工科数学分析基础

李换琴

西安交通大学理学院

hqlee@mail.xjtu.edu.cn

第七章　常微分方程

1 常微分方程的基本知识

2 线性微分方程组

3 常系数线性微分方程组

4 高阶线性微分方程

习题7.1　1(3), 6

第一节　常微分方程的基本知识

一阶方程　$y' = f(x, y)$　或　$F(x, y, y') = 0$

n 阶方程　$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$

或　$F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

通解　$y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$

或　$\psi(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0$　隐式解

对n阶方程的一般形式

$$\frac{d^n x}{dt^n}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2},\cdots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) \qquad (1.1)$$

令 $x_1=x,\ x_2=\frac{dx}{dt},\quad x_3=\frac{d^2x}{dt^2},\ \cdots,\quad x_n=\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$

则有

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=x_2\\ \frac{dx_2}{dt}=x_3\\ \cdots \qquad\qquad (1.2)\\ \frac{dx_{n-1}}{dt}=x_n\\ \frac{dx_n}{dt}=f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$

设$x=\varphi(t)$是(1.1)的解，

则$x_1=\varphi(t),x_2=\varphi'(t),\cdots,$
$x_n=\varphi^{(n-1)}(t)$是(1.2)的解

反之 设$x_1=\psi_1(t),x_2=\psi_2(t),$
$\cdots,x_n=\psi_n(t)$是(1.2)的解，

则$x=\psi_1(t)$是(1.1)的解。

一阶微分方程组的一般形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(t, x_1, x_2, \cdots x_n) \\ \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases} \iff \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t, \vec{x}(t)).$$

记

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}.$$

1）解 使 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t, \vec{x}(t))$的 $\vec{x} = \vec{x}(t)$.

2）通解 3）特解 4)定解条件 5)初值条件 $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$.

定理1.1（解的存在唯一性定理）

设 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 在 $G=\{(t,\vec{x})\,\big|\,|t-t_0|\le a,\|\vec{x}-\vec{x}_0\|\le b\}$

上连续，且对 $\vec{x}$ 满足 Lipschitz 条件

$$\|\vec{f}(t,\vec{x}_1)-\vec{f}(t,\vec{x}_2)\|\le L\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\| \quad (L>0)$$

令 $M=\max\limits_{G}\|\vec{f}(t,\vec{x})\|,\quad h=\min(a,\dfrac{b}{M}),\ 0<h^*<\min(h,\dfrac{1}{L})$

则初值问题 $$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$$

$$\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0.$$

在 $|t-t_0|\le h^*$ 上存在唯一解 $\vec{x}=\vec{x}(t).$

1.2 微分方程组及其解的几何解释

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y) \end{cases}$$

它的解 $x = x(t), y = y(t)$ 在以 t, x, y 为坐标的空间中确定了一条曲线:积分曲线

线素场 方程组在以 t, x, y 为坐标的空间中确定了 一个方向场:

$$(1, f_1(t,x,y), f_2(t,x,y))$$

如果把时间 t 当作参数,仅考虑 x, y 为坐标的空间,

此空间称为方程组的 相平面(相空间)。

在相平面中,方程组的解所描述的曲线称为轨线.

(t,x,y)空间------增广相空间(增广相平面)

例1 已知微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x,$

(1) 求它的轨线族方程，在相平面上轨线代表什么曲线;

(2) 求微分方程组的通解，它在增广相平面上表示什么曲线;

(3) 从几何上说明积分曲 线与轨线的关系。

解 （1） $$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\quad\Rightarrow x^2+y^2=C^2$$ 圆

（2） $$\begin{cases} x=C_1\cos(t+C_2) \\ y=C_1\sin(t+C_2) \end{cases}$$ 螺旋线

（3） 轨线是积分曲线在相平面的投影曲线。