多元函数积分学小结

一、知识要点

1．二重积分、三重积分

2．重积分的应用

3．第一型线积分（对弧长的曲线积分）

4．第二型线积分（对坐标的曲线积分）

5．第一型面积分（对面积的曲面积分）

6．第二型面积分（对坐标的曲面积分）

7．格林公式、高斯公式和斯托克斯公式

8. 积分与路径无关的条件

9. 积分学在场论中的应用

1．**二重积分** $\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

（1）直角坐标系下的计算

（2）极坐标系下计算

（3）交换积分次序

2．**三重积分** $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

（1）直角坐标下计算

“先二后一”，或“先一后二”

（2）柱坐标系下计算

（3）球坐标系下计算

3. 重积分的应用

几何应用：

1）求体积

2）求平面图形的面积

物理应用：

1) 质心坐标（形心坐标）

2) 转动惯量

3) 引力

4. 第一型线积分 $\int_{C} f(x,y,z)ds$

5. 第二型线积分 $\int_{C} X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z = \int_{C} \vec{A}\cdot\overrightarrow{ds}$

两型线积分的联系 $\int_{C} \vec{A}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{C} \left(\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{e}_{\tau}\right)\mathrm{d}s$

6. 第一型面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$

7. 第二型面积分

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{\Sigma} Xdy\Lambda dz + Ydz\Lambda dx + Zdx\Lambda dy$$

两型面积分的联系

$$\iint_{S} \vec{A}(x,y,z)\bullet\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{S} \left[\vec{A}(x,y,z)\bullet\vec{e}_{n}\right]\mathrm{d}S$$

8. Green公式

$$\oint_{+C} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}\sigma$$

9. stokes公式

$$\oint_{C} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iint_{(S)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

$$= \iint_{(S)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{e}_n \mathrm{d}S$$

10. Gauss公式

$$\oiint_{\Sigma} X\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + Z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{V} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \mathrm{d}V$$

11、平面线积分与路径无关的条件

设 P, Q 在 (σ) 内具有一阶连续偏导数, 则有

$\int_{+C} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 (σ)内与路径无关.

$\rightleftharpoons$ 对 (σ)内任意闭曲线 L 有 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$

$\rightleftharpoons$ 在 (σ) 内有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

$\rightleftharpoons$ 在 (σ) 内有 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

环量　向量场 $\vec{A}(x,y,z)$沿C的环量

$$\Gamma = \oint_C \vec{A}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

通量　向量场$\vec{A}(x,y,z)$对曲面(S)的通量：

$$Q = \iint_{(S)} \vec{A}\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

散度

$$\mathrm{div}\,\vec{A}(M) = \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$

旋度

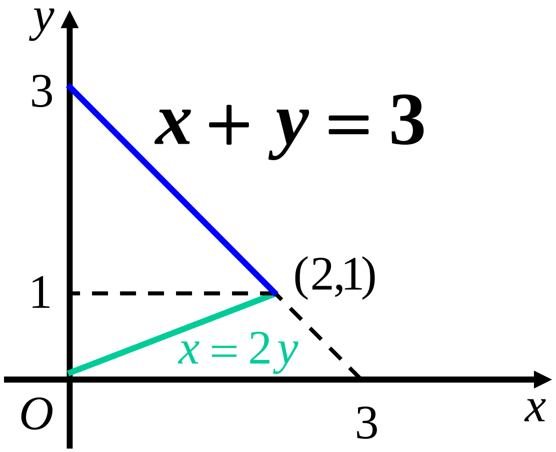
$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

二、例题选讲

1. 交换下列积分次序

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \mathrm{d}y \int_0^{3-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

解 根据积分区域的图形，得



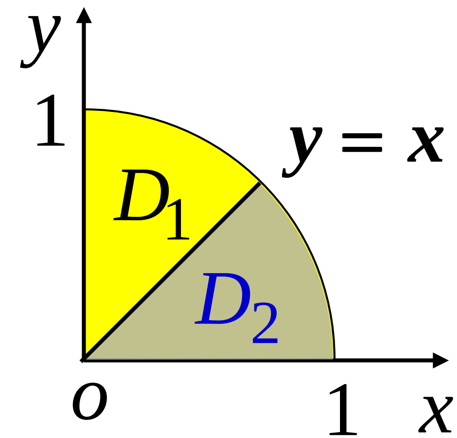
$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_1^3 \mathrm{d}y \int_0^{3-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

2. 计算二重积分

$$I=\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ 其中D 为圆域 $x^2+y^2\le 1$ 在第一象限部分.



解: $$I=\iint_D\left(\left|x-y\right|+2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作辅助线 $y=x$ 将D 分成 D_1 , D_2 两部分

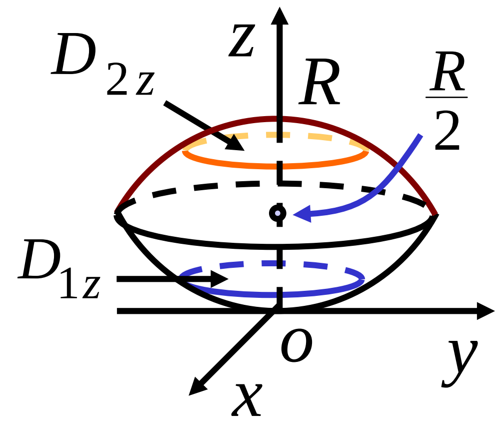
$$=\iint_{D_1}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\cdots=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{2}$$

3 .计算积分 $\iiint_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， 其中Ω是两个球

$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ 及 $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$

($R > 0$)的公共部分.



解：由于被积函数缺 x , y ,

利用“先二后一”计算方便 .

$$原式 = \int_0^{R/2} z^2 \mathrm{d}z \iint_{D_{1z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{R/2}^{R} z^2 \mathrm{d}z \iint_{D_{2z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{R/2} z^2 \cdot \pi(2Rz - z^2)\mathrm{d}z + \int_{R/2}^{R} z^2 \cdot \pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{59}{480}\pi R^5$$

4、计算$I=\int_C \sqrt{x^2+y^2}ds$，$C$为圆周$x^2+y^2=ax$. $\boxed{2a^2}$

将C用参数式方程或极坐标 方程表示，化为定积分 计算。

5、计算 $I=\int_C (z+y^2)ds$，C为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$与平面 $x+y+z=0$的交线。 $\boxed{\frac{2}{3}\pi R^3}$

解法1 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 消去 $x \Rightarrow (y+\frac{z}{2})^2+\frac{3}{4}z^2=\frac{R^2}{2}$

$$C: z=\frac{2}{\sqrt{6}}R\cos t,\ y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t,\ x=-\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t,$$

$$0\le t\le 2\pi$$

解法2　曲线C具有轮换对称性，即x,y,z轮换后，曲线C的方程不变。

$$\Rightarrow \int_C xds = \int_C yds = \int_C zds = \frac{1}{3}\int_C (x+y+z)ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds = \frac{1}{3}\int_C (x^2+y^2+z^2)ds$$

$$= \frac{1}{3}\int_C R^2 ds = \frac{2\pi}{3}R^3$$

6、计算$I = \int_C (y^3e^x - my)dx + (3y^2e^x - m)dy$，$C$是从点$E(1,0)$到点$F(2,1)$直线段，再从$F$到$G(3,0)$的上半圆弧.

补线，利用格林公式

$$\boxed{-(1+\frac{\pi}{4}m)}$$

7、 选取a, b使$\dfrac{(y^2+2xy+ax^2)dx-(x^2+2xy+by^2dy}{(x^2+y^2)^2}$

为某一函数$u(x,y)$的全微分，并求$u(x,y)$.

解

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow a=-1, b=-1$$

$$u(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$$

8、设曲线积分$\int_C \frac{-2xf(x)ydx}{(1+x^2)} + f(x)dy$与路径无关，$f \in C^{(1)}$, 且$f(0)=1$, 求$f(x)$.

解

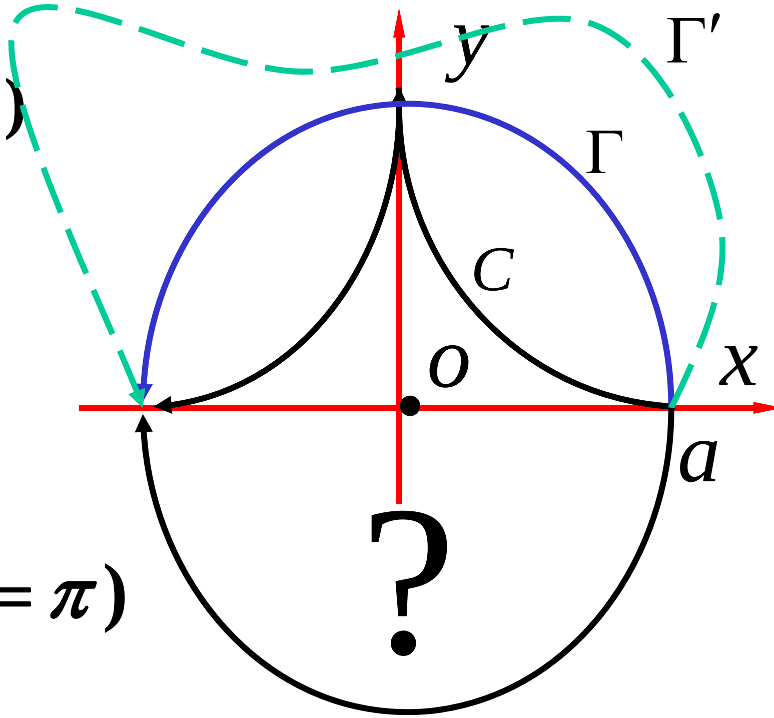
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{-2xf(x)}{1+x^2} = f'(x)$$

$$f(x) = \frac{C}{1+x^2}$$

$$f(0)=1 \Rightarrow C=1 \quad \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

9、 计算 $I=\int_{C}\dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^{2}+y^{2}}$

$C:\begin{cases} x=a\cos^{3}t \\ y=a\sin^{3}t \end{cases}$ 从 $A(t=0)\to B(t=\pi)$



解 $\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{y^{2}-x^{2}-2xy}{(x^{2}+y^{2})^{2}}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}$

$\Gamma:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$ 从 $A(t=0)\to B(t=\pi)$

$$I=\int_{C}\quad=\int_{\Gamma}\quad=\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^{2}+y^{2}}$$

$$=\int_{0}^{\pi}\left[(\cos t-\sin t)(-\sin t)+(\cos t+\sin t)\cos t\right]\mathrm{d}t=\pi$$

10. 计算曲面积分$I=\oiint_{\Sigma}[(x+y)^2+z^2+2yz]\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=2x+2z$.

解: $I=\oiint_{\Sigma}[(x^2+y^2+z^2)+2xy+2yz]\mathrm{d}S$

$$=\underbrace{\oiint_{\Sigma}(2x+2z)\mathrm{d}S}_{\text{用重心公式}}+\underbrace{2\oiint_{\Sigma}(x+z)y\mathrm{d}S}_{\text{利用对称性}}$$

$$=2(\bar{x}+\bar{z})\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S+0$$

$$=32\pi$$

11、求密度均匀的半径为 a的上半球壳的重心及对 z轴的转动惯量。

$$\bar{x} = \bar{y} = 0, \qquad \bar{z} = \frac{\iint\limits_{\Sigma} z\,dS}{\iint\limits_{\Sigma} dS} = \frac{a}{2}$$

$$I_z = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2)\mu\,dS = \frac{4}{3}\mu\pi a^4$$

12、计算$I = \iint\limits_{\Sigma} x^2 dy\Lambda dz + y^2 dz\Lambda dx + z^2 dx\Lambda dy$ Σ是抛物面

$x^2 + y^2 = a - z$在上半空间部分的外侧$(a > 0)$。

补面，利用Guass公式

$$\boxed{\frac{1}{3}\pi a^3}$$

13、计算$I = \iint\limits_{\Sigma} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$

Σ是以(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)为顶点的三角形面上侧 。

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

法1　　补面，利用Guass公式

法2　　利用轮换对称性，

$$\iint\limits_{\Sigma} x dy \wedge dz = \iint\limits_{\Sigma} y dz \wedge dx = \iint\limits_{\Sigma} z dx \wedge dy = \frac{1}{6}$$

14 求 $\oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\Sigma: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 内侧

解 $\oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= -\iiint\limits_{v} 2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -2(a+b+c)\frac{4\pi R^3}{3}$$

由 $\bar{x} = a = \dfrac{\iiint\limits_{v} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V} \Rightarrow \iiint\limits_{v} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = aV = a\dfrac{4}{3}\pi R^3$

同理 $\iiint\limits_{v} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \dfrac{4}{3}\pi R^3 b, \quad \iiint\limits_{v} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \dfrac{4}{3}\pi R^3 c$

15、计算$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dy\wedge dz+\frac{y}{r^3}dz\wedge dx+\frac{z}{r^3}dx\wedge dy$，

其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，Σ是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧。

解1 由于被积函数在Σ所围成的区域中偏导数 不存在，故不能直接利用 Gauss公式。

然而 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x}{a^3}dy\wedge dz+\frac{y}{a^3}dz\wedge dx+\frac{z}{a^3}dx\wedge dy$

$$=\frac{1}{a^3}\iiint\limits_{V}3dV=\frac{3}{a^3}\frac{4}{3}\pi a^3\boxed{=4\pi}$$

解2 利用轮换对称性，$I=3\oiint\limits_{\Sigma}\frac{z}{r^3}dx\wedge dy=3(\iint\limits_{\Sigma_{上}}+\iint\limits_{\Sigma_{下}})$

16、计算$I=\oiint_{\Sigma}\frac{x\,dy\wedge dz+z^2\,dx\wedge dy}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Sigma$是柱面$x^2+y^2=R^2$及两平面$z=R, z=-R(R>0)$所围立体的表面外侧。

解　由于被积函数在Σ所围成的区域中偏导数不存在，故不能利用Gauss公式。

$$\oiint_{\Sigma_{上}}\frac{x\,dy\wedge dz}{x^2+y^2+z^2}=\oiint_{\Sigma_{下}}\frac{x\,dy\wedge dz}{x^2+y^2+z^2}=0,\quad \oiint_{\Sigma_{侧}}\frac{x\,dy\wedge dz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\pi R^2,$$

$$\oiint_{\Sigma_{上}}\frac{z^2\,dx\wedge dy}{x^2+y^2+z^2}+\oiint_{\Sigma_{下}}\frac{z^2\,dx\wedge dy}{x^2+y^2+z^2}=0,\quad \oiint_{\Sigma_{侧}}\frac{z^2\,dx\wedge dy}{x^2+y^2+z^2}=0$$

原积分　$I=\frac{1}{2}\pi R^2$

17、若Σ是球面$x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+a^2=0$

计算$I=\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z-\sqrt{3}a)dS \quad (a>0)$.

解　利用轮换对称性，$\oiint\limits_{\Sigma} xdS=\oiint\limits_{\Sigma} ydS=\oiint\limits_{\Sigma} zdS$，

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=3\oiint\limits_{\Sigma} xdS=3\bar{x}\oiint\limits_{\Sigma} dS=24\pi a^3$$

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z-\sqrt{3}a)dS$$

$$=24\pi a^3-\sqrt{3}a4\pi(\sqrt{2}a)^2$$

$$=\frac{48}{3+\sqrt{3}}\pi a^3$$

18、 (1)证明$\oiint\limits_{\Sigma} \vec{n}_0 \mathrm{d}S = \vec{0}$，其中$\vec{n}_0$是任意闭曲面$\Sigma$的向外单位法向量。

解（1）$\oiint\limits_{\Sigma} \vec{n}_0 \mathrm{d}S = \left\{\oiint\limits_{\Sigma} \cos\alpha \mathrm{d}S\right\}\vec{i} + \left\{\oiint\limits_{\Sigma} \cos\beta \mathrm{d}S\right\}\vec{j} + \left\{\oiint\limits_{\Sigma} \cos\gamma \mathrm{d}S\right\}\vec{k}$

$= \left\{\oiint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}y \Lambda \mathrm{d}z, \oiint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}z \Lambda \mathrm{d}x, \oiint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}x \Lambda \mathrm{d}y\right\} = \vec{0}$

18、

(2)证明$\oiint\limits_{\Sigma} \cos(\vec{n},\vec{l})\mathrm{d}S = 0$,其中 $\vec{n}$是任意闭曲面 Σ的向外法向量 ,$\vec{l}$固定向量 ,$\theta = (\vec{n},\vec{l})$.

解（2） 设 $\vec{l} = \{A,B,C\}$,$\vec{n}_0 = \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$,则

$$\oiint\limits_{\Sigma} \cos(\vec{n},\vec{l})\mathrm{d}S = \frac{1}{|\vec{l}|}\oiint\limits_{\Sigma} \vec{l}\bullet\vec{n}_0\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{|\vec{l}|}\oiint\limits_{\Sigma} A\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z + B\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}x + C\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{|\vec{l}|}\iiint\limits_{(V)} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad = 0$$

19、 求向量场$\vec{A}=(1,z,\dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}})$穿过曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=1$及$z=2$所围成的圆台的外侧面的流量。$\boxed{2\pi e(1-e)}$

解

$$Q=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}$$

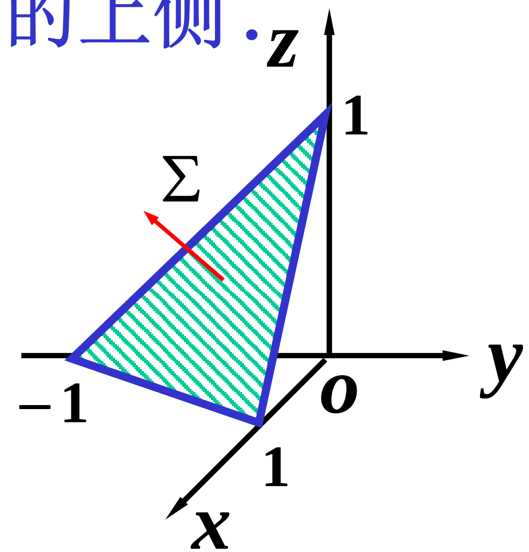
$$=\iint_{\Sigma}dy\wedge dz+zdz\wedge dx+\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\wedge dy$$

补面，利用Guass公式

20、 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx$$

$+[f(x,y,z)+z]dxdy$, 其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 为平面 $x-y+z=1$在第一卦限部分的上侧.



解 利用两类曲面积分之间的关系

$\because \Sigma$ 的法向量为 $\vec{n}=\{1,-1,1\}$,

$$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$I=\iint_{\Sigma}\{\frac{1}{\sqrt{3}}[f(x,y,z)+x]-\frac{1}{\sqrt{3}}[2f(x,y,z)+y]+\frac{1}{\sqrt{3}}[f(x,y,z)+z]\}dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}1\cdot\sqrt{3}dxdy=\frac{1}{2}.$$

坐标轮换法（向量点积法）

设Σ：$z = f(x, y)$, 法向量为$\{-f'_x, -f'_y, 1\}$,

$$I = \iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

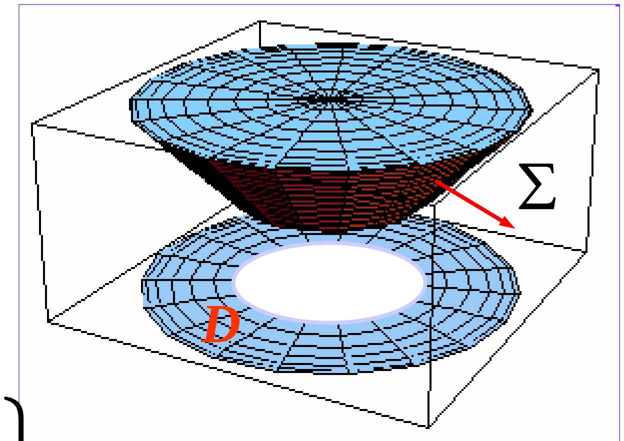
$$= \iint_\Sigma \{P, Q, R\} \cdot \{dydz, dzdx, dxdy\} = \iint_\Sigma \vec{A} \cdot \vec{n}^0 ds$$

$$= \iint_\Sigma \{P, Q, R\} \cdot \{-f'_x, -f'_y, 1\} dxdy$$

$$\underline{\underline{\text{将}\Sigma\text{在}xoy\text{面投影}}} \iint_\Sigma \{P, Q, R\} \cdot \{-f'_x, -f'_y, 1\} dxdy.$$

21、计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} ydydz-xdzdx+z^2dxdy$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1, z=2$ 所截部分的外侧.

解 利用向量点积法



$$\because f'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$I=\iint\{y,-x,z^2\}\cdot\left\{\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right\}dxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma} z^2dxdy \qquad [D_{xy}:\ 1\le x^2+y^2\le 4]$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^2\cdot rdr=-\frac{15}{2}\pi.$$

22、计算曲面积分

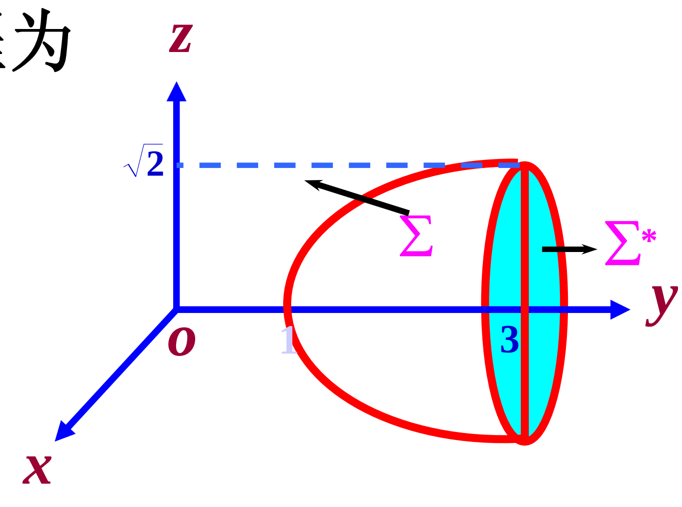
$$I=\iint_{\Sigma}(8y+1)x\,dydz+2(1-y^{2})\,dzdx-4yz\,dxdy,$$

其中Σ是由曲线$\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$绕y轴旋转一周所成的曲面，它的法向量与y轴正向的夹角恒大于$\dfrac{\pi}{2}$.

解 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$绕$y$轴旋转面方程为

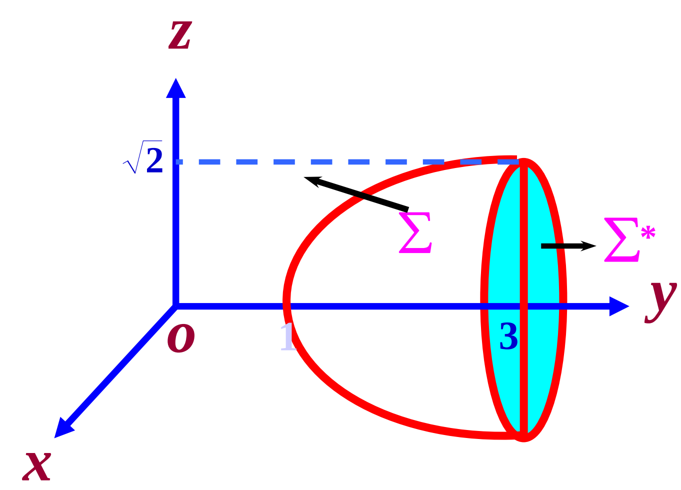
$$y-1=z^{2}+x^{2}$$

(如图)



欲求 $I=\iint\limits_{\Sigma}(8y+1)xdydz+2(1-y^{2})dzdx-4yzdxdy$

且有 $I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}-\iint\limits_{\Sigma^*}$



$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iint\limits_{D_{xz}}dxdz\int_{1+z^{2}+x^{2}}^{3}dy$$

$$=\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int_{1+\rho^{2}}^{3}dy=2\pi\int_{0}^{\sqrt{2}}(2\rho-\rho^{3})d\rho=2\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma^*}=2\iint\limits_{\Sigma^*}(1-3^{2})dzdx=-32\pi,$$

故$I=2\pi-(-32\pi)=34\pi.$