0 < \theta < 90^0$时，这是对的；但当$90^0 < \theta < 180^0$，而$v > r\sin\alpha$时，人体将赶上前面的雨.

① 当$v < r\sin\alpha$时，淋在背上的雨量为$pwD[rh\sin\alpha - vh]/v$，雨水总量$C = pwD[dr\cos\alpha + h(r\sin\alpha - v)]/v$.

② 当$v = r\sin\alpha$时，此时$C_2 = 0$.

雨水总量$C = \frac{pwDdr}{v}\cos\alpha$，如$\alpha = 30^0$，$C = 0.24$升

这表明人体仅仅被头顶部位的雨水淋湿. 实际上这意味着人体刚好跟着雨滴向前走，身体前后将不被淋雨.

② 当 $v > r\sin\alpha$ 时, 即人体行走的快于雨滴的水平运动速度 $r\sin\alpha$. 此时将不断地赶上雨滴. 雨水将淋胸前（身后没有）, 胸前淋雨量 $C_2 = pwDh(v - r\sin\alpha)/v$.

于是 $C = pwD[rd\cos\alpha + h(v - r\sin\alpha)]/v$

例如当 $v = 6$ 米/秒 且 $\alpha = 30^0$ 时, $C = 0.77$升.

［结论］

1. 如果雨是迎着你前进的方向向你落下 $(\theta \le 90^0)$, 此时策略很简单, 你应以最大速度向前跑.

2. 如果雨是从你的后落下，这时你应该控制你在雨中的行走速度，让它刚好等于落雨速度的水平分量.

解法二：

选择坐标系. 用 $(v,0,0)$ 表示人行走速度, (r_x,r_y,r_z) 表示雨速, D 为行走距离, 则行走时间为 D/v

$$\left(|v-r_x|,|0-r_y|,|0-r_z|\right)\cdot(1,\lambda,\mu)=|v-r_x|+\lambda|r_y|+\mu|r_z|$$

于是单位时间淋雨量正比于

总淋雨量正比于 $R(v)=\frac{D}{v}\left(|v-r_x|+a\right)$

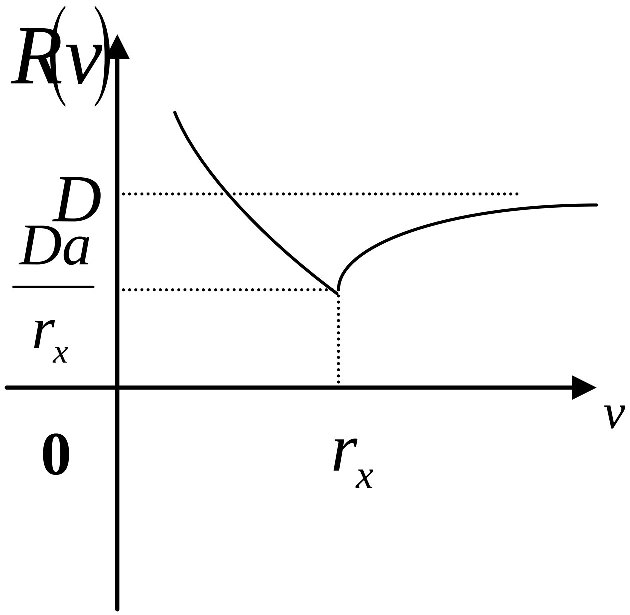
其中 $a=\lambda|r_y|+\mu|r_z|(>0)$

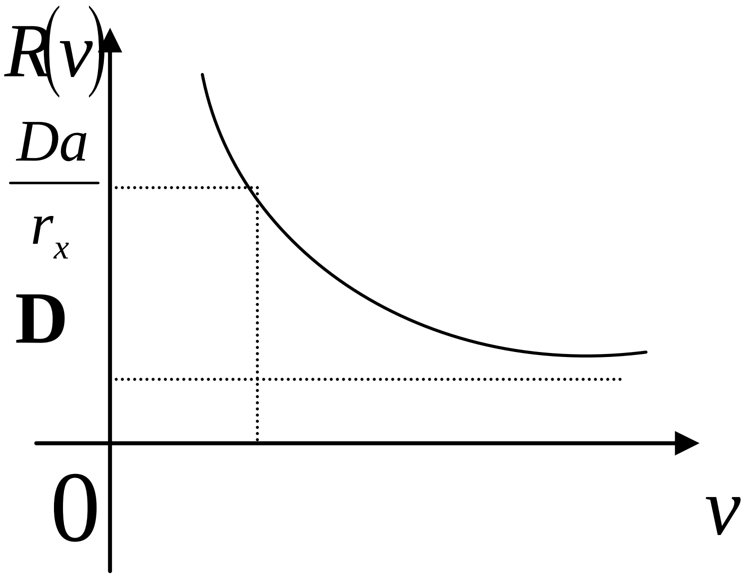
于是雨中行走问题抽象成如下数学问题：

已知 D、r_x、a，求 v 为何值时 $R(v)$ 最小？

1. $r_x>0$ 时，

$$R(v)=\begin{cases}\frac{D}{v}(r_x-v+a)=\frac{D(r_x+a)}{v}-D, & v\le r_x\\ \frac{D}{v}(v-r_x+a)=\frac{D(a-r_x)}{v}+D, & v>r_x\end{cases}$$





$r_x > a$ 的情形（有最小值）

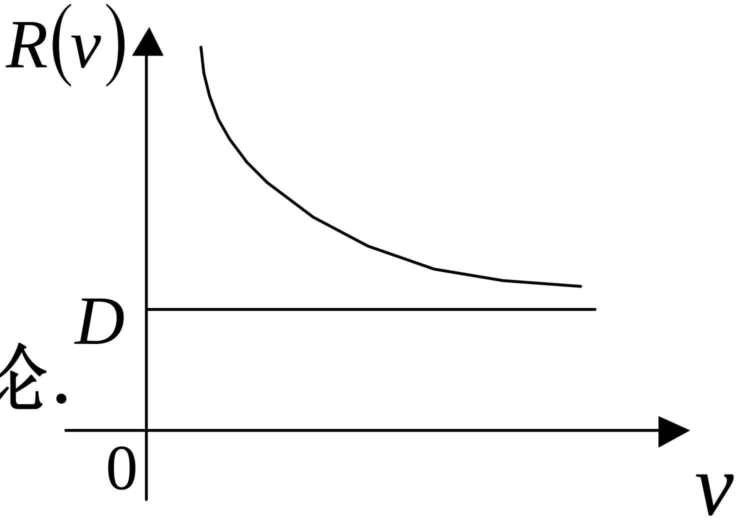
$r_x < a$ 的情形（无最小值）

当 $r_x > a$ 时，$v = r_x$ 才使 $R(v)$ 取最小值 $R_{\min} = Da/r_x$.

2. $r_x < 0$

$$R(v) = \frac{D}{v}\left(v + |r_x| + a\right) = \frac{D\left(a + |r_x|\right)}{v} + D$$

其图象为（如右图）



易知无最小值.

同样对 $r_x = 0$ 及 $r_x = a$ 的情形讨论.

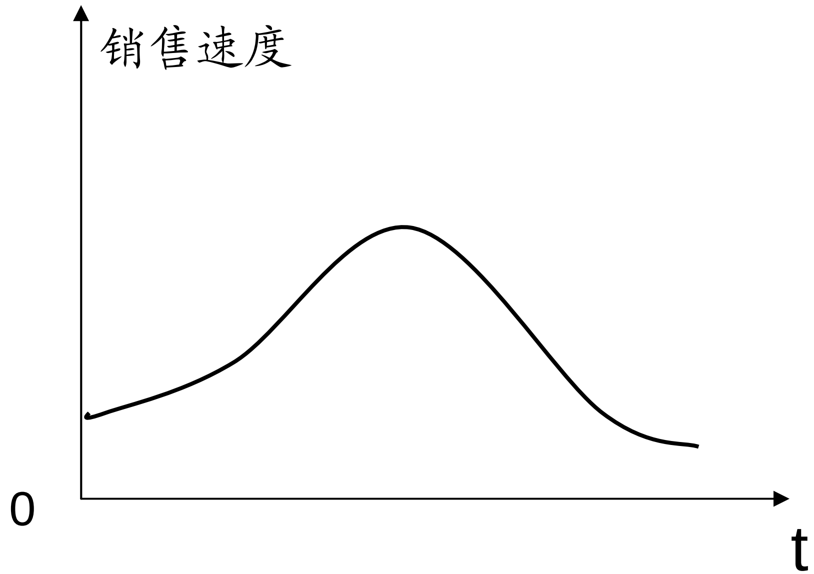
结论：仅当 $r_x > a > 0$ 时,

应取 $v = r_x$ 可使前后不淋雨.

其淋雨总量最小.

2 新产品销售量

一种耐用新产品进入市场后,一般会经过一销售量先不断增加,然后下降的过程(产品的生命周期-PLC).有一种PLC曲线为钟型, 试建立模型分析此现象.



问题分析

- 信息传播的途径:

  1) 厂家提供的广告 ---消费者以外的信息

  2) 一部分人购买后对产品的评价使周围人得到的信息

  ---消费者内部的信息

- 对于耐用产品, 一般不会重复购买. 因此, 产品的累积销售量可认为是购买者人数

建模与求解

K --- 潜在的消费者总数

n(t) --- t 时刻购买了该产品的人数

则在 $[t, t+\Delta t]$ 中, 购买者增量

$$\Delta n = \begin{cases} \Delta n_1 & \text{来自消费者外部的产品信息导致的购买者增量} \\ \Delta n_2 & \text{-------- 内部 --- - --------} \end{cases}$$

- 因外部信息导致的购买者增量应与未购买者人数成正比

$$\Delta n_1 = a(K - n(t))\Delta t$$

- 因内部信息导致的购买者增量应与已购买人数、未购买者人数之积成正比

$$\Delta n_2 = bn(t)(K - n(t))\Delta t$$

则

$$\Delta n(t) = a(K - n(t))\Delta t + bn(t)(K - n(t))\Delta t$$

两端同除以 Δt，并令得 $\Delta t \to 0$

$$\boxed{\frac{dn}{dt}=\left(K-n(t)\right)\left(a+bn(t)\right)} \qquad n(0)=0$$

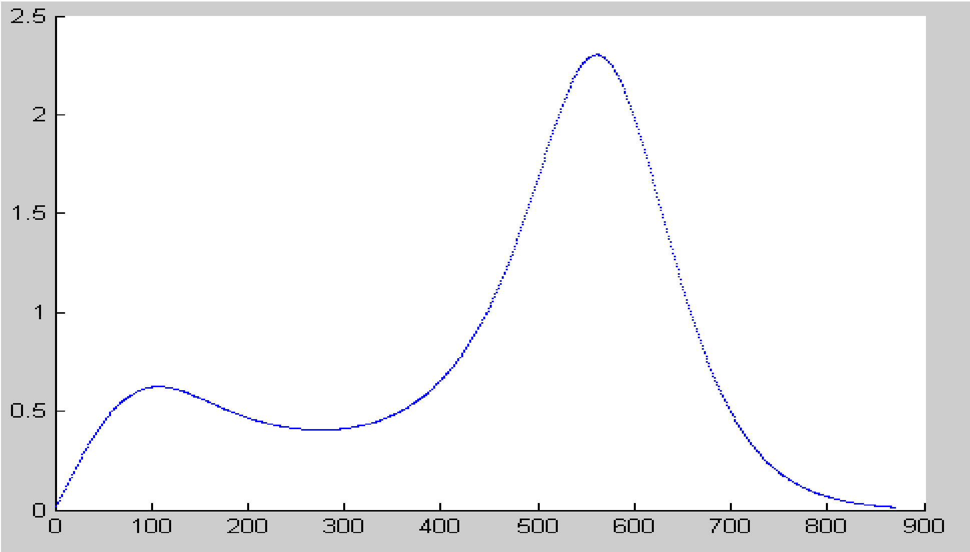
解方程得

$$n(t)=K\frac{1-e^{-(a+bK)t}}{1+\dfrac{bK}{a}e^{-(a+bK)t}}$$

注：其导函数曲线即为PLC曲线，它的图形为钟型

模型细化

在实际的许多新产品销售高峰，有一段小的销售高峰，然后有一段时间的持平或销售量的下降，而后再次进入销售上升阶段，达到高峰，这时PLC曲线显双峰，试研究此现象。



问题分析

- 信息传播的途径:

  1) 厂家提供的广告 ---消费者以外的信息

  2) 一部分人购买后对产品的评价使周围人得到的信息

  ---消费者内部的信息

- 对于耐用产品,一般不会重复购买. 因此,**产品的累积销售量可认为是购买者人数**

- 常数 $a=f(t)$，事实上可能更接近S型模型曲线,用一次曲线 $f(t)=a*t$ 来代替。K1为可以接触到外部消息的消费者总数

因外部信息导致的购买者增量应与未购买者人数成正比

$$dn_1 = at(K_1 - n(t))dt$$

- 认为人们多会在使用了一段时间后才会去做宣传，即内部消息的传播有延时性

dn2=b*n(t − t0)*(K-n(t))*dt

- 考虑到实际情况，有一部分人有可能即听到了外部消息，同时也听到了内部消息

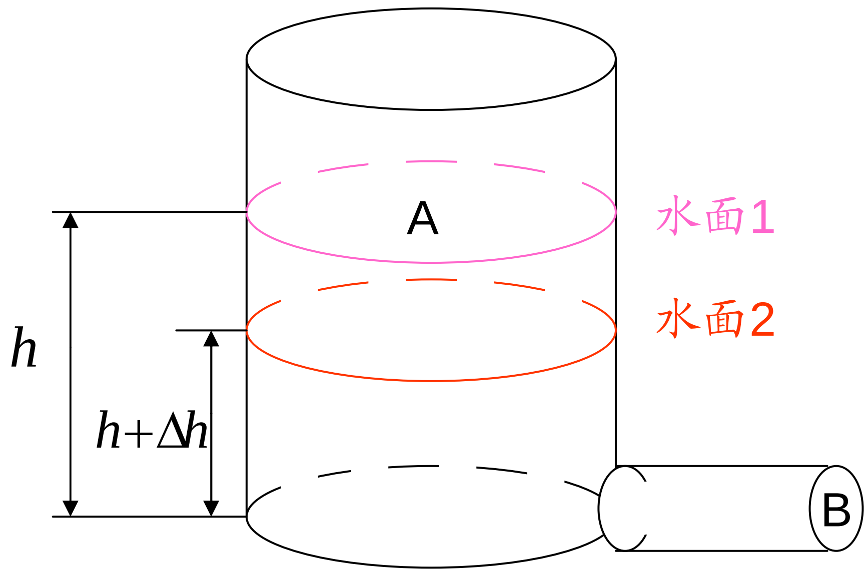
dn3=a*t*b*n(t-t0)*(k-n(t))*(k1-n(t))*dt

改进了的方程为

$$\frac{dn}{dt} = at(K_1 - n(t)) + bn(t - t_0)(K - n(t)) - atbn(t - t_0)(K_1 - n(t)(K - n(t))$$

3　水的流出问题

一横截面积为 A，高为 H 的水池内盛满了水，有池底一横截面积为 B 的小孔放水。设水从小孔流出的速度为 $v=\sqrt{2gh}$ ，求在任意时刻的水面高度和将水放空所需的时间



问题分析

- 从水面1将到水面2所失去的水量等于从小孔流出的水量
- 容器内水的体积为零 即为容器内水的高度为零

建模与求解

1）从水面1将到水面2所失去的体积为 $A\Delta h$

--- 在时间内 Δt，实际损失的体积是 $-A\Delta h$

2）在同样时间内，水从小孔流出的体积为 $B\Delta S$

--- ΔS 是水在 Δt 时间内从小孔流出保持水平前进时所经过的距离

则

$$-A\Delta h = B\Delta S$$

两端同除以 Δt， 并令 $\Delta t \to 0$ 取极限得

$$-A\frac{dh}{dt} = B\frac{ds}{dt}$$

由于 $\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gh}$

可得一阶方程: $$\boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{B}{A}\sqrt{2gh}} \quad h(0) = H$$

解为 $$\boxed{\sqrt{h} = \sqrt{H} - \frac{B}{2A}\sqrt{2g}\,t}$$

下面求将水放空的时间 t*

令h=0 代入上式得

$$t^* = \frac{A}{B}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

例如, 设 A=0.54 m^2, B=0.001 m^2, H=4.9m, g=9.8m/s^2.
则将水放空的时间为

$$t^* = \frac{0.54}{0.001}\times 1 = 540(s) = 9(\min)$$

4 追线问题

我缉私舰雷达发现距 c km 处有一艘走私船正以匀速a 沿直线行驶,缉私舰立即以最大速度 b 追赶。若用雷达进行跟踪, 保持船的瞬时速度方向始终指向走私船，试求缉私舰追逐路线和追上的时间.

问题分析

- 缉私舰、走私船的大小比他们运动的范围小得多，可视为两个质点的运动 — 模型假设

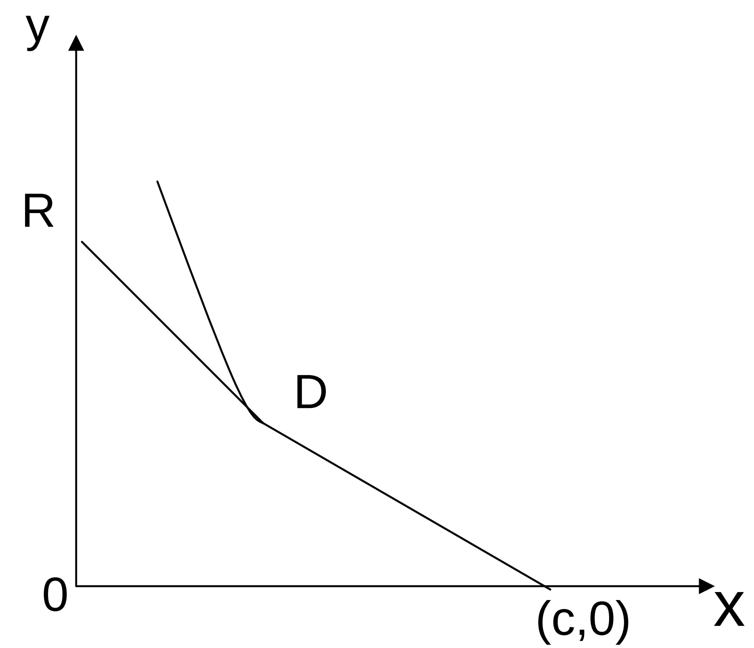
建模与求解

- 选取坐标系：选取走私船逃跑的方向为y 轴，缉私舰在（c,0）位置时发现走私船在（0,0）处。

- 设缉私舰发现走私船时算起的 t 时刻，缉私舰到D=(x,y)，走私船到（0,at）

由直线与路线相切得:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-at}{x} \qquad (1)$$



为消去t , 先把 (1) 对 x 微分

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=-a\frac{dt}{dx} \qquad (2)$$

由 $\frac{ds}{dt}=b$ 得, s 为缉私舰在 t 时刻的路程

$$\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{ds}\cdot\frac{ds}{dx}=-\frac{1}{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (3)$$

结合(2) (3) 得追线的微分方程

$$\begin{cases} x\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{a}{b}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}, \\ y(c)=0, y'(c)=0 \end{cases}$$

令 $\dfrac{dy}{dx}=p$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$，上式可化为

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{a}{b}\frac{dx}{x}, p(c)=0$$

积分得

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\ln\left(\frac{x}{c}\right)^k, k=\frac{a}{b}$$

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{c}\right)^{k}-\left(\frac{c}{x}\right)^{k}\right),\ y(c)=0 \qquad (4)$$

(1) 若 a<b (k<1), 积分(4)得

$$y=\frac{c}{2}\left(\frac{1}{1+k}\left(\frac{x}{c}\right)^{1+k}-\frac{1}{1-k}\left(\frac{x}{c}\right)^{1-k}\right)+\frac{ck}{1-k^2}$$

特别地

$$y(0)=\frac{ck}{1-k^2}$$ 走私船被缉私舰捕捉前所跑过的距离

$$t=\frac{y}{a}=\frac{bc}{b^2-a^2}$$ 所用的时间

(2) 若 a=b (k=1), 积分(4)得

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-c^2}{2c}-c\ln\frac{x}{c}\right)$$

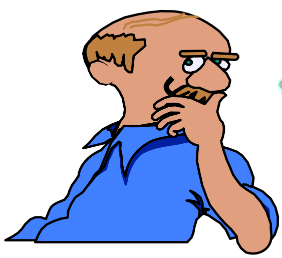
显然 $x\neq 0$ ， 即缉私舰不可能追上走私船

(3) 若 a>b (k>1)

显然缉私舰不可能追上走私船

5　最速降线问题

确定一个连接定点A、 B的曲线,使质点在这曲线上用最短的时间由A滑至B点 (忽略摩擦力和阻力)



是连接两点的直线吗还是其它曲线呢？

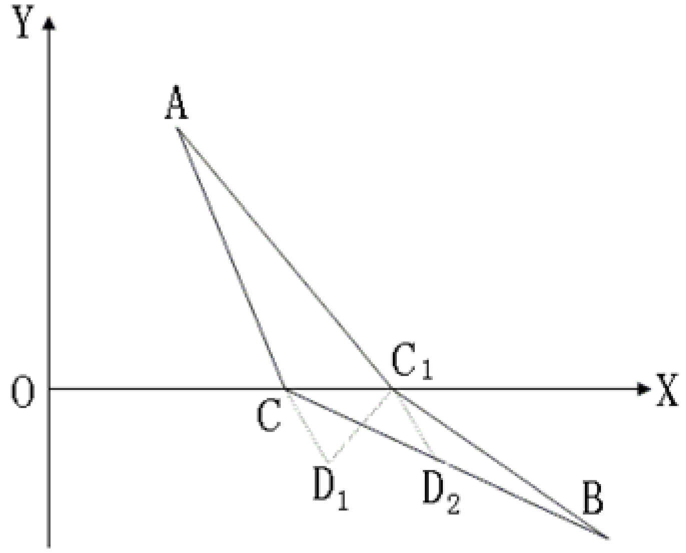
质点花时间最短的运动轨迹

例　设有一质点从点A (x_1,y_1) 运动到点 B (x_2,y_2) $(y_1>0,y_2<0)$，该质点的运动速度在上半平面为常数v1，下半平面为常数v2．此质点应沿什么路径运动才能使花费时间最短?

设AC、 BC与y 轴的夹角分别为 i*1* ，i*2* ，我们来证明当

$$\frac{\sin i_1}{v_1}=\frac{\sin i_2}{v_2}$$

所花费的时间最短。



证明　　设折点C的坐标为 (x,0)，则质点经ACB所花时间

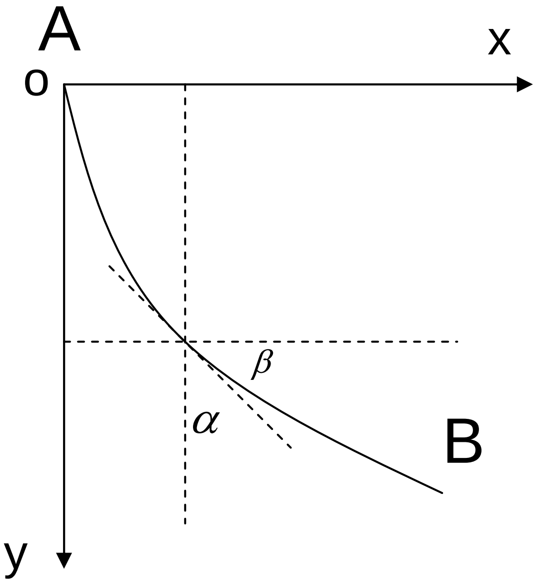
$$t = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2}}{v_2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{(x-x_1)\Big/\sqrt{(x-x_1)^2 - y_1^2}}{v_1} + \frac{(x-x_2)\Big/\sqrt{(x-x_2)^2 - y_2^2}}{v_2} = \frac{\sin i_1}{v_1} - \frac{\sin i_2}{v_2}$$

所以 $\frac{dt}{dx} = 0$ 等价于 $\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$

光的折射定律：当光从一种介质进入另一种介质时入射角的正弦与折射角的正弦之比等于光在两种介质中的速度比.

建模与求解—方法1



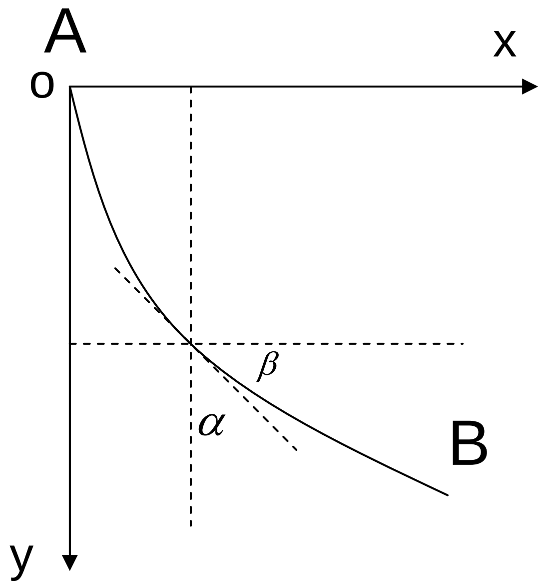
- 选取坐标系,设想质点(像光线)能选择从滑行到的路径,使所需时间尽可能短.
- 按照折射定理

$$\frac{\sin\alpha}{v} = c$$

- 由于质点在下降时所增加的动能应等于所减少的势能，故质点在点D(*x*,*y*) 处的速度*v* 满足

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{2gy}$$

建模与求解



由几何关系得

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

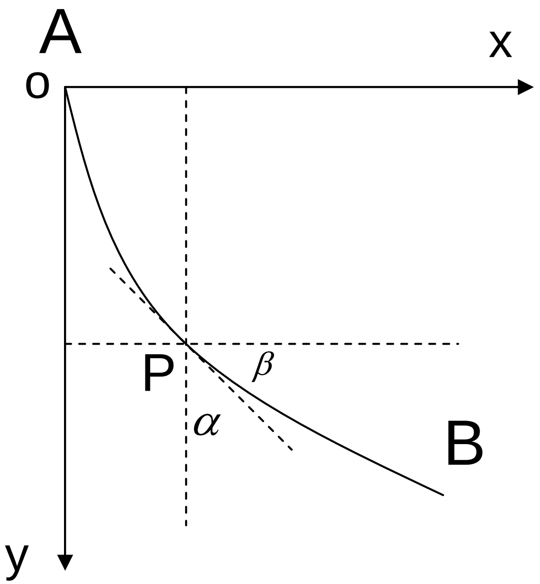
由此得微分方程

$$\begin{cases} y\left(1+(y')^2\right) = c \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

解为

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

建模与求解—方法2



s: 曲线从 A点到 P(x, y) 的弧长

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

由弧微分 $ds = \sqrt{1+(y')^2}dx$ ，得

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{\sqrt{2gy}}$$

需取极小值的积分是

$$t(y(x)) = \int_0^x \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

泛函的极值问题

令 $$f(y,y')=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$$

由变分理论知 $t\big(y(x)\big)=\int_0^x f(y,y')dx$ 的解所满足的欧拉方程为

$$\frac{\partial f}{\partial y}y'-f=c_1$$

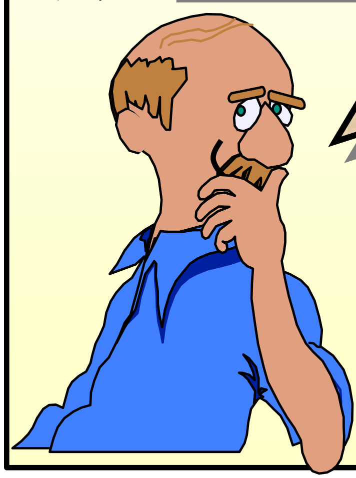
可化为

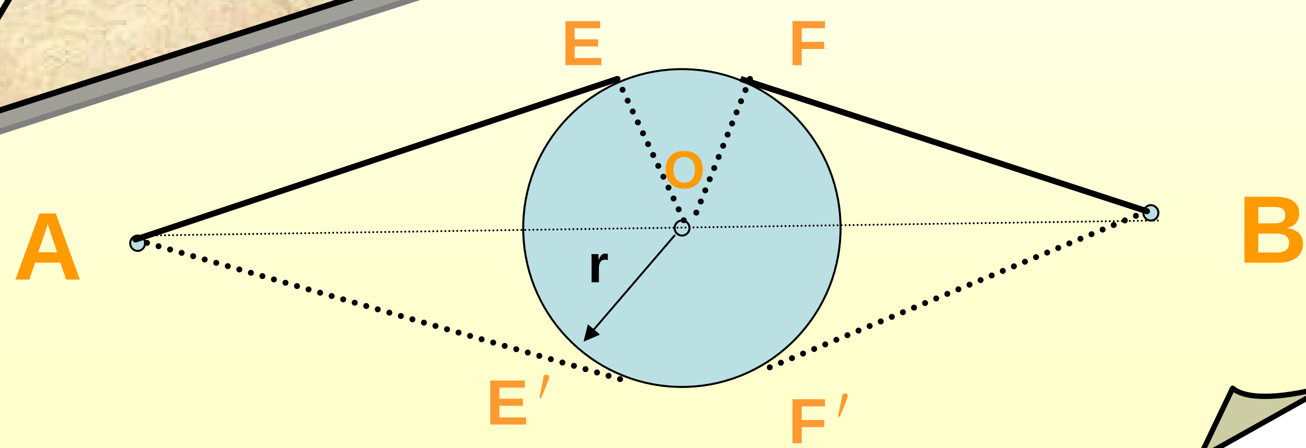
$$y\left(1+(y')^2\right)=c$$

6 最短路径问题

设有
B 位
现拟
制下

将湖想象成凸出地面的木桩，在AB间拉一根软线，当线被拉紧时将得到最短路径。根据这样的想象，猜测可以如下得到最短路径：过A作圆的切线切圆于E，过B作圆的切线切圆 于F。最短路径为由线 段AE、弧EF和线段FB连接而成的连续曲线（根据对称性，AE′，弧E′F′，F′B连接而成的连续曲线也是）。

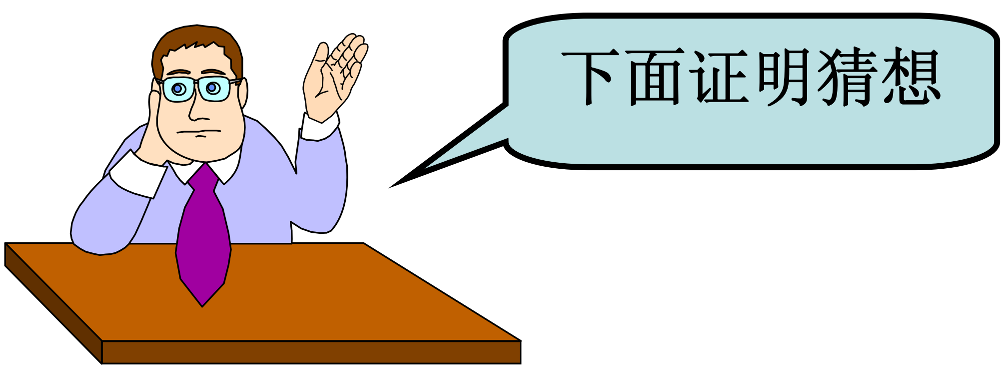


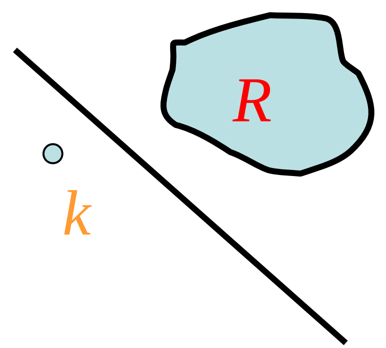


以上只是一种猜测，现在来证明这一猜测是正确的。为此，先介绍一下凸集与凸集的性质。

定义（凸集）称集合 R为凸集，若x_1、$x_2 \in R$及 $\lambda \in [0, 1]$，总有 $\lambda x_1 +（1+ \lambda）x_2 \in R$。即若$x_1$、$x_2 \in R$，则$x_1$、$x_2$的连线必整个地落 在$R$中。

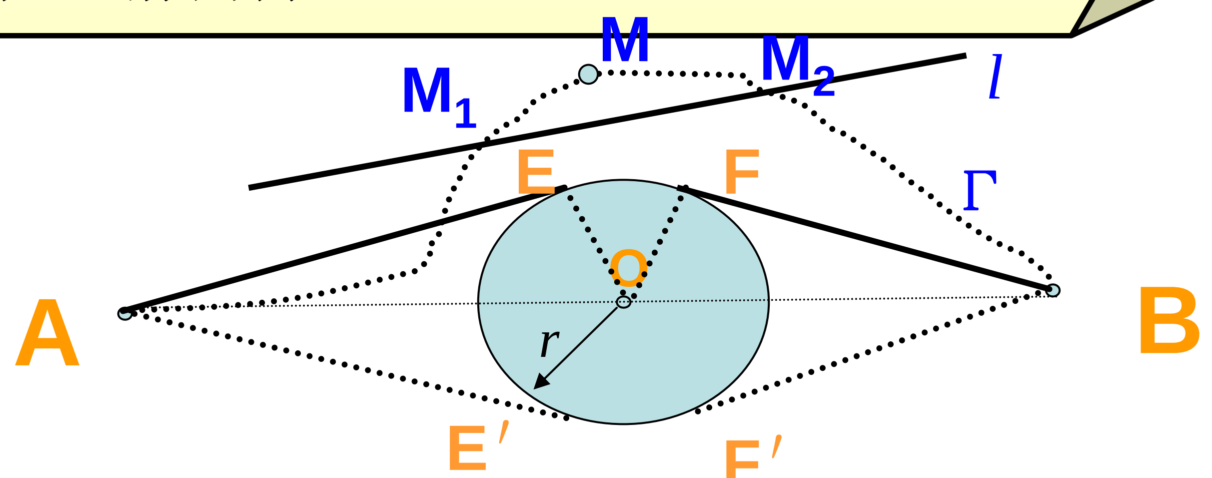
定理（分离定理）对平面中的凸 集R与R外的一点K，存在直线 l , l 分离R与K，即R与K分别位于 l 的两侧（注：对一般的凸 集R与R外的一点K，则存在超平面分 离R与K），见图。





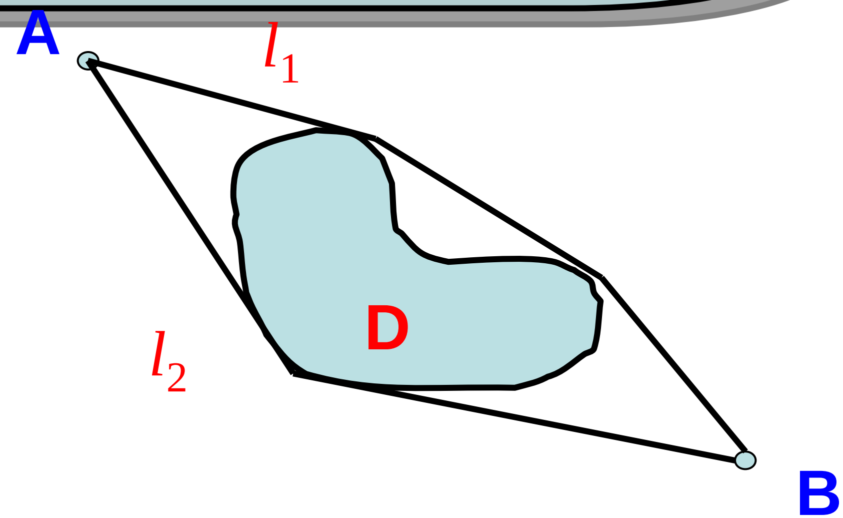
猜测证明如下：

（方法一）显然， 由AE、EF、FB及AE′，E′F′，F′B围成的区域 R是一凸集。利用分离定理易证最短径不可能经过R外的点，若不然，设 Γ 为最短路径， Γ 过R外的一点M，则必存在直 线l分离M与R， 由于路径Γ是连续曲线， 由A沿 Γ 到M， 必交l于M_1， 由M沿 Γ 到B又必交l于M_2。这样， 直线 段M_1M_2的长度必小于路 径M_1MM_2的长度， 与 Γ 是A到B的最短路径矛盾， 至此， 我们已证明最短路径必在凸集R内。不妨设路径经湖的上方到达B点， 则弧EF必在路径F上， 又直线段AE是由A至E的最短路径， 直线FB是由F到B的最短路径， 猜测得证。



还可用微积分方法求弧长，根据计算证明满足限止条件的其他连续曲线必具有更大的长度；此外，本猜测也可用平面几何知识加以证明等。

根据猜测不难看出， 例5中的条件可以大大放松，可以不必 设AB过圆心，甚至可不必设湖是圆形的。例如对 下图，我们可断定由A至B的最短路径必 为l_1与l_2之一，其证明也不难类似给出。



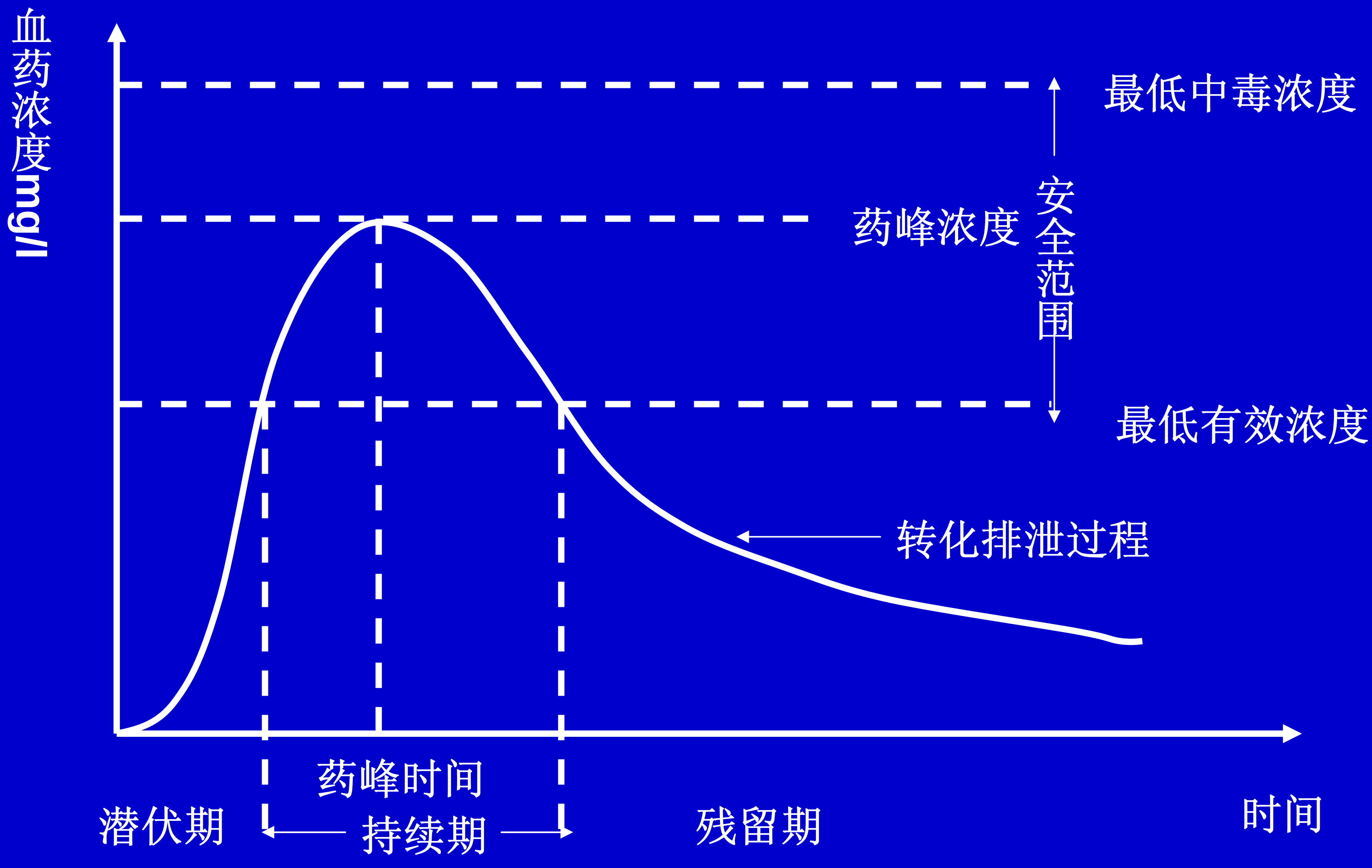
若可行区域的边界是光滑曲面。则最短路径必由下列弧组成，它们或者是空间中的自然最短曲线，或者是可行区域的边界弧。而且，组成最短路径的各段弧在连接点处必定相切。

到此为止，我们的研讨还只局限于平面之中，其实上述猜测可十分自然地推广到一般空间中去。**1973**年，**J.W.Craggs**证明了以上结果：

7　体内药物浓度的变化

医生给病人开处方是必须注意两点：服药的剂量和服药的时间间隔。超剂量的药物回对患者产生严重不良后果，甚至死亡；剂量不足，则不能达到治疗的效果。

已知患者服药后，随时间推移，药物在体内逐渐被吸收，发生化学反应，即体内药物浓度逐渐降低。设药物浓度的降低的速率与体内当时药物的浓度成正比。当服药量为A，服药时间间隔为T时，试分析体内药物的浓度随时间的变化规律。



一次给药的药时曲线

药物消除类型

1 一级动力学消除（恒比消除）：

单位时间内按血药浓度的恒比进行消除。消除速度与血药浓度成正比。

若以血药浓度（*C*）的对数与时间（*t*）作图，为一直线。

$$\frac{dC}{dt} = -K_e C \quad \Rightarrow \quad C_t = C_0 e^{-K_e t}$$

2. 零级动力学消除（恒量消除）：

单位时间内始终以一个恒定的数量进行消除。消除速度与血药浓度无关。

$$\frac{dC}{dt} = k \quad \Rightarrow \quad C_t = C_0 - kt$$

3．米氏消除动力学（混合型消除）：

是指包括零级和一级动力学消除在内的混合型消除方式。如当药物剂量急剧增加或患者有某些疾病，血浓达饱和时，消除方式则可从一级动力学消除转变为零级动力学消除。如乙醇血浓<0.05 mg/ml时，按一级动力学消除；但当>0.05 mg/ml时，则可转成按零级动力学消除。

设$x(t)$为 t 时刻体内药物的浓度，当一次服药量为 A 时，体内药物的浓度增加为 a.

从 $[t,\ t+\Delta t]$ 时间区间内体内药物浓度的变化为

$$x(t+\Delta t)-x(t)=-kx(t)\Delta t,\quad t\neq nT$$

一级消除

上式两边取极限， 并考虑服药的脉冲性得

$$\frac{dx}{dt}=-kx,\quad t\neq nT$$

$$x(nT)=a+x(nT^{-})$$

$$x(0)=a$$

在 $[nT,\ (n+1)T)$ 区间上求解方程

$$x(t)=x(nT)e^{-k(t-nT)},\quad t\in[nT,\ (n+1)T)$$

在 $0\le t<T$ 内， 方程的解为

$$x(t)=ae^{-kt},\quad 0\le t<T$$

在 $T\le t<2T$ 内， 方程的解为

$$x(t)=(a+ae^{-kT})e^{-k(t-T)},\quad T\le t<2T$$

在 $nT\le t<(n+1)T$ 内， 方程的解为

$$x(t)=(a+ae^{-kT}+ae^{-2kT}+\ldots+ae^{-nkT})e^{-k(t-nT)},$$

由于

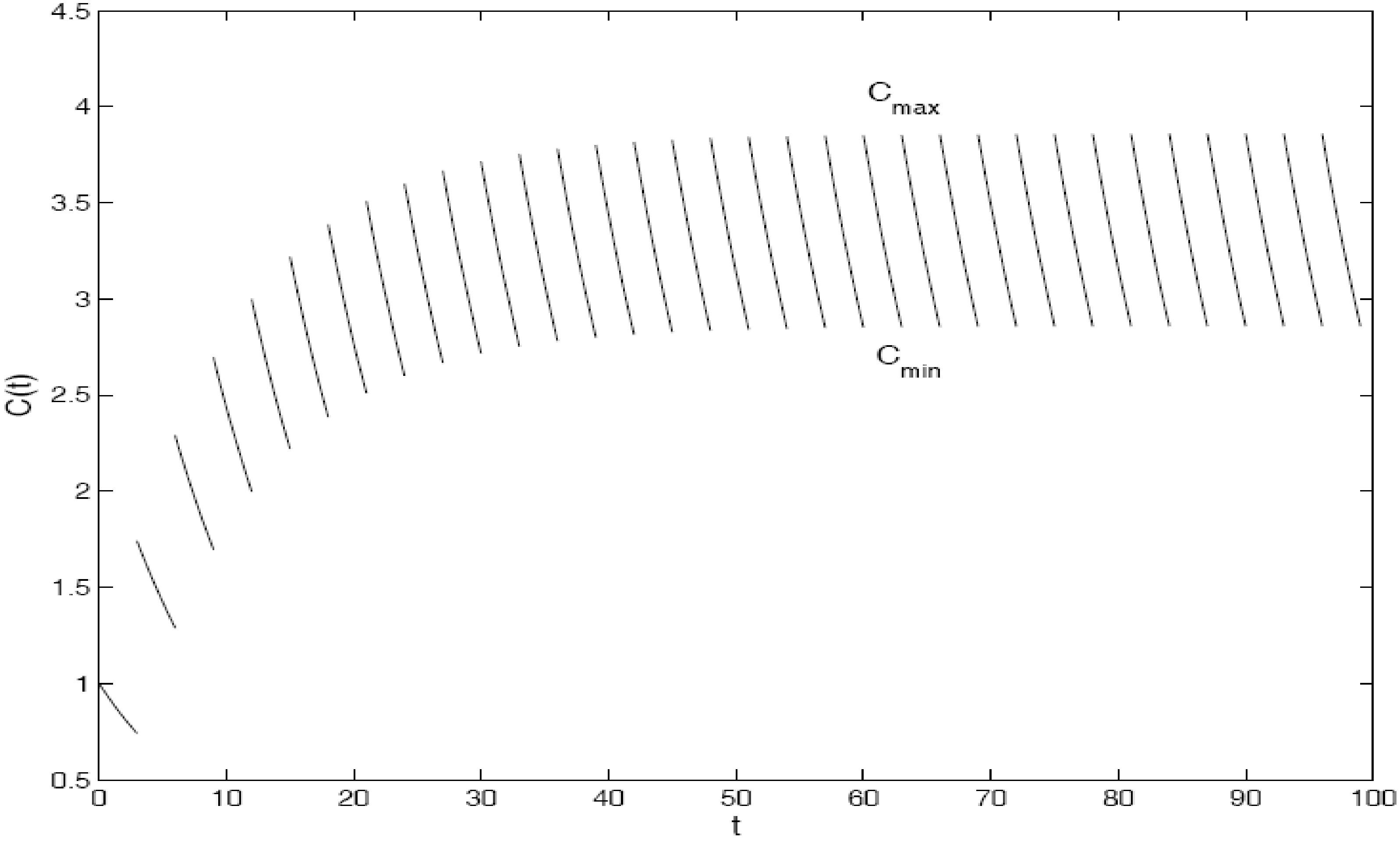
$$a+ae^{-kT}+ae^{-2kT}+\ldots+ae^{-nkT}=\frac{1-e^{-k(n+1)T}}{1-e^{-kT}}\to\frac{a}{1-e^{-kT}}$$

在 $nT \le t < (n+1)T$ 内， 方程的解为

$$x(t)\to\frac{a}{a-e^{-kT}}e^{-k(t-nT)},\quad nT\le t<(n+1)T$$

在等间隔服药的情形下（T一定），药物浓度稳定在一定的水平

方程的解为



Homework of Chapter 5

P108 问题 3 or 7

如果用 email 交, 请将文件名和文件的第一行均用

数学建模_班级_姓名_学号