第八节 各类积分的联系及其在场论中的应用

习题6.8 (p270)

14(3), 15, 16(1)(3)(6) 17, 18(3)

内容提要

1. Green公式
2. 平面线积分与路径无关的条件
3. Stokes公式与旋度
4. Gauss公式与散度
5. 几种重要的特殊向量场

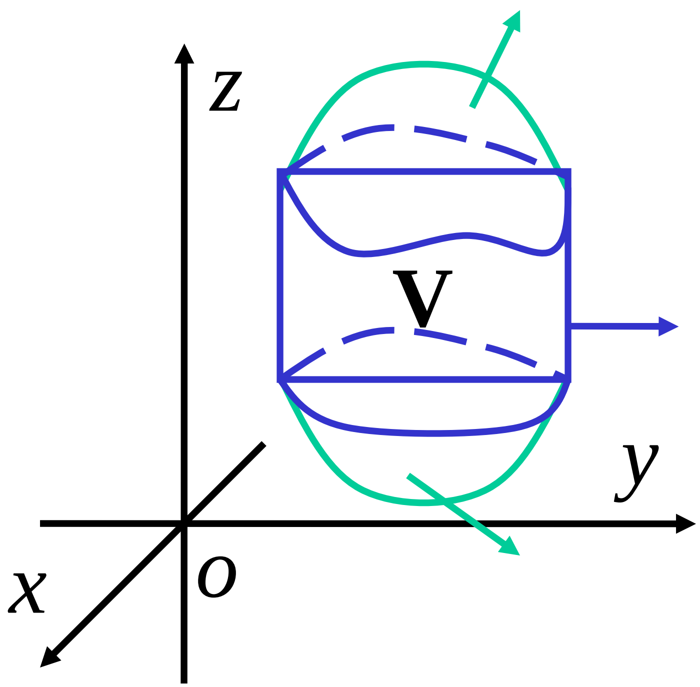
一、 Gauss公式

定理8.5 设空间有界闭区域（V）由分片光滑的闭曲面（Σ）所围成，$\vec{A}=\big(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z)\big)\in C^{(1)}(V)$，则

$$\oiint_{\Sigma} X\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

证明



其中Σ是闭域V的边界曲面的外侧

或

$$\oiint_{\Sigma}(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iiint_V\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

例1 计算

$$\oiint_{\Sigma} z^3 \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + y^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z, \Sigma : x^2+y^2+z^2=a^2 \text{外侧}$$

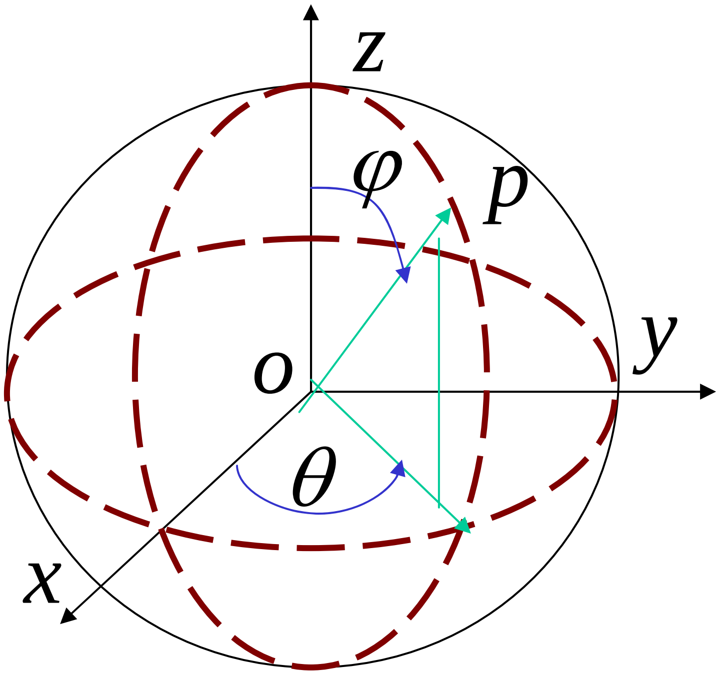
解 $$\text{原式} = \oiint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_V \left(3x^2+3y^2+3z^2\right)\mathrm{d}v$$

$$= 3\iiint_V \left(\rho^2\right)\rho^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

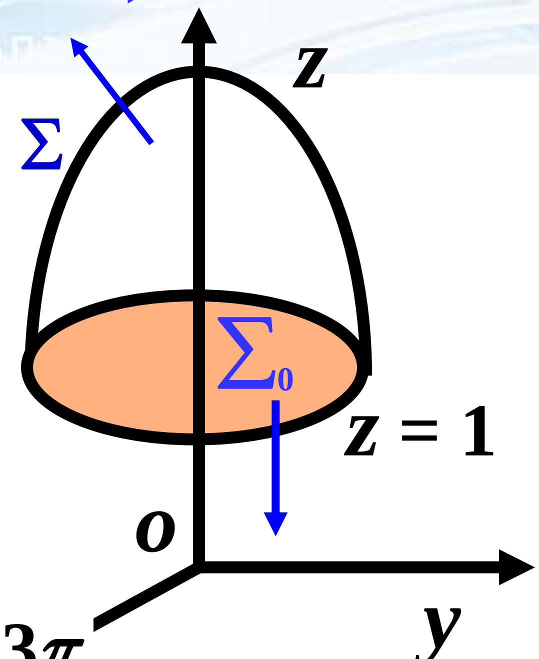
$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a \rho^4\mathrm{d}\rho$$

$$= 3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^5}{5} = \frac{12\pi a^5}{5}$$



例2 计算 $\iint\limits_{\Sigma} (y^2 - x)dy\wedge dz + (z^2 - y)dz\wedge dx + (x^2 - z)dx\wedge dy$

其中Σ是曲面 $z = 2 - x^2 - y^2\ (1 \le z \le 2)$的上侧



解　记 $\Sigma_0: z = 1, x^2 + y^2 \le 1$　取下侧

$$\iint\limits_{\Sigma} = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} - \iint\limits_{\Sigma_0}$$

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} = \iiint\limits_{\Omega}(-3)dV = -3\pi\int_1^2(2 - z)dz = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_0} = \iint\limits_{\Sigma_0}(x^2 - z)dx\wedge dy = -\iint\limits_{D_{xy}}(x^2 - 1)dxdy = \frac{3\pi}{4}$$

故原式 $= -3\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{9\pi}{4}$

例 3　计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS,$$ 其中 Σ 为

锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 介于平面

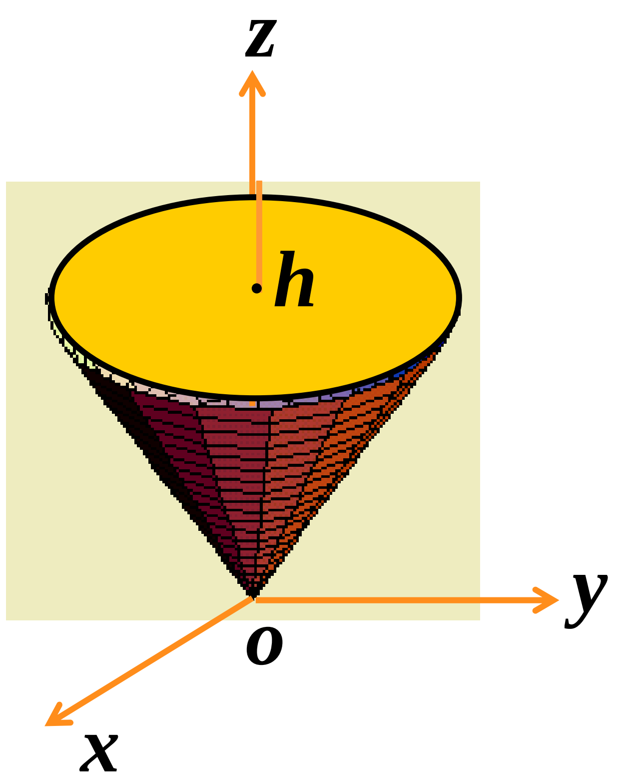
$z = 0$ 及 $z = h(h > 0)$

之间的部分的下侧,

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

是 Σ 在 (x, y, z) 处

的法向量的方向余弦.

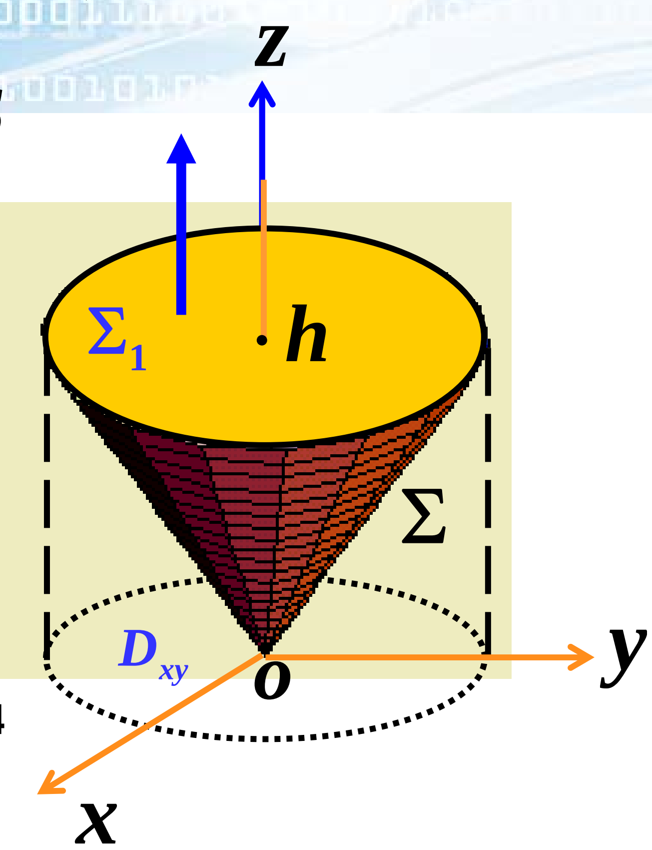


解 补充Σ_1： $z=h\,(x^2+y^2\le h^2)$ Σ_1取上侧，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv=2\iiint\limits_{\Omega}zdv$$

$$=2\int_0^h z\cdot\pi z^2dz=\frac{\pi h^4}{2}$$



$$\because\ \iint\limits_{\Sigma_1}=\iint\limits_{\Sigma_1}z^2dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}h^2dxdy=\pi h^4$$

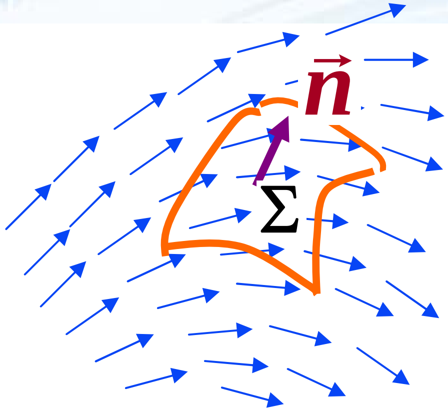
故所求积分$=\dfrac{1}{2}\pi h^4-\pi h^4=-\dfrac{1}{2}\pi h^4.$

2、通量与通量密度

由第二型面积分可知，不可压缩的流体在流速场

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

中，通过曲面Σ指定一侧的流量为



$$\Phi=\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

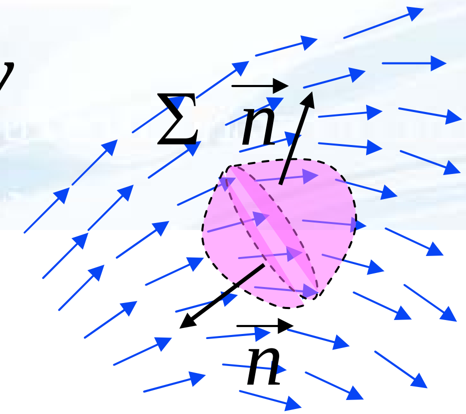
$$=\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

一般的，把向量场$\vec{A}$在有向曲面(S)上的第二型面积分

$$\Phi=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$ 称为场$\vec{A}$对(S)通量.

若Σ 为方向向外的闭曲面，则单位时间通过Σ 的流量为

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$



当 $\Phi > 0$ 时, 说明流入的少， 流出的多.

表明Σ 内有源;

当 $\Phi < 0$ 时, 说明流入多， 流出的少.

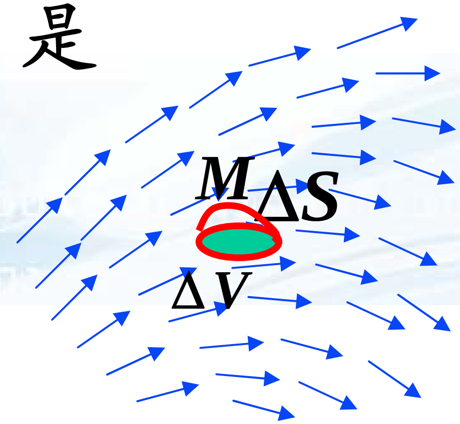
表明Σ 内有洞（负源）.

当 $\Phi = 0$ 时, 说明流入与流出Σ 的流体质量相等 .

根据Gauss公式, 流量也可表为

$$\Phi = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

为了揭示场内任意点M处源的强度，设ΔS是包含点 M 且方向向外的任一闭曲面，记ΔS所围域为(ΔV)，



则(ΔV)上的平均通量密度为

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\frac{1}{\Delta V}\iiint_{(\Delta V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\lim_{(\Delta V)\to M}\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\lim_{(\Delta V)\to M}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{(\xi,\eta,\zeta)}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_M$$

$$((\xi,\eta,\zeta)\in\Omega)$$

称为向量场$\vec{v}$在点M处的通量密度.

也称为向量场 $\vec{v}$ 在点 M 的散度.

它反映了流速场在点M处源的强度。

3、散度的定义及计算

定义 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

其中P, Q, R 具有连续一阶偏导数,在场中点 $M(x, y, z)$ 处

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \operatorname{div}\vec{A}$$

称为向量场 $\vec{A}$ 在点 M 的**散度**.

计算公式

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{A}}$$

说明: 由引例可知, 散度是通量对体积的变化率, 且

$\operatorname{div}\vec{A} > 0$ 表明该点处有正源,

$\operatorname{div}\vec{A} < 0$ 表明该点处有负源,

$\operatorname{div}\vec{A} = 0$ 表明该点处无源,

散度绝对值的大小反映了源的强度.

若向量场 $\vec{A}$ 处处有 $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, 则称 $\vec{A}$ 为无源场.

例如, 匀速场 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ (其中 v_x, v_y, v_z 为常数),

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0$$

故它是无源场.

例5. 置于原点, 电量为 q 的点电荷产生的场强为

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r} = \frac{q}{r^3}(x, y, z) \qquad (\vec{r} \neq \vec{0})$$

求 $\operatorname{div}\vec{E}$.

解: $\operatorname{div}\vec{E} = q\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]$

$$= q\left[\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}\right]$$

$$= 0 \qquad (r \neq 0)$$

计算结果与仅原点有点电荷的事实相符.

例6 设向量场$\vec{A}=\{yz,zx,xy\}$,求

穿过圆柱$x^2+y^2=a^2,(0\le z\le h)$的外侧表面的通量.

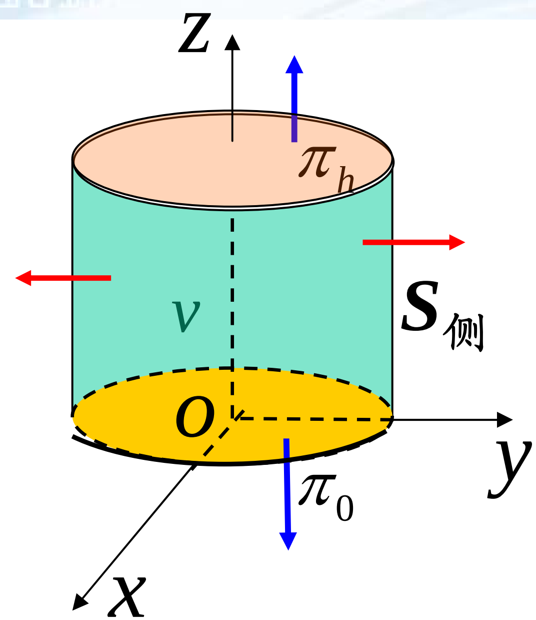
解 $\Phi=\iint\limits_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}$

$$=\iint\limits_S yz\,dy\wedge dz+zx\,dz\wedge dx+xy\,dx\wedge dy$$

$$=\iint\limits_{S_{侧}}+\iint\limits_{\pi_h}+\iint\limits_{\pi_0}-[\iint\limits_{\pi_h}+\iint\limits_{\pi_0}]$$

$$=\iiint\limits_v(P_x+Q_y+R_z)dv-[\iint\limits_{\pi_h}+\iint\limits_{\pi_0}]$$

$$=0-[\iint\limits_{D_{xy}}xy\;dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}xy(-dxdy)]=0$$



散度的运算法则

设 $\vec{A}=\{X,Y,Z\}, u=u(x,y,z)$, 则

$$(1)\mathrm{div}(C\vec{A})=C\mathrm{div}\vec{A}$$

$$(2)\mathrm{div}(\vec{A}+\vec{B})=\mathrm{div}\vec{A}+\mathrm{div}\vec{B}$$

$$(3)\mathrm{div}(u\vec{A})=u\mathrm{div}\vec{A}+\mathrm{grad}u\cdot\vec{A}$$

$$(4)\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\vec{A}-\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\vec{B}$$

$$(5)\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A})=0$$

$$(6)\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u$$

$$(7)\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=\vec{0}$$

$$\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

$$\mathrm{grad}u=\nabla u$$

$$\mathrm{div}\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}$$

$$\mathrm{rot}\vec{A}=\nabla\times\vec{A}$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2},\frac{\partial^2}{\partial y^2},\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

称为拉普拉斯算子

例7 求 $\mathrm{div}(\mathrm{grad} f(r))$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 当 $f(r)$ 等于什么时,

$\mathrm{div}(\mathrm{grad} f(r))=0$

$$\boxed{\mathrm{div}(u\vec{A})=u\,\mathrm{div}\vec{A}+\mathrm{grad}\,u\cdot\vec{A}}$$

解 $\mathrm{grad} f(r)=f'(r)\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)=\frac{f'(r)}{r}\vec{r}$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad} f(r))=\mathrm{div}\left(\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\right)=\frac{f'(r)}{r}\mathrm{div}\vec{r}+\mathrm{grad}\frac{f'(r)}{r}\cdot\vec{r}$$

$$=3\frac{f'(r)}{r}+\left(\frac{f'(r)}{r}\right)'_r\mathrm{grad}r\cdot\vec{r}=3\frac{f'(r)}{r}+\frac{rf''(r)-f'(r)}{r^2}\frac{1}{r}\vec{r}\cdot\vec{r}$$

$$=\frac{rf''(r)+2f'(r)}{r}$$

由 $\mathrm{div}(\mathrm{grad} f(r))=0\Rightarrow rf''(r)+2f'(r)=0\quad(1)$

令 $f'(r)=t$, (1)化为 $rt'+2t=0\Rightarrow t=C_1r^{-2}\Rightarrow f(r)=\frac{C_1}{r}+C_2$

内容小结

1. Gauss公式

$$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

2. 通量与散度

设向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$，P, Q, R, 在域G内有一阶 连续偏导数，则

向量场通过有向曲面 Σ 的通量为 $\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$

G 内任意点处的散度为 $\operatorname{div}\vec{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$

谢谢！

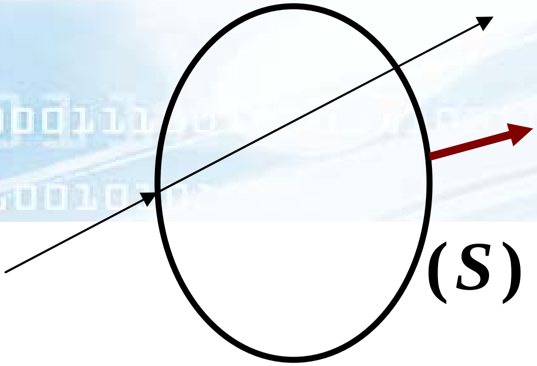
李换琴

西安交通大学理学院

hqlee@mail.xjtu.edu.cn

2、通量与通量密度

向量场$\vec{A}(x,y,z)$对曲面(S)的通量:



$$Q=\iint_{(S)}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

如果(S)为一闭合曲面外侧,

$$Q=\oint\!\!\!\oint_{(S)}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=Q_{出}-Q_{入}$$

若 $Q\geq 0$, 则(V)中有源; 若 $Q\neq 0$, 称$\vec{A}$在(V)中有源存在。

若 $Q\leq 0$, 则(V)中有洞, 或负源

对于向量场$\vec{A}(x,y,z)$, 研究
- 源的存在性 通量
- 源的强度 通量密度

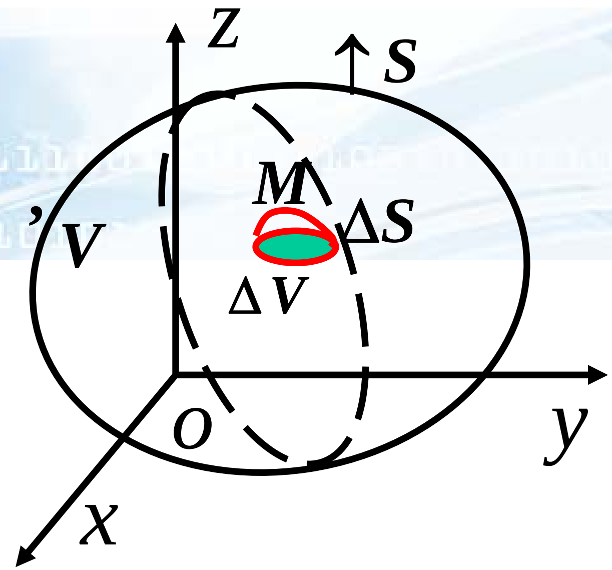
1、若曲面 (S)所围区域 (V)中只有一个源 ，则

强度 $Q=\oiint\limits_{(S)}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$

2、若曲面 (S)所围区域 (V)中的源连续分布 ，

作一内部含有点 M的闭曲面 (ΔS),

(ΔS)所围区域为(ΔV).



平均通量密度 $\dfrac{\Delta Q}{\Delta V}=\dfrac{1}{\Delta V}\oiint\limits_{(\Delta S)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

通量密度（散度）$\lim\limits_{(\Delta V)\to M}\dfrac{1}{\Delta V}\oiint\limits_{(\Delta S)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ $\vec{A}$在M处源的强度, 记为 $\operatorname{div}\vec{A}$

散度的计算

$$\operatorname{div}\vec{A}(M)=\lim_{(\Delta V)\to M}\frac{1}{\Delta V}\oiint\limits_{(\Delta S)}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\lim_{(\Delta V\to M)}\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_{\Delta V}(\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V$$

$$=\lim_{(\Delta V\to M)}\frac{(\nabla\cdot\vec{A})_{\xi}}{\Delta V}\iiint\limits_{\Delta V}\mathrm{d}V=(\nabla\cdot\vec{A})_M=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$

Guass公式：

$$\oiint_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{A})\mathrm{d}V = \iiint_V \mathrm{div}\vec{A}\mathrm{d}V$$

例3

求向量场$\vec{A}=\{x^3,y^3,z^3\}$在$M_1(0,0,0)$和$M_2(1,0,-1)$处的散度.

解 $$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z} = 3x^2+3y^2+3z^2$$

$$(\mathrm{div}\vec{A})_{M_1}=(3x^2+3y^2+3z^2)_{(0,0,0)}=0$$

$$(\mathrm{div}\vec{A})_{M_2}=(3x^2+3y^2+3z^2)_{(1,0,-1)}=6$$

例6 在点电荷所产生的静电场中，设(S)为场域中任一闭合曲面，

证明：$\vec{D}$穿过曲面的通量．

$$\Phi=\oiint_{S}\vec{D}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\begin{cases}0, & (S)\text{不包围 } q\\ q, & (S)\text{包围 } q\end{cases}$$

解 设点电荷q位于坐标原点，$\vec{D}=\dfrac{q}{4\pi r^3}\vec{r}$， 当$r\neq 0$时，

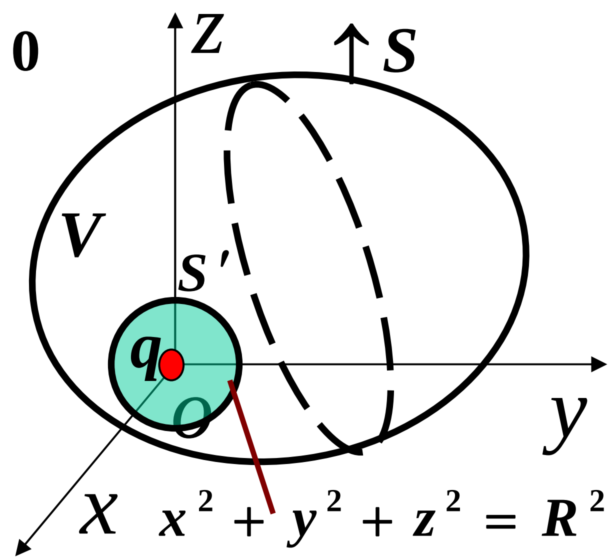
$$\mathrm{div}\vec{D}=\frac{q}{4\pi}\left(\mathrm{grad}\frac{1}{r^3}\cdot\vec{r}+\frac{1}{r^3}\mathrm{div}\vec{r}\right)=\frac{q}{4\pi}\left(\frac{-3}{r^4}\mathrm{grad}r\cdot\vec{r}+\frac{1}{r^3}\mathrm{div}\vec{r}\right)=0$$

如q在(S)外：$\Phi=\oiint_{S}\vec{D}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\iiint_{V}\mathrm{div}\vec{D}\mathrm{d}v=0$

如q在(S)内：$\Phi=\oiint_{S}\vec{D}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\dfrac{q}{4\pi}\oiint_{S}\dfrac{\vec{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$

$$=\frac{q}{4\pi}\oiint_{S'}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\frac{q}{4\pi R^3}\oiint_{S}\vec{r}\cdot\vec{n}_0\mathrm{d}S$$

$$=\frac{q}{4\pi R^3}R^2\cdot 4\pi R=q$$



$x^2+y^2+z^2=R^2$

例2 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (x+y+z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$

$\Sigma: z = c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ 上侧

解 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + (x+y+z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

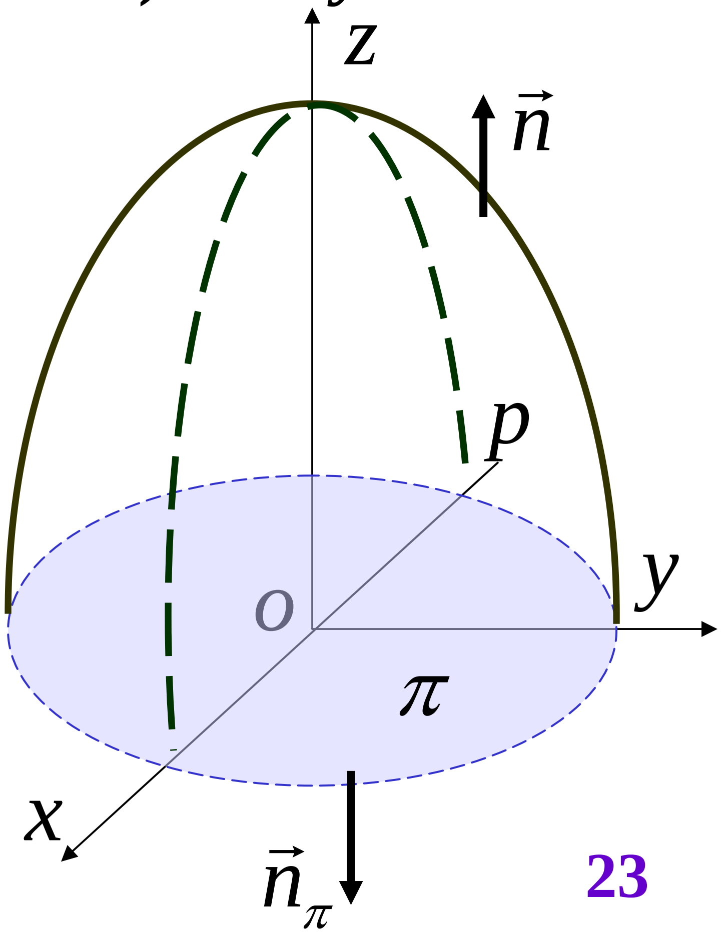
$$= \iint\limits_{\Sigma} + \iint\limits_{\pi} - \iint\limits_{\pi}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} + \iint\limits_{\pi} = \iiint\limits_{v} (1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi abc$$

$$\iint\limits_{\pi} = -\iint\limits_{D} (x+y+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = -\pi ab$$

$$\iint\limits_{\Sigma} = \iint\limits_{\Sigma} + \iint\limits_{\pi} - \iint\limits_{\pi} = 2\pi abc + \pi ab$$



Gauss公式

定理　如果$X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z),\frac{\partial X}{\partial x},\frac{\partial Y}{\partial y},\frac{\partial Z}{\partial z}$在闭域$V$上连续

$$\oiint_{\Sigma} X\,\mathrm{dydz}+Y\mathrm{dzdx}+Z\mathrm{dxdy}=\iiint_V\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\mathrm{dv}$$

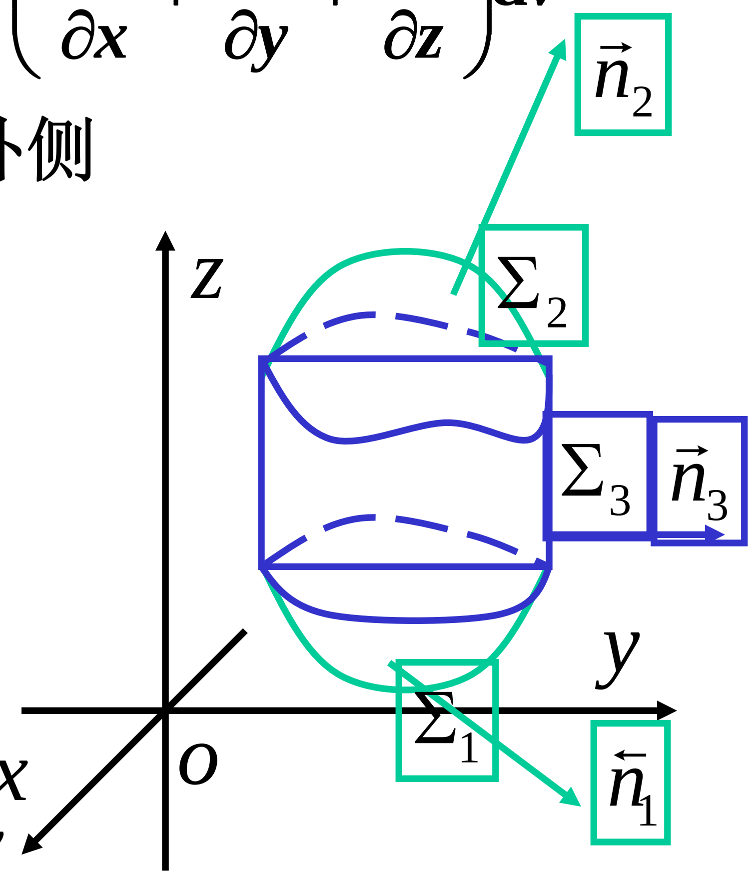
其中Σ是闭域V的边界曲面的外侧

（分析）只须证

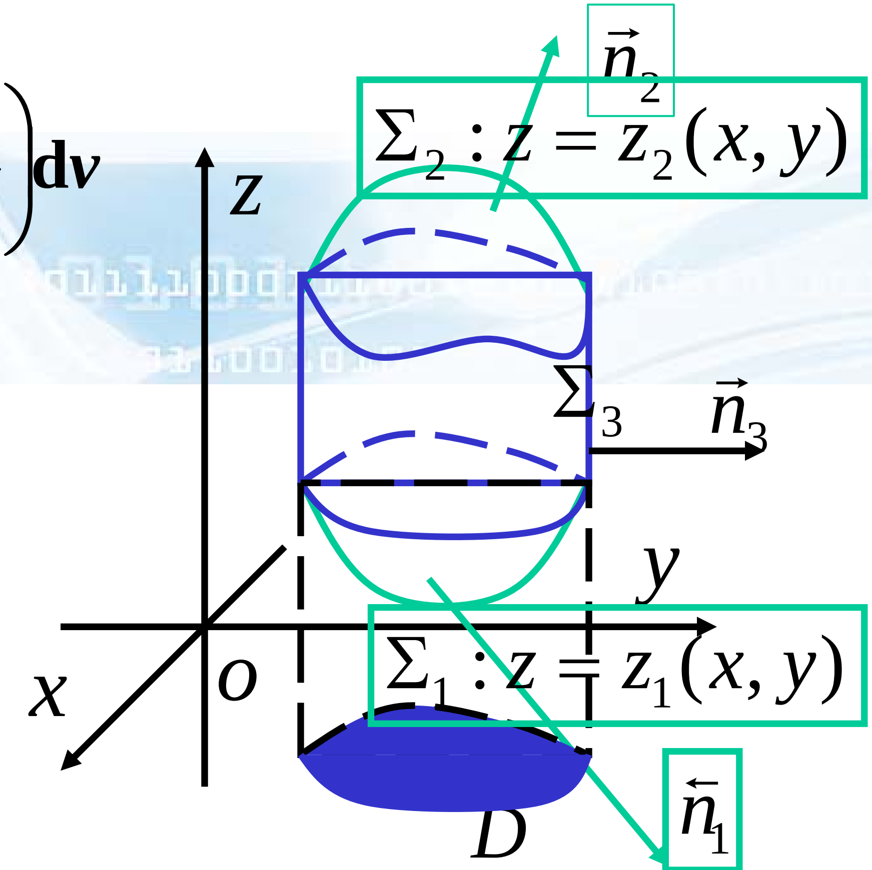
$$\oiint_{\Sigma} Z(x,y,z)\mathrm{dxdy}=\iiint_V\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\mathrm{dv}$$

同理 $$\oiint_{\Sigma} Y(\mathrm{x,y,z})\mathrm{dzdx}=\iiint_V\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{dv}$$

$$\oiint_{\Sigma} X(\mathrm{x,y,z})\mathrm{dydz}=\iiint_V\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)\mathrm{dv}$$



证 $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma} Z(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$



$$\oiint\limits_{\Sigma} = \iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} + \iint\limits_{\Sigma_3}$$

$$= -\iint\limits_{D} Z(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+ \iint\limits_{D} Z(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D}\{Z(x,y,z_2(x,y)) - Z(x,y,z_1(x,y))\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\left.\begin{aligned}
&\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\mathrm{d}v = \iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial Z}{\partial z}\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{D}\{Z(x,y,z_2(x,y)) - Z(x,y,z_1(x,y))\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}\right\}\text{左} = \text{右}$$