第六章　多元数量值函数积分学

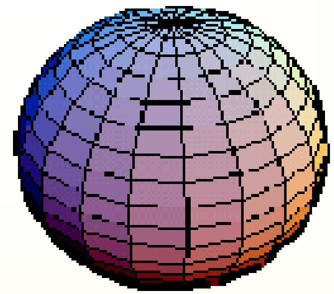
7.3　第二型面积分

习题6.7

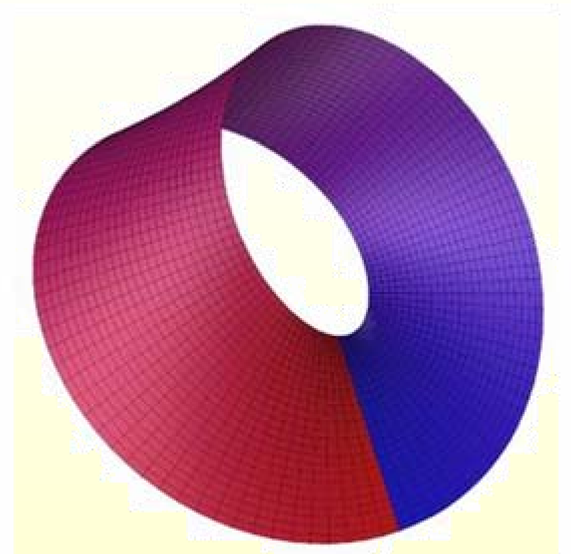
8,11,12(1)(3),13,15

一、有向曲面

- 曲面分类 $\begin{cases}\text{双侧曲面}\\ \text{单侧曲面}\end{cases}$

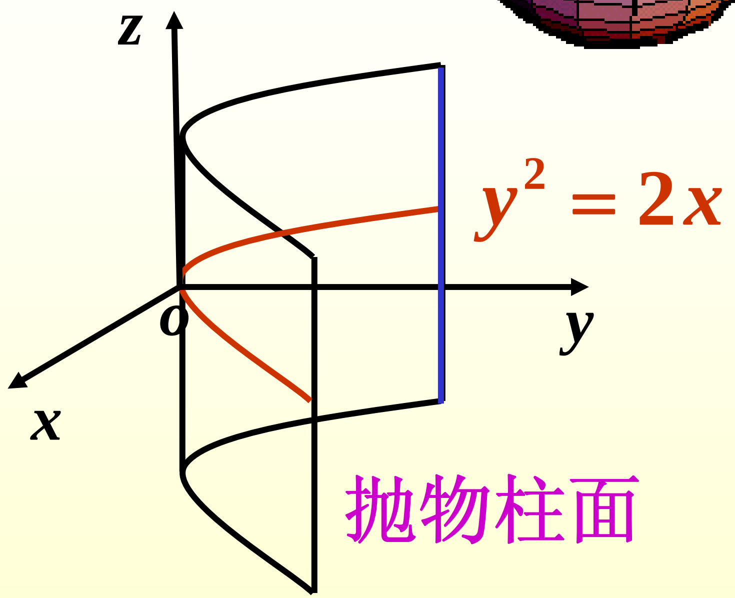


曲面分内侧和外侧



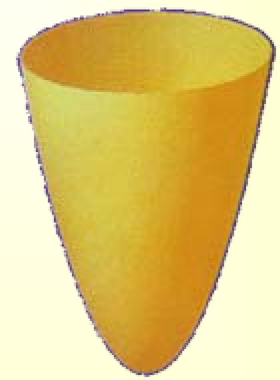
莫比乌斯带

(单侧曲面的典型)



抛物柱面

曲面分左侧和右侧



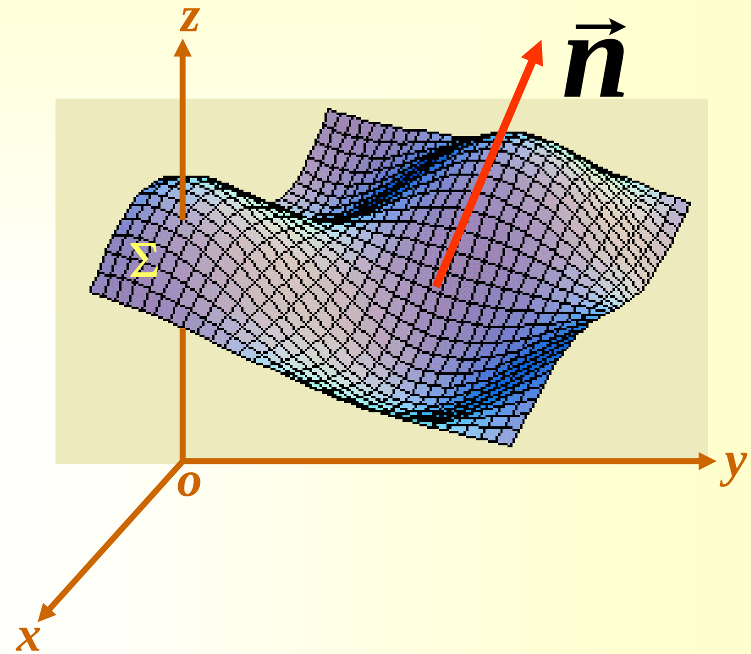
曲面分上侧和下侧

• 指定了侧的曲面叫有向曲面，　其方向用法向量指向

表示：

上侧：法向量朝上

内侧：法向量朝内



设$\vec{e}_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧 <0 为后侧	>0 为右侧 <0 为左侧	>0 为上侧 <0 为下侧	外侧 内侧

二、引例：流向曲面一侧的流量.

1. 引例 设有不可压缩的流体在一空间流速场 $\vec{v}(M)(M\in G)$ 中流动，(Σ)为G中一有向曲面，求流体流向曲面 (Σ)指定一侧的流量（即单位时间内通过曲面的流体的体积）.

分析: 若 Σ 是面积为A 的平面,

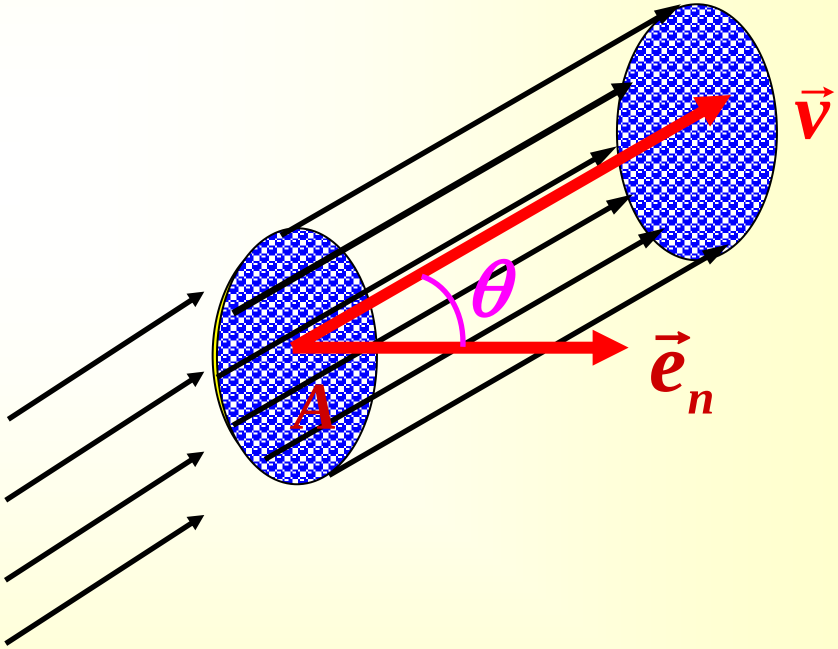
单位法向量:

$$\vec{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

流速为常向量: $\vec{v}$

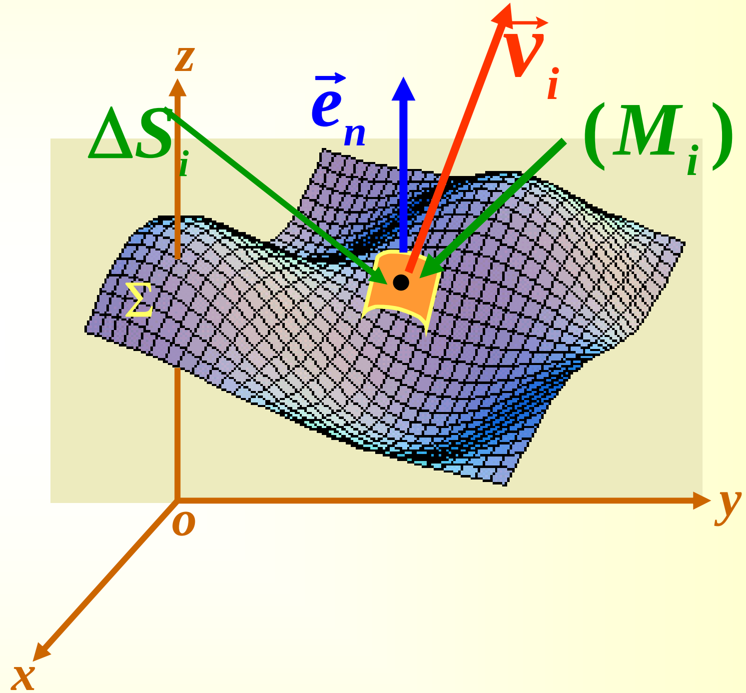
则流量

$$Q=A\cdot|\vec{v}|\cos\theta=A\,\vec{v}\cdot\vec{e}_n$$



对一般的有向曲面Σ，及稳定流动的不可压缩流体的速度场 $\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

用“分，匀，和，精” 进行分析。



分、匀

$$\Delta Q_i \approx \vec{v}(M_i)\cdot\vec{e}_n(M_i)\Delta S_i$$

和

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i(M_i)\cdot\vec{e}_n(M_i)\Delta S_i$$

精

$$Q = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i(M_i)\cdot\vec{e}_n(M_i)\Delta S_i$$

d 为最大子域的直径.

三、第二型面积分的定义

设$\vec{A}(M)$的场域中有一可求面积 的有向曲面（ S ），指定它的一侧，把曲面(S)分成n小块$\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots \Delta S_n$

任取一点$M_i \in (\Delta S_i)$，作点积

$$\vec{A}(M_i) \cdot \vec{e}_n(M_i) \Delta S_i$$

或 $\boxed{\iint\limits_{(S)} \vec{A}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}}$ $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$

作和式 $\sum_{i=1}^{n} \vec{A}(M_i) \cdot \vec{e}_n(M_i) \Delta S_i$ 第二型面积分的向量形式

如果不论怎样划分，点 M_i怎样选取，下述极限收敛于同一值

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{A}(M_i) \cdot \vec{e}_n(M_i) \Delta S_i$$

则称此极限值为向量场 $\vec{A}(M)$沿有向曲面(S)的第二型面积分。记作

$$\iint\limits_{(S)} \vec{A}(M) \cdot \underline{\vec{e}_n \mathrm{d}S} = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{A}(M_i) \cdot \vec{e}_n(M_i) \Delta S_i$$

设 $\vec{A}(M)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

$\vec{e}_n(M)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

则 $\displaystyle\iint\limits_{(S)}\vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\iint\limits_{(S)}\vec{A}(M)\cdot\underline{\underline{\vec{e}_n\mathrm{d}S}}$

两型面积分的联系

$\displaystyle=\iint\limits_{(S)}P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$

$\overrightarrow{dS}$在三个坐标面的投影

$\displaystyle=\iint\limits_{(S)}P(x,y,z)\underline{\cos\alpha\mathrm{d}S}+Q(x,y,z)\underline{\cos\beta\mathrm{d}S}+R(x,y,z)\underline{\cos\gamma\mathrm{d}S}$

记 $\cos\alpha\mathrm{d}S=dy\Lambda dz,\quad \cos\beta\mathrm{d}S=dz\Lambda dx,\quad \cos\gamma\mathrm{d}S=dx\Lambda dy$

$$\boxed{\iint\limits_{(S)}\vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\iint\limits_{(S)}P(x,y,z)dy\Lambda dz+Q(x,y,z)dz\Lambda dx+R(x,y,z)dx\Lambda dy}$$

第二型面积分的坐标形式

四、第二型面积分的物理意义

$$Q = \iint_S \vec{v}(x,y,z) \bullet \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

表示速度场

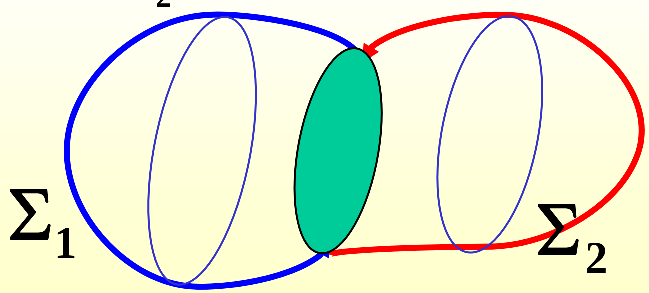
$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

在单位时间内流向曲面Σ指定侧的流量 Q.

五、第二型面积分性质

1^0, $\iint_{\Sigma} = -\iint_{-\Sigma}$ 2^0, $\iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2}$ $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$

3^0, $\oiint_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma_1} + \oiint_{\Sigma_2}$



六、第二型面积分的计算

设Σ是光滑的有向曲面，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$

在(Σ)上连续,则第二型面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dy\wedge dz + Q(x,y,z)dz\wedge dx + R(x,y,z)dx\wedge dy$$ 存在

（1）设 $\sum$ 是光滑的有向曲面，其方程为

$$z = z(x,y),(x,y)\in D_{xy},$$

则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\underline{dx\wedge dy}$$

一投

二代

三定号

$$= \begin{cases} \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\underline{dxdy} & \text{上侧取正} \\ \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\underline{(-dxdy)} & \text{下侧取负} \end{cases}$$

（2）设 Σ 是光滑的有向曲面，其方程为

$$y = y(x,z),(x,z) \in D_{xz},$$

则

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dz\wedge dx$$

$$= \begin{cases} \iint_{D_{xz}} R(x,y(x,z),z)dxdz & 右侧取正 \\ \iint_{D_{xz}} R(x,y(x,z),z)(-dxdz) & 左侧取负 \end{cases}$$

“一投，二代，三定号”

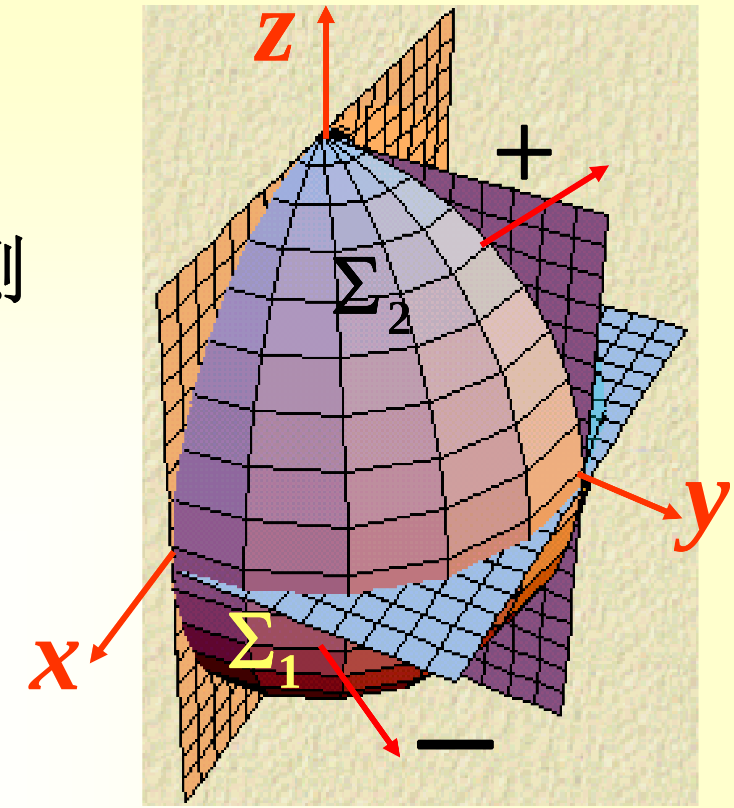
（3）设 Σ 是光滑的有向曲面，其方程为

$$x = x(y,z),(y,z) \in D_{yz},$$

则 $$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\underline{dy \wedge dz}$$

$$= \begin{cases} \iint_{D_{yz}} R(x(y,z), y, z)\underline{dydz} & \text{前侧取正} \\ \iint_{D_{yz}} R(x(y,z), y, z)(\underline{-dydz}) & \text{后侧取负} \end{cases}$$

例1 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,dx\wedge dy$



其中Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧

在$x\geq 0, y\geq 0$的部分.

解 把Σ分成Σ_1和Σ_2两部分

$$\Sigma_1: \quad z_1=-\sqrt{1-x^2-y^2};$$

$$\Sigma_2: \quad z_2=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

$$\iint_{\Sigma} xyz\,dx\wedge dy=\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}$$

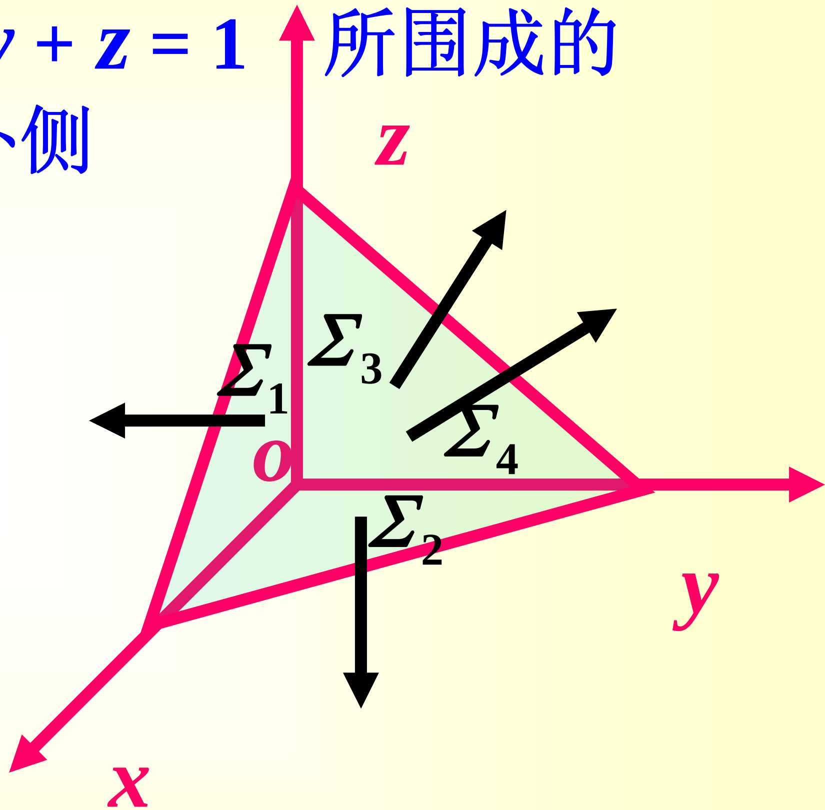
注意：此题不能用对称性

$$=\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})(-dxdy)+\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$=2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=\frac{1}{30}$$

例2 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} xzdxdy + xydydz + yzdzdx$ 其中 Σ 是

平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧



解 Σ 分成四个部分

$\Sigma_1 : y=0, x+z\le 1$ 左侧

$\Sigma_2 : z=0, x+y\le 1$ 下侧

$\Sigma_3 : x=0, y+z\le 1$ 后侧

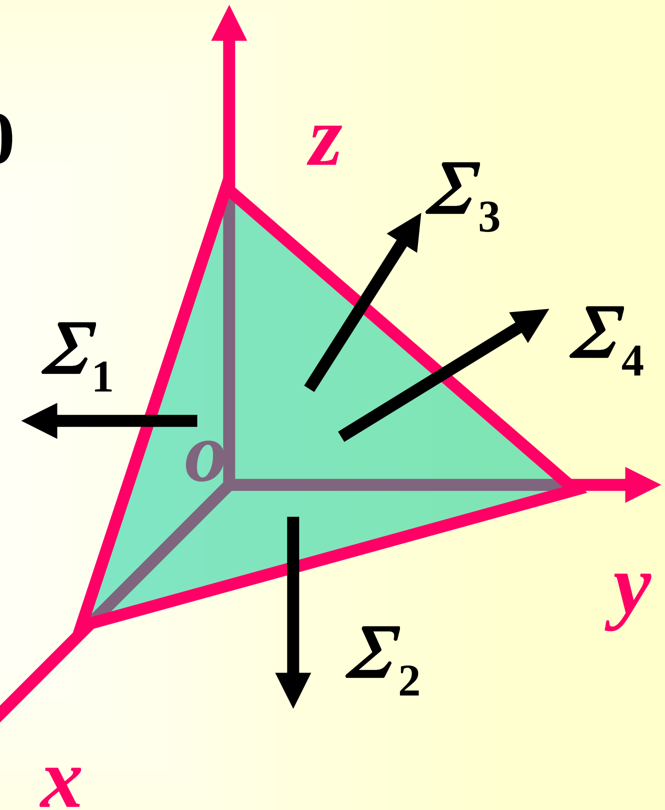
$\Sigma_4 : x+y+z=1$被$x=0, y=0, z=0$所截得的部分 上侧

因Σ_1 在xoy, yoz面上的投影为 0,而在zox面上 $z = 0$

在Σ_1 上 $\iint\limits_{\Sigma_1} xzdxdy + xydydz + yzdzdx = 0$

同理 $\iint\limits_{\Sigma_2} xzdxdy + xydydz + yzdzdx = 0$

$$\iint\limits_{\Sigma_3} xzdxdy + xydydz + yzdzdx = 0$$



在Σ_4 上

$$\iint\limits_{\Sigma_4} xzdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} x(1 - x - y)dxdy = \frac{1}{24}$$

同理 $\iint\limits_{\Sigma_4} xydydz = \frac{1}{24}$, $\iint\limits_{\Sigma_4} yzdzdx = \frac{1}{24}$

所以 $\oiint\limits_{\Sigma} xzdxdy + xydydz + yzdzdx = \frac{1}{8}$

例3 计算 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, $\Sigma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的外侧

解 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$ $\Sigma_1: z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ 上侧

$\Sigma_2: z=-c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ 下侧

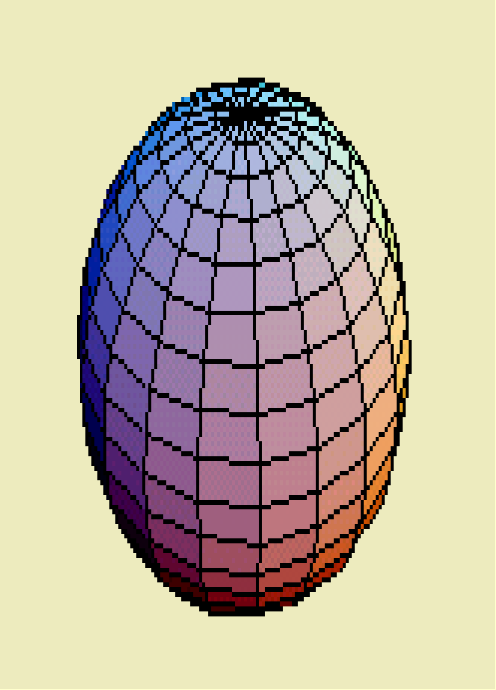
$$\oiint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}$$

$$=\iint\limits_{D} z_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D} z_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{D} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$$

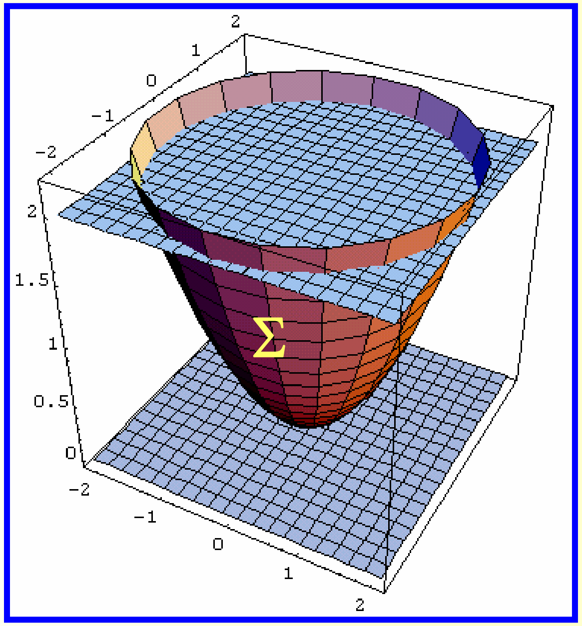
$$=2abc\iint\limits_{D}\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3}abc$$



注意：此题不能用对称性

例4 计算$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dy\wedge dz-zdx\wedge dy$, 其中$\Sigma$是旋转抛物面$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面$z=0$及$z=2$之间的部分的下侧.



解1 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dy\wedge dz=\iint\limits_{\Sigma_前}+\iint\limits_{\Sigma_后}$

$\Sigma_前$: $x=\sqrt{2z-y^2}$ $\quad D_{yz}$: $\dfrac{y^2}{2}\le z\le 2$,

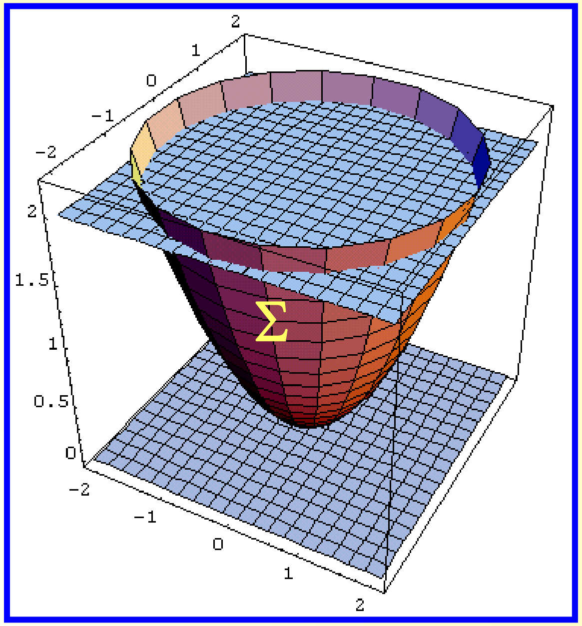
$\Sigma_后$: $x=-\sqrt{2z-y^2}$

$$\iint\limits_{\Sigma_前}=\iint\limits_{D_{yz}}(z^2+\sqrt{2z-y^2})dydz,\quad \iint\limits_{\Sigma_后}=\iint\limits_{D_{yz}}(z^2-\sqrt{2z-y^2})(-dydz)$$

$$\iint\limits_{\Sigma}-zdx\wedge dy=\iint\limits_{D_{xy}}-\frac{1}{2}(x^2+y^2)(-dxdy)\qquad D_{xy}:\ x^2+y^2\le 4$$

解2 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha dS$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy \quad \text{坐标转换法}$$



在曲面Σ上，有

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

$$\therefore \quad \iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint\limits_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)-z]dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)+x]\cdot(-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)rdr$$

$$=8\pi.$$

作业

习题6.7

8,11,12(1)(3),13,15

练习 求 $Q=\oiint\limits_{S} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

其中S是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧.

解 $Q=\oiint\limits_{S} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

$$=\oiint\limits_{S}\{x,y,z\}\bullet\vec{e}_n\mathrm{d}S$$

$$=\oiint\limits_{S}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}S$$

$$=\oiint\limits_{S}R\,\mathrm{d}S=4\pi R^3$$