第五节 含参变量的积分与反常积分

习题6.5（A)

1（2），2（1）（3），4（3），6（1）

第五节 含参变量的积分与反常积分

5.1 含参变量的积分

概念 记 $D=[a,b]\times[c,d]$ $f\in C(D)$

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$ 含参变量y的积分

$$G(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$ 含参变量x的积分

性质

1、连续性

定理5.1 若$f\in C(D)$,则$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$在$[c,d]$连续.即

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b f(x,y_0)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx$$

证: 任取$y\in[c,d]$，令$y+\Delta y\in[c,d]$.

由于 $f(x,y)$ 在闭区域D上连续, 所以一致连续, 即

任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对D内任意两点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,

只要 $|x_1-x_2|<\delta,\quad |y_1-y_2|<\delta$

就有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$

因此, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|\Delta y|<\delta$ 时, 就有

$$|F(y+\Delta y)-F(y)|=\left|\int_a^b[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\mathrm{d}x\right|$$

$$\le\int_a^b|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|\mathrm{d}x<\varepsilon(b-a)$$

这说明$F(y)$在$[c,d]$上连续.

2、可导性

定理5.2 若$f\in C(D), f_y\in C(D)$,则

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在$[c,d]$上有连续的导数,且求导与积分可交换次 序。

即 $$F'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b f_y(x,y)dx$$

例1 设$F(y)=\int_0^1 \arctan\frac{x}{y}dx \quad (y\neq 0)$, 求$F'(y)$

解 $$F'(y)=\int_0^1 \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}(-\frac{x}{y^2})dx$$

$$=-\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}dx=-\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{y^2})$$

3、积分顺序交换性

(定理5.3) 若$f \in C(D)$,则$F(y)$在$[c,d]$上可积，

$G(x)$在$[a,b]$上可积，且

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

例2 设$a,b>0$,计算$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx.$

$$原积分 = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy \; = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx$$

$$= \int_a^b \frac{1}{1+y}dy \; = \ln\frac{1+b}{1+a}$$

4、含参变量积分求导法

定理5.4 若$f(x,y)$与$f_y(x,y)$均在D上连续，$x_1(y)$与$x_2(y)$的值域均为$[a,b]$且它们都在$[c,d]$上可导，

则$F(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$在$[c,d]$上可导，且有

$$F'(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f_y(x,y)dx+f[x_2(y),y]x_2'(y)-f[x_1(y),y]x_1'(y)$$

例3 设$F(x)=\int_x^{x^2} e^{-x^2 y}dy$，求$F'(x)$.

解 $F'(x)=\int_x^{x^2} e^{-x^2 y}(-2xy)dy\ +e^{-x^2\cdot x^2}2x-e^{-x^2\cdot x}$

5.2 含参变量的反常积分

无穷积分

设$f \in C(D), D=[a,+\infty)\times[c,d]$.如果$\forall y \in [c,d]$,极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,y)dx$$

存在,那么称含参变量 y的无穷积分

$$\boxed{F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x,y)dx}$$

在$[c,d]$上收敛。

相应地可定义

$$\boxed{F(y)=\int_{-\infty}^b f(x,y)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x,y)dx}$$

一致收敛

设$f \in C(D), D=[a,+\infty)\times[c,d]$. 并且$\forall y\in[c,d], \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$收敛. 若对$\forall \varepsilon>0$, 存在仅与$\varepsilon$有关的$N>0$, 使当$A>N$时, $\forall y\in[c,d]$均有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon,$$

则称$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$关于$y$在$[c,d]$上一致收敛.

比较判别法

定理5.5 设$f \in C(D), D=[a,+\infty)\times[c,d]$, 且$|f(x,y)|\le g(x)$, 若$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛, 则$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$关于$y$在$[c,d]$上一致收敛.

例4 证明积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-yx}\sin x dx \text{在} y \text{的区间} [c,+\infty) \text{上一致收敛}.$$

解 当$y \in [c,+\infty)$时

$$\left|e^{-yx}\sin x\right| \le \left|e^{-yx}\right| \le e^{-cx}$$

而$\int_0^{+\infty} e^{-cx} dx$是收敛的，

所以 $\int_0^{+\infty} e^{-yx}\sin x dx$

在y的区间$[c,+\infty)$上一致收敛 .

含参变量的反常积分的性质

定理5.6 若$f\in C([a,+\infty)\times[c,d])$，且$F(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$关于$y$在$[c,d]$上一致收敛，则

(1) $F(y)$在$[c,d]$上连续；

(2) $\int_c^d dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}dx\int_c^d f(x,y)dy$

定理5.7 若f，$f_y\in C([a,+\infty)\times[c,d])$，且$F(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$在$[c,d]$上收敛，$\int_a^{+\infty}f_y(x,y)dx$关于$y$在$[c,d]$上一致收敛，则$F(y)$在$[c,d]$上有连续的导数，且求导与求积分可交换次序

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}f_y(x,y)dx$$

例5 设$b>a>0$,计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$

解 由$\int_a^b e^{-xy}dy=\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$，原式$=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy$

因为在$0\le x\le+\infty, a\le y\le b$上，有

$$\left|e^{-xy}\right|\le e^{-ax}\qquad(a>0)$$

且$\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx\ (a>0)$收敛，所以$\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$一致收敛。

由定理5.6得 $\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$

$$=\int_a^b\left(-\frac{1}{y}e^{-xy}\right)\Bigg|_0^{+\infty}dy=\int_a^b\frac{1}{y}dy=\ln\frac{b}{a}$$

5 .3 反常重积分

1、无界区域的二重积分

定义5.2 设（σ）是一无界闭区域， $f \in C((\sigma))$,

任作一有界闭区域序列 $(\sigma_1),(\sigma_2),\cdots,(\sigma_n)\cdots$,

使$(\sigma_n) \subset (\sigma)(n=1,2,\cdots)$,

且当$n \to +\infty$时(σ_n)扩张成为(σ)。

如果不论(σ_n)如何作法，极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \iint\limits_{(\sigma_n)} f(x,y)d\sigma$存在，

那么称$f(x,y)$在无界区域(σ)上的二重积分

$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma$收敛。记为

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma = \lim_{n\to+\infty} \iint\limits_{(\sigma_n)} f(x,y)d\sigma$$

定理5.8（收敛判别法）

设$f(x,y)$在无界区域 (σ)上连续，若存在 $\rho_0 > 0$，使$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \rho_0$且$(x,y) \in (\sigma)$时，有

$$|f(x,y)| \leq \frac{M}{\rho^\alpha},$$

其中 M与α均为常数，则当 $\alpha > 2$时，反常二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma$收敛。

2、无界函数的二重积分

定义5.3 设$f(x,y)$在有界闭域（σ）上除一点$P_0(x_0,y_0)$外处处连续，且当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，$f(x,y)\to\infty$.

作点P_0的任一d邻域时$U(P_0,d)$，记$N_d=U(P_0,d)\cap(\sigma)$.

如果不论$U(P_0,d)$如何选取，当$d\to 0$，即N_d缩为点P_0时，极限

$$\lim_{d\to 0}\iint_{(\sigma)\setminus(N_d)} f(x,y)d\sigma$$

存在，那么称无界函数$f(x,y)$在区域(σ)的二重积分$\iint_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma$收敛。

记为
$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma=\lim_{d\to 0}\iint_{(\sigma)\setminus(N_d)} f(x,y)d\sigma$$

定理5.9（收敛判别法）

设 $f(x,y)$ 在有界闭域 (σ) 上除点 $P_0(x_0,y_0)$ 外处处连续，且当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)\to\infty$。若不等式

$$|f(x,y)|\le\frac{M}{\rho^{\alpha}},$$

在 (σ) 上除点 $P_0(x_0,y_0)$ 外处处成立，其中 M 与 α 均为常数，$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

则当 $\alpha<2$ 时，反常二重积分 $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma$ 收敛。

例6 证明无界区域上的二重积分 $I=\iint\limits_{(R^2)} e^{-x^2-y^2}dxdy$ 收敛，并求其值 。

证 $\because \lim\limits_{\rho\to+\infty}\rho^3 e^{-\rho^2}=\lim\limits_{\rho\to+\infty}\dfrac{\rho^3}{e^{\rho^2}}=0$

从而存在 $\rho_0>0$, 使当 $\rho>\rho_0$ 时有 $\dfrac{\rho^3}{e^{\rho^2}}<1$ 即 $e^{-\rho^2}<\dfrac{1}{\rho^3}$

由定理5.8知，反常积分 I 收敛

取 $(\sigma_n)=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le n^2\right\}$

$$I=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\le n^2} e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^n e^{-\rho^2}\rho\,d\rho=\pi$$

若取 $(\sigma_n)=\left\{(x,y)\middle|-n\le x\le n,-n\le y\le n\right\}$

$$\Longrightarrow\quad\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\pi\qquad\text{或}\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

例7 证明反常二重积分 $I=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{1}{|x|+|y|}d\sigma$ 收敛，

其中 $(\sigma)=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$

证 由于

$$(|x|+|y|)^2\ge x^2+y^2$$

从而在（σ）内除点（0,0）外有

$$\frac{1}{|x|+|y|}<\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\rho}$$

由定理5.9知，反常积分 I 收敛

练习1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续， 验证当 $|x|$ 充分小时, 函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

的 n 阶导数存在, 且 $\varphi^{(n)}(x)=f(x)$.

证: 令 $F(x,t)=(x-t)^{n-1}f(t)$, 显然, $F(x,t)$ 及 $F_x(x,t)$ 在原点的某个闭矩形邻域内连续, 所以

$$\varphi'(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (n-1)(x-t)^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{(n-1)!}(\cancel{x-x})^{n-1} f(x)$$

即 $$\varphi'(x)=\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2}f(t)\mathrm{d}t$$

同理 $$\varphi''(x)=\frac{1}{(n-3)!}\int_0^x (x-t)^{n-3}f(t)\mathrm{d}t,\quad \cdots$$

$$\varphi^{(n-1)}(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

于是

$$\varphi^{(n)}(x)=f(x)$$

练习2 求积分$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$之值

解 所求积分为含参变量积分 $I(y)=\int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}dx$ 在y=1处的值

由于 $\frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}$ 及其对 y的偏导数在矩形域 [0,1;0,1]连续，所以

$$I'(y)=\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dx=\frac{1}{1+y^2}\int_0^1\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+x^2}-\frac{y}{1+xy}\right)dx$$

$$=\frac{1}{1+y^2}\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}y-\ln(1+y)\right)$$

$$I(1)-I(0)=\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}y-\ln(1+y)\right)dy$$

$$=\frac{\ln 2}{2}\arctan y\Big|_0^1+\frac{\pi}{8}\ln(1+y^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+y)}{1+y^2}dy=\frac{\pi}{4}\ln 2-I(1)$$

所以 $I(1)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\ln 2+I(0)\right)=\frac{\pi}{8}\ln 2$