第八节 各类积分的联系及其在场论中的应用

习题6.8 (p270)

11, 12(2), 13, 15

内容提要

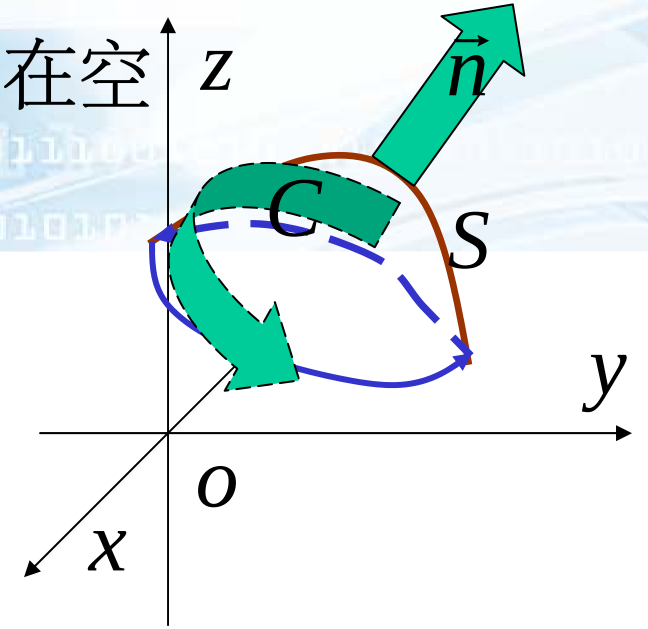
1. Green公式
2. 平面线积分与路径无关的条件
3. Stokes公式与旋度
4. Gauss公式与散度
5. 几种重要的特殊向量场

1、Stokes公式

2、空间曲线积分与路径无关的条件

3、向量场的环量与旋度

一、斯托克斯（G. Stokes）公式



定理如果$X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)$在空间区域$V$有连续的偏导数， C 是 V 中一条按段光滑的闭曲线，S是以C为边界且完全位于V的光滑曲面且C与S的方向符合右手法则， 则

$$\oint_C X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

斯托克斯（Stokes）公式

Stokes公式的其它形式

$$\oint_C \underline{\underline{X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z}} = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

$$\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds}$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \mathrm{d}S = (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{e}_n\mathrm{d}S$$

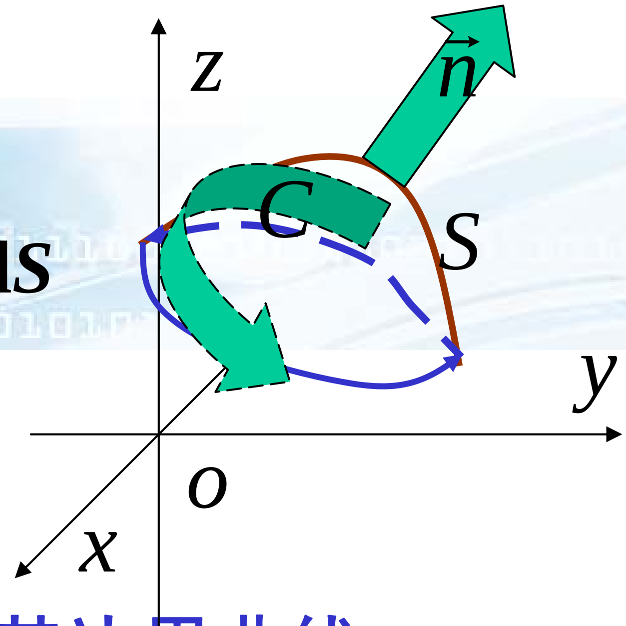
向量形式

$$\oint_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iint_{(S)} (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{(S)} (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{e}_n\mathrm{d}S$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Stokes公式：

$$\oint_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iint_{(S)} (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{(S)} (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{e}_n \mathrm{d}S$$



实质：

表达了有向曲面上的曲面积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系.

(当Σ是xoy面的平面闭区域时)

Stokes公式 $\xrightarrow{\text{特殊情形}}$ **Green公式**

例1 计算 $\int_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z \quad C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，

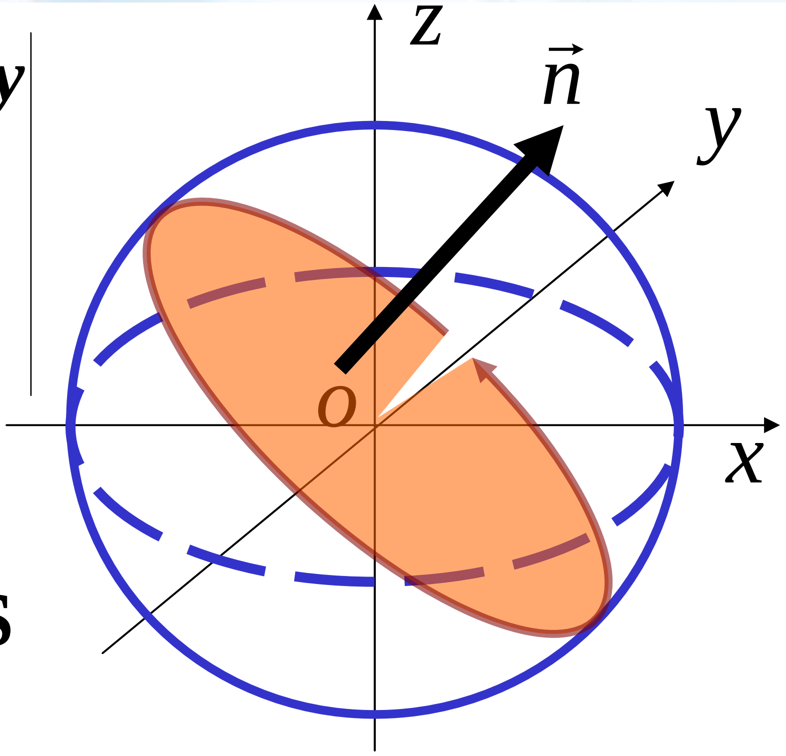
方向与平面 $x+y+z=0$ 的法向量 $\{1,1,1\}$ 符合右手法则.

解 $\int_C = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}$

$$= -\iint_S \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= -\iint_S \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\mathrm{d}S = -\sqrt{3}\pi a^2$$



例2　计算 $\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$

其中 Γ 为椭圆 $x^2+y^2=a^2, \frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ 平行于y轴

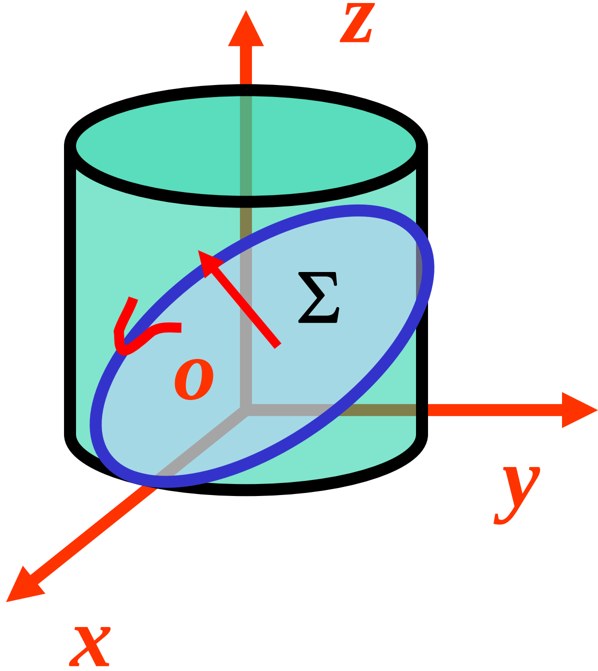
从 x 轴正向看去，椭圆取逆时针方向

解一 $\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dy\Lambda dz & dz\Lambda dx & dx\Lambda dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=-2\iint_{\Sigma} dy\Lambda dz+dz\Lambda dx+dx\Lambda dy$$

$$=-2(\pi ab \;+0+\pi a^2) \;=-2\pi a(a+b)$$



解二　　化为参变量的定积分计算

令 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ 　则 $z = b(1 - \frac{x}{a}) = b(1 - \cos t)$

$$I = \int_0^{2\pi} \{[a\sin t - b(1 - \cos t)](-a\sin t)$$

$$+ [b(1 - \cos t) - a\cos t]a\cos t + [a\cos t - a\sin t]b\sin t\}$$

$$= -2\pi a(a + b)$$

二、空间曲线积分与路径无关的条件

定理设(v)是一维单连域，函数$X(x,y,z)$,$Y(x,y,z)$和$Z(x,y,z)$，在区域(v)中有连续的一阶偏导数，那么下列命题等价：

1^0沿(v)域中任一不相交的闭路径Γ，线积分为零.

$$\oint_{\Gamma} X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z = 0$$

2^0线积分$\int_A^B X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$在$(v)$域中与路径无关.

3^0表达式$X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$为$(v)$域中某一单值函数的全微分.

4^0 $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$ 或 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \vec{0}$

在(v)中所有点成立，

例4 验证$\left(1-\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\dfrac{xy}{z^2}\mathrm{d}z$是全微分，并求其原函数.

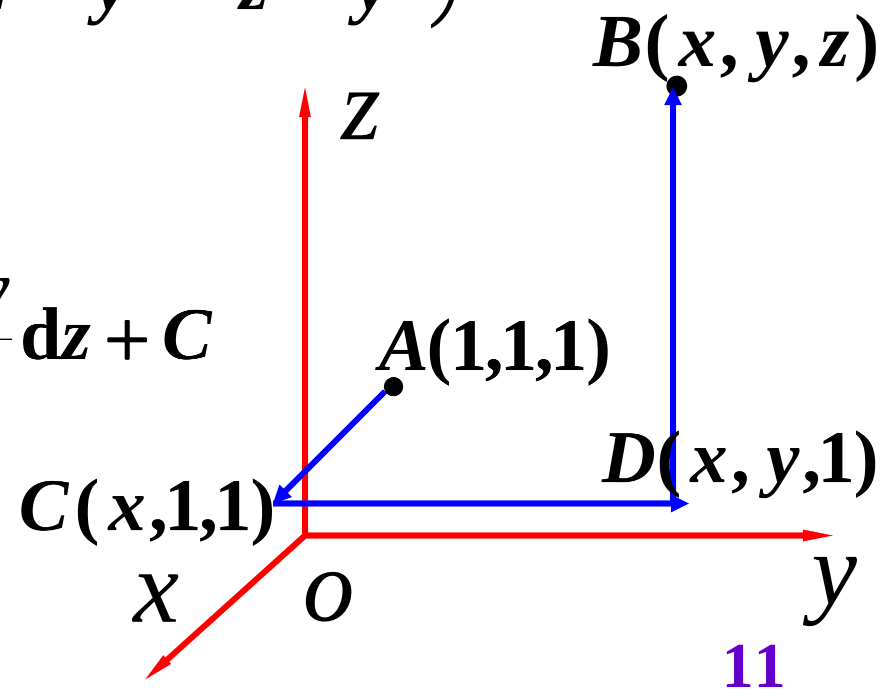
解法1（线积分）

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=\left(-\frac{x}{z^2}+\frac{x}{z^2}\right)\vec{i}-\left(-\frac{y}{z^2}+\frac{y}{z^2}\right)\vec{j}+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z}-\frac{1}{y^2}\right)\vec{k}=\vec{0}$$

$$u=\int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)}=\int_{AC}+\int_{CD}+\int_{DB}$$

$$=\int_1^x \mathrm{d}x+\int_1^y\left(x+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y+\int_1^z-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z+C$$

$$=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C$$



解法2（偏积分）

$$\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xy}{z^2}$$

$$u=\int \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+\varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y^2}+\frac{x}{z}+\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}=\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}=0$$

$$u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+h(z) \qquad \varphi(y,z)=\int\frac{\partial\varphi(y,z)}{\partial y}\mathrm{d}y=h(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{xy}{z^2}+h'(z)=-\frac{xy}{z^2} \quad\Longrightarrow\quad h'(z)=0$$

$$\therefore\quad u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C \qquad h(z)=\int h'(z)\mathrm{d}z=C$$

三、向量场的环量与旋度

环量 设向量场$\vec{A}(x,y,z)$,C为场域中的一条有向闭 曲线,称

$$\Gamma = \oint_C \vec{A}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$ 为向量场 $\vec{A}(x,y,z)$沿C的环量

(表示A绕C旋转趋势的大小)

斯托克斯公式 $$\oint_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{A}\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_S (\mathrm{rot}\vec{A}\cdot \vec{e}_n)\mathrm{d}S$$

$$\Gamma = \oint_C \vec{A}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_C X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$$

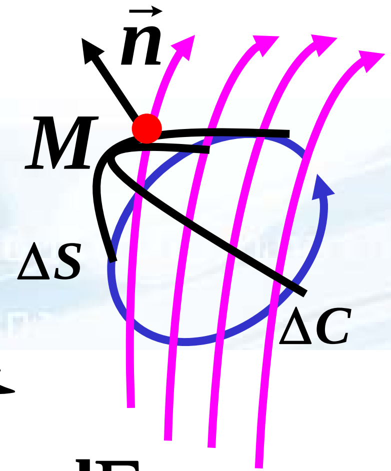
$$= \iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$$

旋度 称$$\mathrm{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$$

为向量场$\vec{A}$在M处的旋度,即$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$

向量场 $\vec{A}$ 在点 M 沿方向 $\vec{n}$ 的旋转趋势

$$\Delta\Gamma=\oint_{\Delta C}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\iint_{\Delta S}(\mathrm{rot}\vec{A}\cdot\vec{e}_n)dS$$



环量密度 如果 $\lim\limits_{(\Delta S)\to M}\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta S}$ 存在，称此极限为向量场 $\vec{A}$ 在点 M 沿方向 $\vec{n}$ 的环量密度.记为 $\dfrac{d\Gamma}{dS}$.

$$\because\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\frac{1}{\Delta S}\oint_{\Delta C}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{\Delta S}\iint_{\Delta S}(\mathrm{rot}\vec{A}\cdot\vec{e}_n)dS=(\mathrm{rot}\vec{A}\cdot\vec{e}_n)_\xi$$

若 $\vec{A}\in C^{(1)}$，则有 $\boxed{\dfrac{d\Gamma}{dS}=\left(\mathrm{rot}\vec{A}\cdot\vec{e}_n\right)_M=\left|\mathrm{rot}\vec{A}\right|\cdot\cos\varphi}$

可见:

旋度 $\mathrm{rot}\vec{A}$ 的方向是使环量密度取得最大的那个方向.

旋度 $\mathrm{rot}\vec{A}$ 的模是环量密度的最大值.

旋度

$$\mathrm{rot}\vec{\mathrm{A}} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$$

若$\vec{A}(x,y,z) = (P,Q,R) \in C^{(1)}(G)$,

则(G)内任一点均有一旋度与其对应，

从而旋度$\mathrm{rot}\vec{A}$也在(G)内构成一向量场，称为旋度场。

若在(G)内,$\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{0}$, 称向量场$\vec{\mathrm{A}}$为无旋场。

例5 求向量场$\vec{A}=(-y,x,c)$(c为常数)沿曲线$(x-2)^2+y^2=R^2, z=0$正向的环量.

解 $$\text{所求环量}=\oint_{(C)}\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds}=\oint_{(C)}-ydx+xdy$$

$$=\iint_{(\sigma)}2d\sigma=2\pi R^2$$

例6 证明$\mathrm{rot}\vec{r}=0$

证 $\vec{r}=\{x,y,z\}$, $$\mathrm{rot}\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$$

$\therefore \vec{r}=\{x,y,z\}$为无旋场

旋度的运算法则:

$$1)\ \mathrm{rot}\,(C\vec{A}) = C\,\mathrm{rot}\,\vec{A}$$

$$2)\ \mathrm{rot}\,(\vec{A} + \vec{B}) = \mathrm{rot}\,\vec{A} + \mathrm{rot}\,\vec{B}$$

$$3)\ \mathrm{rot}\,(u\vec{A}) = u\,\mathrm{rot}\,\vec{A} + \mathrm{grad}\,u \times \vec{A}$$

$$4)\ \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ u) = 0$$ 梯度场为无旋场.

证4)

$$\mathrm{grad}u = \{u_x, u_y, u_z\} \qquad \mathrm{rot}(\mathrm{grad}u) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}$$

$$= (u_{zy} - u_{yz})\vec{i} + (u_{xz} - u_{zx})\vec{j} + (u_{yx} - u_{xy})\vec{k} = \vec{0}$$

$$\therefore\ \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ u) = \vec{0}$$

例7 在点电荷 q所产生的静电场中，电 场强度 $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r}$，试证明 $\vec{E}$ 为无旋场。

证

$$\operatorname{rot}(\vec{E})=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3}\operatorname{rot}(\vec{r})+\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}\times\vec{r}\right)$$

又 $\operatorname{rot}\vec{r}=0 \qquad \operatorname{grad}\dfrac{1}{r^3}=-\dfrac{3}{r^5}\vec{r}$

$$\therefore \operatorname{grad}\frac{1}{r^3}\times\vec{r}=0$$

所以 $\operatorname{rot}(\vec{E})=\vec{0}$

小结

1、Stokes公式

$$\oint_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iint_{(S)} (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{(S)} (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{e}_n \mathrm{d}S$$

2、空间曲线积分与路径无关的条件

3、向量场的环量与旋度

环量 $\Gamma = \oint_C \vec{A}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{s}$

旋度 $\mathrm{rot}\vec{\mathrm{A}} = \nabla\times\vec{A}$

(1)它的方向是使环量密度 取得最大的那个方向．

(2)它的模是环量密度的最 大值．

2、空间曲线积分与路径无关的条件

定理设(v)是一维单连域，函数$X(x,y,z)$,$Y(x,y,z)$和$Z(x,y,z)$，在区域(v)中有连续的一阶偏导数，那么下列命题等价：

1^0沿(v)域中任一不相交的闭路径Γ，线积分为零.

$$\oint_\Gamma X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z = 0$$

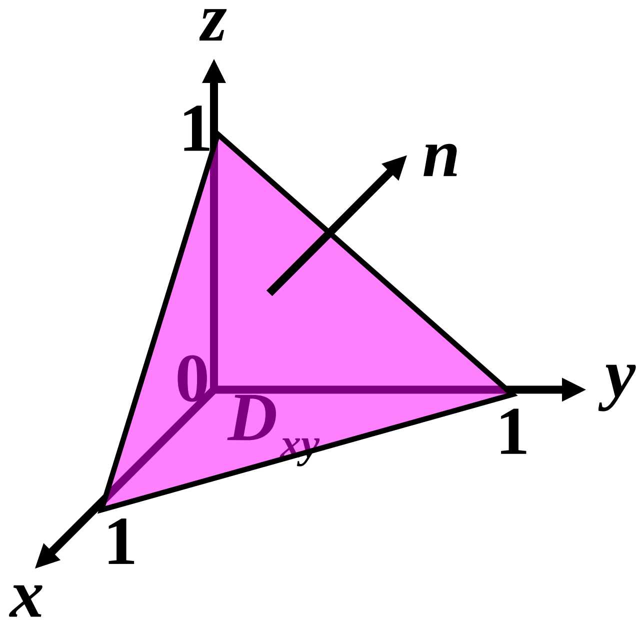
2^0线积分$\int_A^B X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$在$(v)$域中与路径无关.

3^0表达式$X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$为$(v)$域中某一单值函数的全微分.

4^0 $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$ 或 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \vec{0}$

在(v)中所有点成立，

练习 1 计算曲线积分$\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$，其中$\Gamma$是平面$x + y + z = 1$被三坐标面所截成的三角形的整个边界，它的正向与这个三角形上侧的法向量之间符合右手规则.



解 由Stokes公式，有

$$\oint_{\Gamma} zdx + xdy + ydz$$

$$= \iint_{\Sigma} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$$

$$= 3\iint_{D_{xy}} d\sigma = \frac{3}{2}$$ （再由对称性知）

练习2 设$\vec{A}=\{x^2-yz,y^2-xz,z^2-xy\}$,求$\int_\Gamma \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ds}}$

其中$\Gamma: x=a\cos t, y=a\sin t, z=\dfrac{h}{2\pi}t$,从$A(a,0,0)$到$B(a,0,h)$

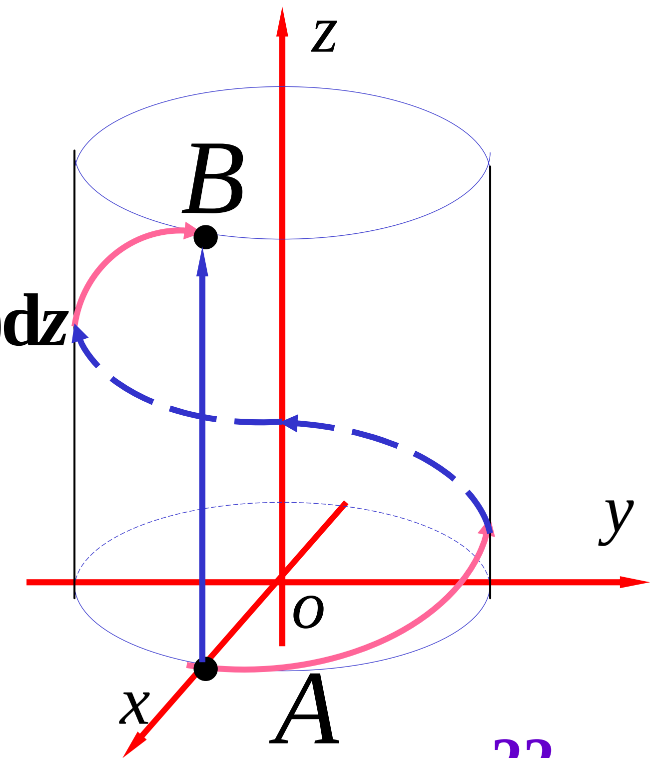
解
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2-yz & y^2-xz & z^2-xy \end{vmatrix}=0$$ 积分与路径无关

$$\int_\Gamma \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ds}}$$

$$=\int_\Gamma (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^h z^2\mathrm{d}z=\frac{h^3}{3}$$

$\Gamma \to \overline{AB}: x=a, y=0, z=z, 0\le z\le h.$



谢谢！

李换琴

西安交通大学理学院

hqlee@mail.xjtu.edu.cn