工科数学分析基础

李换琴
西安交通大学理学院
hqlee@mail.xjtu.edu.cn

第五章　多元函数微分学及其应用

第六节 多元函数微分学在几何上的应用

6.1 空间曲线的切线和法平面

6.2 弧长

6.3 曲面的切平面和法线

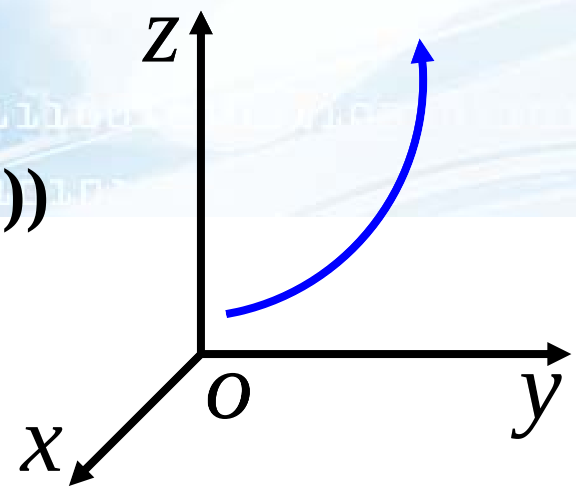
习题5.6

1(3),2,4(2)(3)(6)(8),5(3),

10(2),11,16,18,20

6.1 空间曲线的切线与法平面

1. 曲线的参数方程



设空间曲线Γ的方程为 $\vec{r}=(x(t),y(t),z(t))$

或 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

连续 曲线： $\vec{r}=\vec{r}(t)$（$\alpha\le t\le\beta$）在$[\alpha,\beta]$上连续.

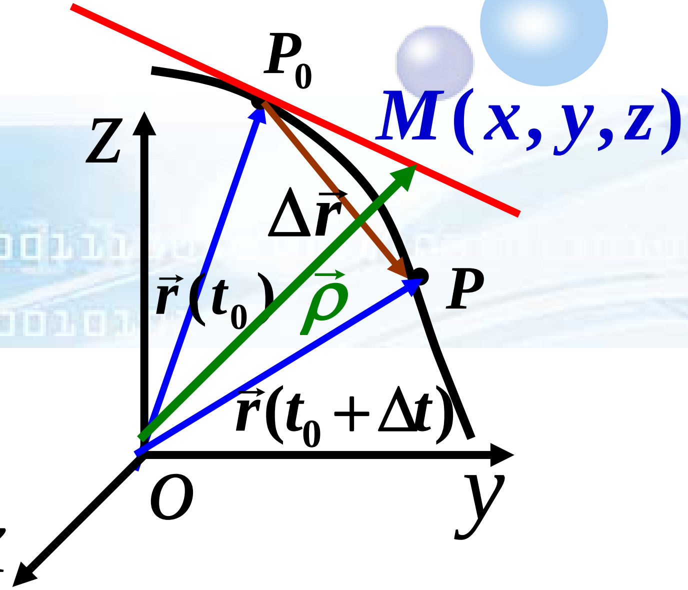
简单 曲线： Γ连续，且$\forall t_1,t_2\in(\alpha,\beta),t_1\ne t_2$有$\vec{r}(t_1)\ne\vec{r}(t_2)$

简单闭 曲线： Γ为简单曲线，且$\vec{r}(\alpha)=\vec{r}(\beta)$

规定 t增大的方向为 Γ的正向.

规定了正向的曲线称为有向曲线.

2.空间曲线的切线与法平面



设空间简单曲线的方程为

$\vec{r}=(x(t),y(t),z(t))$（$\alpha\le t\le\beta$）

$\vec{r}(t)$在$[\alpha，\beta]$上可导，且 $\dot{\vec{r}}(t)\neq 0$

P_0对应于 $t=t_0$; P对应于 $t=t_0+\Delta t$.

割线 P_0P 的一个方向向量为 $\overrightarrow{P_0P}=\Delta\vec{r}$，或者 $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

切向量： $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dot{\vec{r}}(t_0)$　方向与曲线的正向一致

切线： $\vec{\rho}=\vec{r}(t_0)+t\,\dot{\vec{r}}(t_0)$ 或 $\dfrac{x-x_0}{\dot{x}(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\dot{y}(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\dot{z}(t_0)}$.

法平面： $\dot{x}(t_0)(x-x_0)+\dot{y}(t_0)(y-y_0)+\dot{z}(t_0)(z-z_0)=0$

例1　求曲线$\Gamma: x=\int_0^t e^u\cos u\,du$，$y=2\sin t+\cos t$，$z=1+e^{3t}$在$t=0$处的切线和法平面方程.

解　当$t=0$时，$x=0, y=1, z=2$,

$$\dot{x}=e^t\cos t,\quad \dot{y}=2\cos t-\sin t,\quad \dot{z}=3e^{3t},$$

$$\Rightarrow\quad \dot{x}(0)=1,\quad \dot{y}(0)=2,\quad \dot{z}(0)=3,$$

切线方程　$\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$,

法平面方程　$x+2(y-1)+3(z-2)=0$,

即 $x+2y+3z-8=0$.

空间曲线 $\vec{r}=(x(t),y(t),z(t))$在点P_0的切向量 $\tau=\dot{\vec{r}}(t_0)$.

特殊地:

1. 若空间曲线方程为 $\begin{cases} y=\phi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$, $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} x=x \\ y=\phi(x), \\ z=\psi(x) \end{cases}$

在$M(x_0,y_0,z_0)$处,切向量 $\tau=(1,\phi'(x_0),\psi'(x_0))$

2. 若空间曲线方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时,Γ 可表示为$\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$

变为情形 1.

例 2 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6$， $x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

解 将所给方程的两边对 x 求导并移项，得

$$\begin{cases} y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-x \\ \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{z-x}{y-z}, & \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=0, \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{x-y}{y-z}, & \left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=-1, \end{array}$$

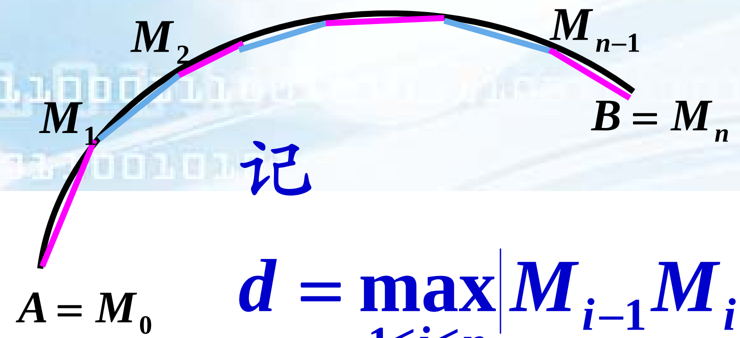
切向量 $\tau=(1,0,-1)$,

切线方程： $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$,

法平面方程为 $(x-1)+0\cdot(y+2)-(z-1)=0$， 即 $x-z=0$

6.2 弧长

1. 弧长的定义与计算



定义6.1 设简单曲线 Γ 的方程为

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t)) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

A、B是曲线弧上的两个端点，
在弧上插入分点

$$A = M_0, M_1, \cdots M_i, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$$

并依次连接相邻分点得一内接折线，

记

$$d = \max_{1\le i\le n} |M_{i-1}M_i|$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$$

则 $s = \lim\limits_{d\to 0} s_n$

当分点的数目无限增加且每个小弧段都缩向一点时，

此折线的长$\sum\limits_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$的极限存在，则称 Γ是可

求长的，此极限为曲线弧AB的弧长.

定理6.1（弧长的计算公式）

设在$[\alpha,\beta]$上$\dot{\vec{r}}(t)$连续且$\dot{\vec{r}}(t)\neq 0$,则曲线$\vec{r}=\vec{r}(t)$是可求长的曲线，且Γ的长度为

$$s=\int_\alpha^\beta\|\dot{\vec{r}}(t)\|dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt.$$ 证明略

例 3 求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$的全长.

解 星形线的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$

根据对称性，

$$s=4s_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t dt=6a.$$

特别的，

若曲线弧为 $y=f(x)\quad(a\le x\le b)$，其中 $f(x)$ 在$[a,b]$上有一阶连续导数

弧长 $$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx.$$

若曲线弧为 $x=f(y)\quad(c\le y\le d)$，其中 $f(y)$在$[c,d]$上有一阶连续导数

弧长 $$s=\int_c^d\sqrt{1+x'^2}dy.$$

若曲线弧为 $\rho=\rho(\theta)\quad(\alpha\le\theta\le\beta)$，其中 $\rho(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上有一阶连续导数

弧长 $$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta.$$

例 4 计算曲线 $y=\int_0^{\frac{x}{n}} n\sqrt{\sin\theta}\,d\theta$ 的弧长 $(0\le x\le n\pi)$.

解 $y' = n\sqrt{\sin\dfrac{x}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}=\sqrt{\sin\dfrac{x}{n}}$,

$$s=\int_0^{n\pi}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin\frac{x}{n}}\,dx$$

$$\underline{\underline{x=nt}}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin t}\cdot n\,dt$$

$$=n\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{t}{2}\right)^2+2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=n\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)dt=4n.$$

例5 求极坐标系下曲线$r=a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^3$的长.

$(a>0)$ $(0\le\theta\le 3\pi)$

解 $\because\ r'=3a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^2\cdot\cos\frac{\theta}{3}\cdot\frac{1}{3}=a\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^2\cdot\cos\frac{\theta}{3},$

$$\therefore\ s=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

$$=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^6+a^2\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^4\left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^2}d\theta$$

$$=a\int_0^{3\pi}\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^2d\theta=\frac{3}{2}\pi a.$$

2 弧微分与自然参数

设$s(t)$是由$\vec{r}(t_0)$到$\vec{r}(t)$的弧长,规定$\begin{cases} t>t_0\text{时}s(t)>0, \\ t<t_0\text{时}s(t)<0 \end{cases}$ 则

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\dot{\vec{r}}(t)\|dt=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt. \quad (\alpha\le t\le\beta)$$

$$\frac{ds(t)}{dt}=\|\dot{\vec{r}}(t)\|=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}$$

称 $ds(t)=\|\dot{\vec{r}}(t)\|dt=\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt$ 为弧长$s(t)$的微分

$\because s'(t)>0,\quad s(t)$存在反函数$t(s)$,

$\vec{r}=\vec{r}(t)=\vec{r}(t(s))$ s称为自然参数

$\because (ds)^2=\left(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)\right)(dt)^2$ 即 $\left\|\frac{d\vec{r}(s)}{ds}\right\|=1$

$$\therefore \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$$

$\therefore \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$为单位切向量

小结

设空间简单曲线的方程为

$$\vec{r}=(x(t),y(t),z(t)) \quad 或 \quad \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

切向量： $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}=\dot{\vec{r}}(t_0)$ 方向与曲线的正向一致

切线： $\vec{\rho}=\vec{r}(t_0)+t\dot{\vec{r}}(t_0)$ 或 $\frac{x-x_0}{\dot{x}(t_0)}=\frac{y-y_0}{\dot{y}(t_0)}=\frac{z-z_0}{\dot{z}(t_0)}$.

法平面： $\dot{x}(t_0)(x-x_0)+\dot{y}(t_0)(y-y_0)+\dot{z}(t_0)(z-z_0)=0$

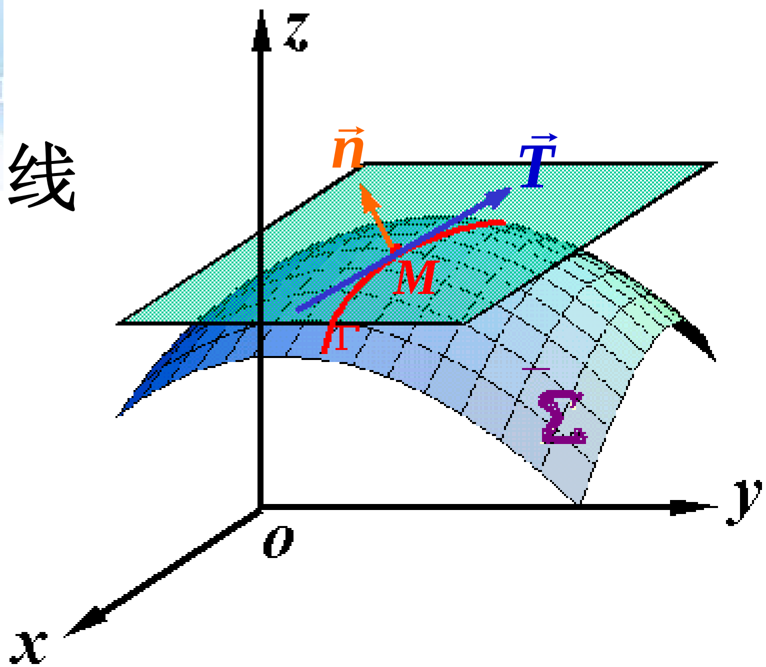
弧长 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\|\dot{\vec{r}}(t)\|dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}dt.$

6.3 曲面的切平面与法线

设曲面方程为 $F(x,y,z)=0$

在曲面上任取一条通过点M的曲线

$$\Gamma: \begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases} \quad \text{点}M\text{处}t=t_0$$



曲线在M处的切向量为

$$\vec{T}=\{\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\},$$

且有 $F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))=0$ 两边对 t 求导，得

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0$$

令 $\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

则 $\vec{n}\perp\vec{T}$， 由于曲线是曲面上通过 M 的任意一条曲线，它们在 M 的切线都与同一向量 $\vec{n}$ 垂直，故曲面上通过 M 的任一曲线在点 M 的切线都在同一平面上，这个平面称为曲面在点 M 的切平面.

切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

通过点$M(x_0,y_0,z_0)$而垂直于切平面的直线称为曲面在该点的法线.

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

法线的方向向量称为法向量. 曲面在M处的法向量为

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

特殊地：若空间曲面方程为 $z=f(x,y)$

令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ 或$F(x,y,z)=z-f(x,y)$

切平面：$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

例 6 求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3,$

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\Big|_{(1,2,0)}=(2y,2x,1-e^z)\Big|_{(1,2,0)}=(2,1,0)$$

切平面方程：$4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0,$

或 $2x+y-4=0,$

法线方程：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-0}{0}.$

例 7 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的切平面，使它平行于平面 $x+4y+6z=0$.

解 设 (x_0,y_0,z_0) 为曲面上的切点,

依题意，得

$$\begin{cases} \dfrac{2x_0}{1}=\dfrac{4y_0}{4}=\dfrac{6z_0}{6}, \\ x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21 \end{cases} \Rightarrow M_1(1,2,2), M_2(-1,-2,-2)$$

切平面方程为 $(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0$

或 $(x+1)+4(y+2)+6(z+2)=0$

例 8 证明曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为:

$$\begin{cases} F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0 \\ G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_z(P_0)(z-z_0)=0 \end{cases}$$

切向量:

$$\vec{T}=\big(F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0)\big)\times\big(G_x(P_0),G_y(P_0),G_z(P_0)\big)$$

$$\overset{\text{记为}}{=}(l,m,n)$$

切线方程: $$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

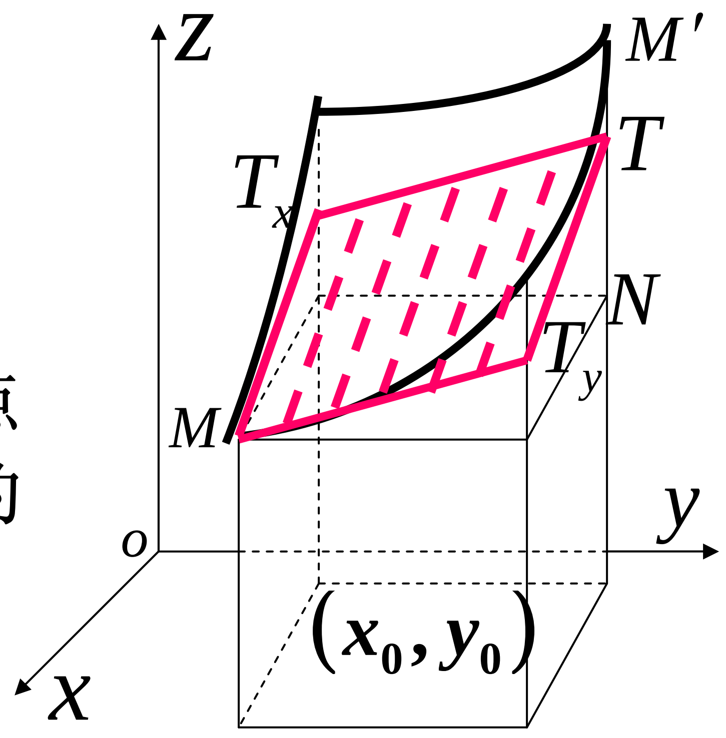
全微分的几何意义

函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的全微分

曲面$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)的切平面上方程为

$$\boxed{z-z_0}=\boxed{f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

切平面上点的竖坐标的增量



$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)的全微分，表示曲面$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面上的点的竖坐标的增量.

以参数方程表示的曲面的切平面和法线

$$S: x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v) \quad ((u,v) \in D)$$

向量形式：$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad ((u,v) \in D)$

法向量：$\left(\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right)\big|_{(u_0,v_0)} = (A, B, C)$

例9 求曲面$x = u\cos v, y = u\sin v, z = av, (a \neq 0)$在$u = \sqrt{2}$, $v = \frac{\pi}{4}$处的切平面和法线方程.

解 $\vec{r} = (u\cos v, u\sin v, av), \left(\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right)\big|_{(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})} = (\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, \sqrt{2})$

取$\vec{n} = (a, -a, 2)$, $(u,v) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) \leftrightarrow (x,y,z) = (1, 1, \frac{\pi}{4}a)$

切平面：$ax - ay + 2z = \frac{\pi}{2}a$ 法线：$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{-a} = \frac{z - \frac{\pi}{4}a}{2}$

小结

曲面$F(x,y,z)=0$在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面的法向量为

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

切平面：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$

$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线：$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

特殊地：若空间曲面方程为 $z=f(x,y)$

切平面：$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

思考题: 如果平面$3x+\lambda y-3z+16=0$与椭球面$3x^2+y^2+z^2=16$相切，求λ.

解答 设切点为(x_0, y_0, z_0),

依题意知该点处平面的法向量与椭球面的法向量平行

即 $$\frac{6x_0}{3}=\frac{2y_0}{\lambda}=\frac{2z_0}{-3} \Rightarrow y_0=\lambda x_0,\ \ z_0=-3x_0,$$

同时，切点在平面和椭球面上

$$\begin{cases} 3x_0+\lambda^2 x_0+9x_0+16=0 \\ 3x_0^2+\lambda^2 x_0^2+9x_0^2-16=0 \end{cases}, \Rightarrow \lambda=\pm 2.$$

谢谢！

李换琴
西安交通大学理学院
hqlee@mail.xjtu.edu.cn