第七章 光学谐振腔

7.0 引言

谐振腔的构成： 在激活物质的两端恰当地放置两个反射镜片（球面镜或平面镜），就构成一个最简单的光学谐振腔。

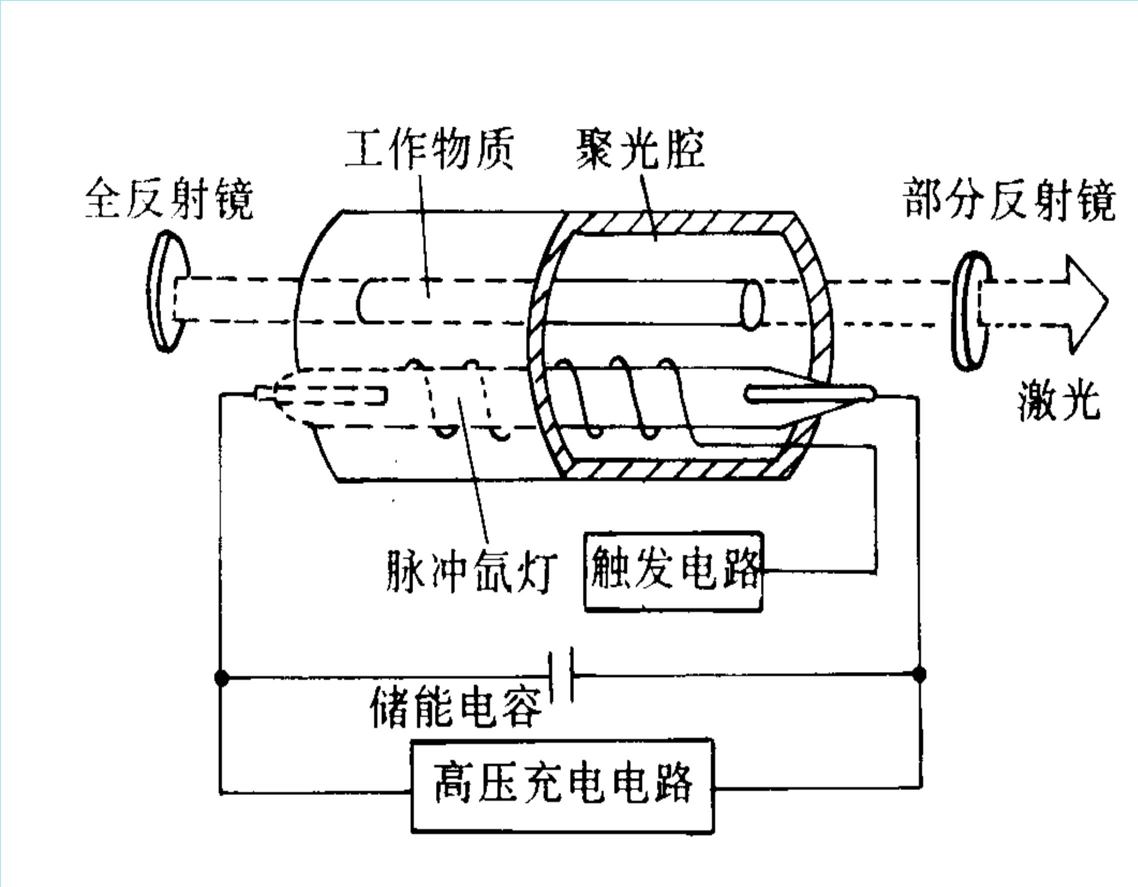
谐振腔的作用： 谐振腔是激光器的一个重要组成部分。

1、提供光学正反馈：

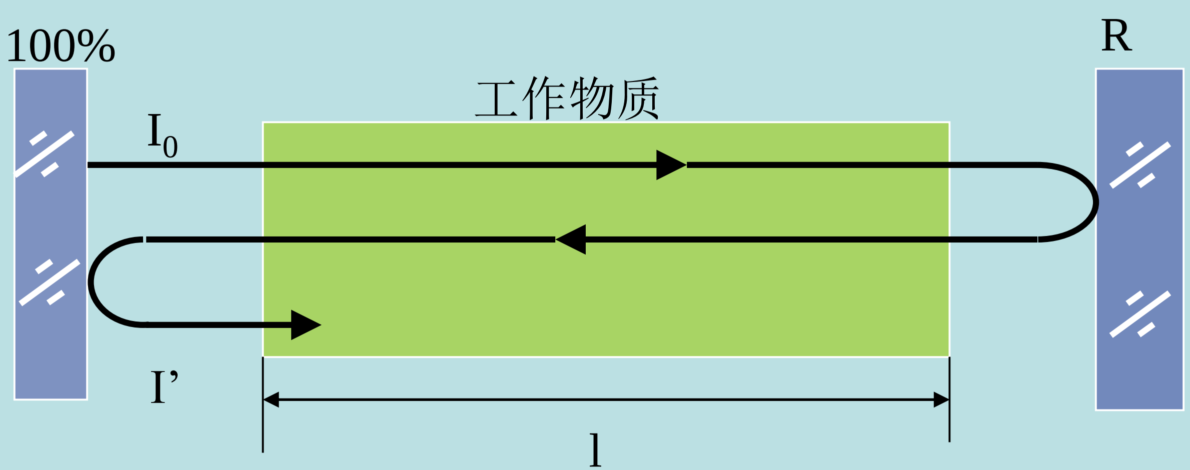
以便在腔内共振频率处建立高的场强，维持自激振荡。

2、频率滤波和控制光束空间特性：

有效地控制腔内实际振荡的模式数目，使大量光子集结在少数几个状态中，提高光子简并度，获得单色性好的相干光。(调节腔的几何参数可以直接控制激光束的横向分布特性、光斑尺寸、谐振频率、光束发散角等。)



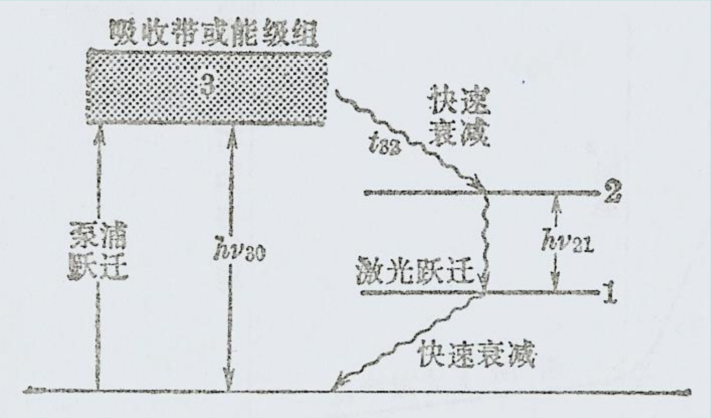
1. 激光工作物质
2. 泵浦源
3. 聚光腔
4. 谐振腔
5. 冷却与滤光



激光器中谐振腔的作用

1、提供光学正反馈：

在腔内共振频率处建立高的场强，维持自激振荡。

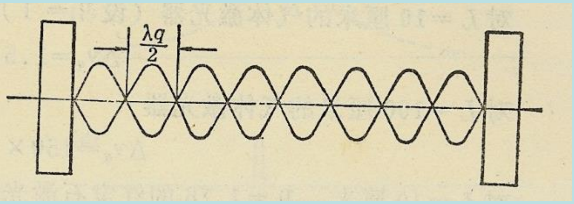


$$(W_{21})_i = W_i(\nu) = \frac{\lambda^2 I_\nu}{8\pi h\nu n^2 t_{spont}} g(\nu)$$

2、频率滤波：

有效地控制腔内实际振荡的模式数目，使大量光子集结在少数几个状态中，提高光子简并度，获得单色性好的相干光。

$$k_q l - (m+n+1)(\tan^{-1}(z_2/z_0) - \tan^{-1}(z_1/z_0)) = q\pi$$

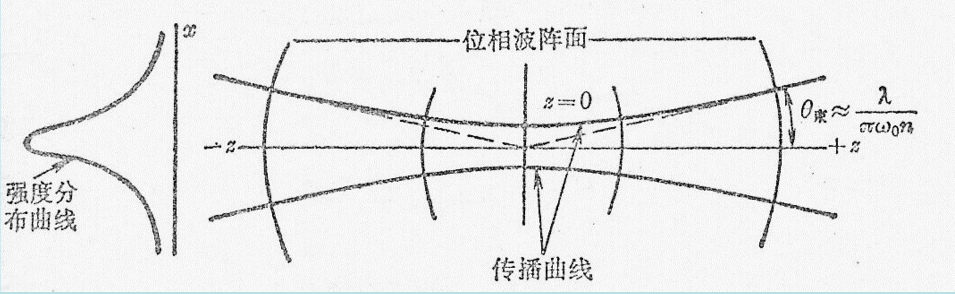


3、控制光束空间特性：

调节腔的几何参数可以直接控制激光束的横向分布特性、光斑尺寸、谐振频率、光束发散角等。

$$\omega(z) = \omega_0[1+\frac{z^2}{z_0^2}]^{1/2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{r}{z}) = \tan^{-1}(\frac{\lambda}{\pi\omega_0 n}) \approx \frac{\lambda}{\pi\omega_0 n}$$



7.1 球面谐振腔

激光器输出的高斯光束模式依赖于谐振腔参数的选择，高斯光束高阶模电场可以写成：

$$E(x,y,z)=E_0\frac{\omega_0}{\omega(z)}H_n(\sqrt{2}\frac{x}{\omega(z)})H_m(\sqrt{2}\frac{y}{\omega(z)})$$
$$\times\exp[-\frac{x^2+y^2}{\omega^2(z)}-ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)})-ikz+i(n+m+1)\eta(z))] \qquad \textbf{(7.1-2)}$$

其中高斯光束光斑尺寸

$$\omega(z)=\omega_0[1+\frac{z^2}{z_0^2}]^{1/2} \qquad z_0=\frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda} \qquad \textbf{(7.1-3)}$$

高斯光束波振面的曲率半径

$$R(z)=z[1+\frac{z_0^2}{z^2}] \qquad \textbf{(7.1-4)}$$

位相因子和轴上相移分别为

$$\eta(z)=\tan^{-1}(\frac{z}{z_0})$$

$$\theta_{m,n}(z)=kz-(n+m+1)\tan^{-1}(z/z_0) \qquad \textbf{(7.1-4a)}$$

另外，H_n 为 $\boldsymbol{n}$ 阶厄密多项式。

厄密多项式前几个表达式：

$H_0=1$；　$H_1=2\xi$

$H_2=4\xi^2-2$；　$H_3=8\xi^3-12\xi$

$H_4 = 16\xi^4-48\xi^2+12$

$H_5=32\xi^5-160\xi^3+120\xi$

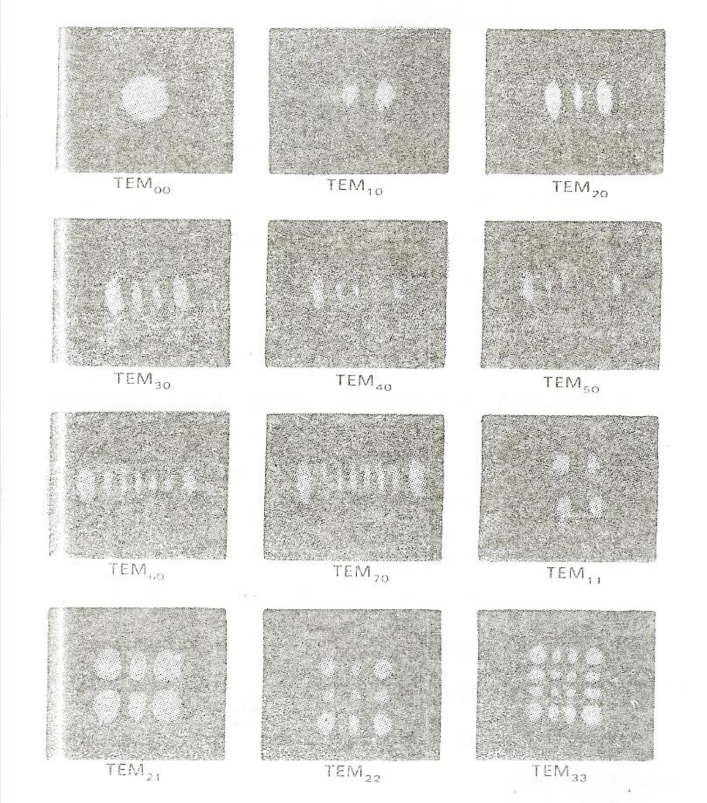


图6.7 高斯光束基模和几个低阶模的电场分布。

一、已知高斯光束，确定光学谐振腔反射镜的曲率半径和位置

如图6.5，由上述方程组所描述的高斯光束确定后，只要在 z_1 和 z_2 点放置两个反射镜，反射镜的曲率半径要和传播光束在这两点的曲率半径相匹配，就可以构成光学谐振腔。

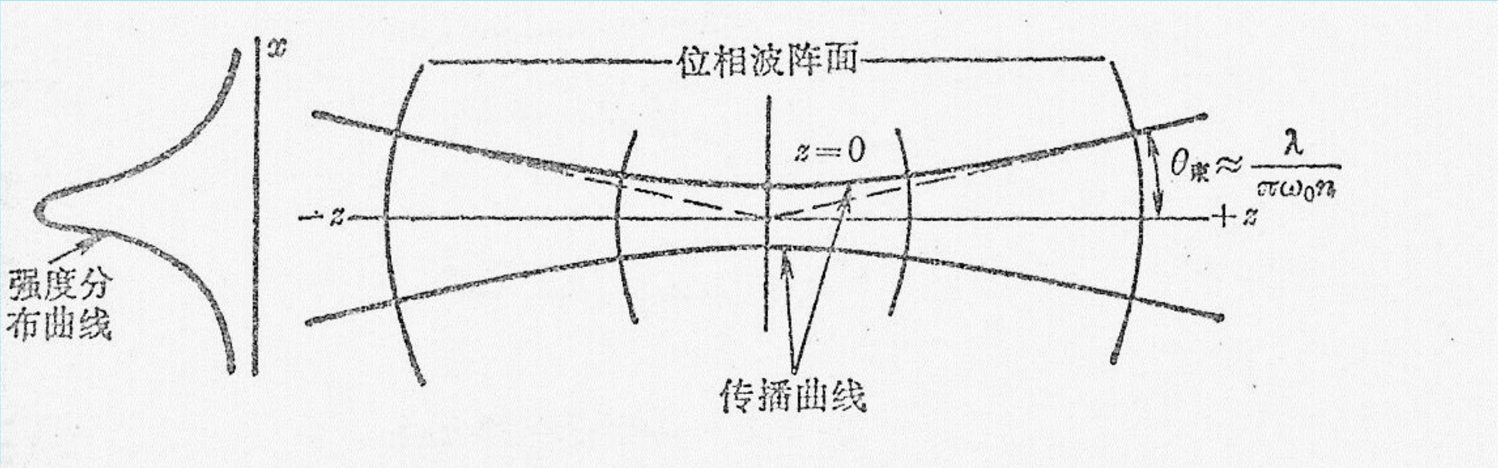


图 6.5　高斯光束的传播

由(7.1-4)式可得

$$z_1 = \frac{R_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{R_1^2 - 4z_0^2}$$

$$z_2 = \frac{R_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{R_2^2 - 4z_0^2} \qquad (7.1\text{-}5)$$

对于给定最小光斑尺寸（束腰）

$$\omega_0 = (\frac{\lambda z_0}{\pi n})^{1/2}$$

可以用(7.1-5)式求出 z_1 和 z_2 位置，在这两个位置上分别放置曲率半径为 R_1 和 R_2 的反射镜。

二、已知光学谐振腔（R_1，R_2 和 l），确定高斯光束参数

当光学谐振腔的曲率半径 R_1，R_2 和反射镜间距 l 已知，可以求出最小光斑尺寸（束腰）ω_0 及其相对反射镜的位置，以及镜面上的光斑尺寸 $\omega(z_1)$ 和 $\omega(z_2)$。

取反射镜间距为

$$l = z_2 - z_1$$

由**(7.1-5)**式可以得到

$$z_0^2 = \frac{l(-R_1 - l)(R_2 - l)(R_1 - R_2 - l)}{(R_1 - R_2 - 2l)^2} \qquad \textbf{(7.1-6)}$$

曲率中心在镜面的左面时，反射镜的曲率半径取正号，反之为负号。

最小光斑尺寸（束腰）：

$$\omega_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi n}\right)^{1/2}$$

束腰的位置：用(7. 1−5)式求出 z_1 或 z_2 位置即可确定。

镜面处光斑尺寸 $\omega(z_1), \omega(z_2)$ ：用**(7.1-3)**的下面公式求出。

$$\omega(z) = \omega_0 [1 + \frac{z^2}{z_0^2}]^{1/2}$$

对称反射镜谐振腔

令 $R_2=-R_1=R$，可得

$$z_0^2=\frac{l(2R-l)}{4} \tag{7.1-7}$$

束腰：
$$\omega_0=(\frac{\lambda z_0}{\pi n})^{1/2}=(\frac{\lambda}{\pi n})^{1/2}(\frac{l}{2})^{1/4}(R-\frac{l}{2})^{1/4} \tag{7.1-8}$$

将 $z=\dfrac{l}{2}$ 代入(7.1-3)式，可以求得镜面光斑尺寸，

$$\omega_{1,2}=(\frac{\lambda l}{2\pi n})^{1/2}(\frac{2R^2}{l(R-l/2)})^{1/4} \tag{7.1-9}$$

情形一：$R>>l$（近似平行平面腔）

把(7.1-8)和(7.1-9)两式相比较可得，

$$\omega_{1,2}\cong\omega_0$$

谐振腔内光束的扩展很小。

情形二：对称共焦腔（$R=l$ ）

由(7.1-9)式可以求得最小镜面光斑尺寸的 R 值，即由

$$\frac{d\omega_{1,2}}{dR}=\frac{d\left(\dfrac{2R^2}{l(R-l/2)}\right)^{1/4}}{dR}=0 \quad \text{可得} \quad R=l$$

这时两个反射镜的焦点（**f=R/2**）重合, 因此称为对称共焦腔。

可得对称共焦腔束腰：

$$(\omega_0)_{共焦}=\left(\frac{\lambda l}{2\pi n}\right)^{1/2} \qquad \textbf{(7.1-10)}$$

对称共焦腔镜面光斑尺寸：

$$(\omega_{1,2})_{共焦}=\sqrt{2}\,(\omega_0)_{共焦} \qquad \textbf{(7.1-11)}$$

即由中心到镜面光束的光斑尺寸增加$\sqrt{2}$ 倍。

举例：设计一个对称谐振腔。

激光波长 $\lambda = 10^{-4}$ **cm**

反射镜间距 $l = 2$ **m**

共焦腔 $R = l = 2$ **m**

取折射率 **n=1**

由**(7.1-10)**式可得最小光斑尺寸（束腰）：

$$(\omega_0)_{共焦} = \left(\frac{\lambda l}{2\pi n}\right)^{1/2} = 0.056 \text{ cm}$$

由**(7.1-11)**式可得镜面光斑尺寸：

$$(\omega_{1,2})_{共焦} = \sqrt{2}\,(\omega_0)_{共焦} = 0.08 \text{ cm}$$

如果要求镜面光斑尺寸： $(\omega_{1,2}) = 0.3$ **cm**

将其代入(7.1-9)，并假定 $R >> l$ ，可得

$$\frac{\omega_{1,2}}{(\lambda l/2\pi)^{1/2}} = \frac{0.3}{0.056} = (\frac{2R}{l})^{1/4}$$

由此可得 $R \approx 400l = 800m$

于是由(7.1-7)式的 $z_0^2 = \dfrac{l(2R-l)}{4}$ 求出 z_0^2，

代入(7.1-3)式可得最小光斑尺寸（束腰）：

$$\omega_0 = 0.9994\,\omega_{1,2} \approx 0.3 \text{ cm}$$

因此，若将镜面光斑尺寸从 **0.08cm** 增加到 **0.3 cm**，

就需要采用近似平面的反射镜 $R = 800m$

7.2 模式的稳定判据和谐振腔的自洽解

谐振腔的参数选择必须使谐振腔能够维持低损耗（即高Q值的场模），为此需要满足两个条件：

1. 反射镜的尺寸:

a_1, a_2 应当满足关系式

$$\frac{a_1 a_2}{\lambda l} \geq 1$$ （衍射损耗）

$$(\omega_0)_{共焦} = \left(\frac{\lambda l}{2\pi n}\right)^{1/2}$$

2. 光学谐振腔的稳定条件: 应使一组光线在两个反射镜之间经多次往返后（如20-100次）并不逸出谐振腔。

首先讨论衍射损耗，一般情况需要满足

$$\frac{a_1 a_2}{\lambda l} \geq 1$$

为了维持较低的衍射损耗，需要镜面尺寸大于镜面处光斑尺寸。镜面处光斑尺寸与谐振腔参数的选择有关，这里仅考虑对称腔结构

$$R_1 = R_2 = R$$

考虑任意 l/R 值的镜面光斑尺寸与共焦腔 ($l/R=1$) 最小镜面光斑尺寸的比值，由(7.1-9)式与(7.1-11)式的比值可得，

$$\frac{\omega_{1,2}}{(\omega_{1,2})_{confocal}} = \left\{\frac{1}{(l/R)[2-(l/R)]}\right\}^{1/4} \qquad \textbf{(7.2-1)}$$

图 7.2 给出了(7.2-1)式的结果，可见在 l/R =0（平面平行反射镜）和 l/R =2 （两个共心反射镜）时，光斑尺寸变成无限大，从而因衍射损耗使得大部分光束能量在反射镜边缘“逸出”。

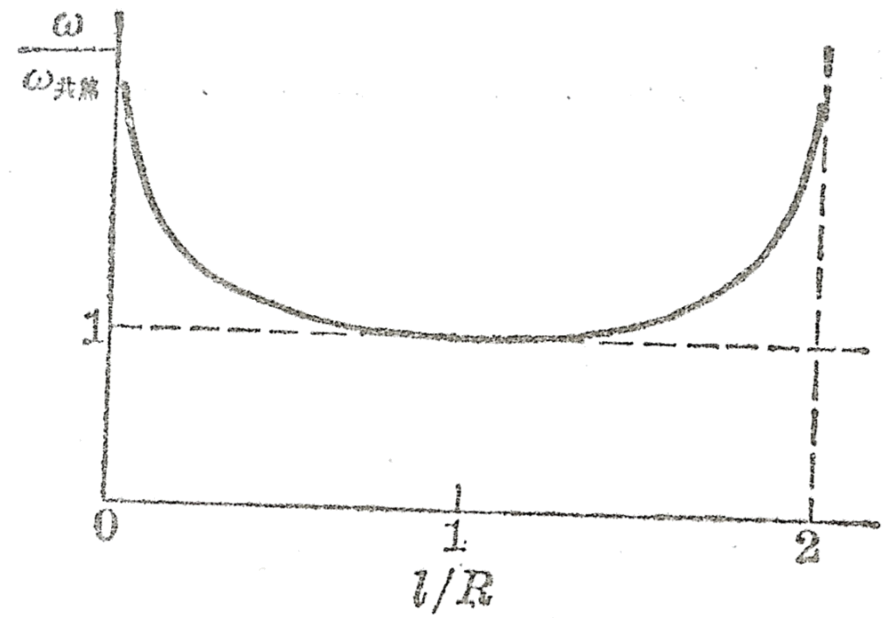


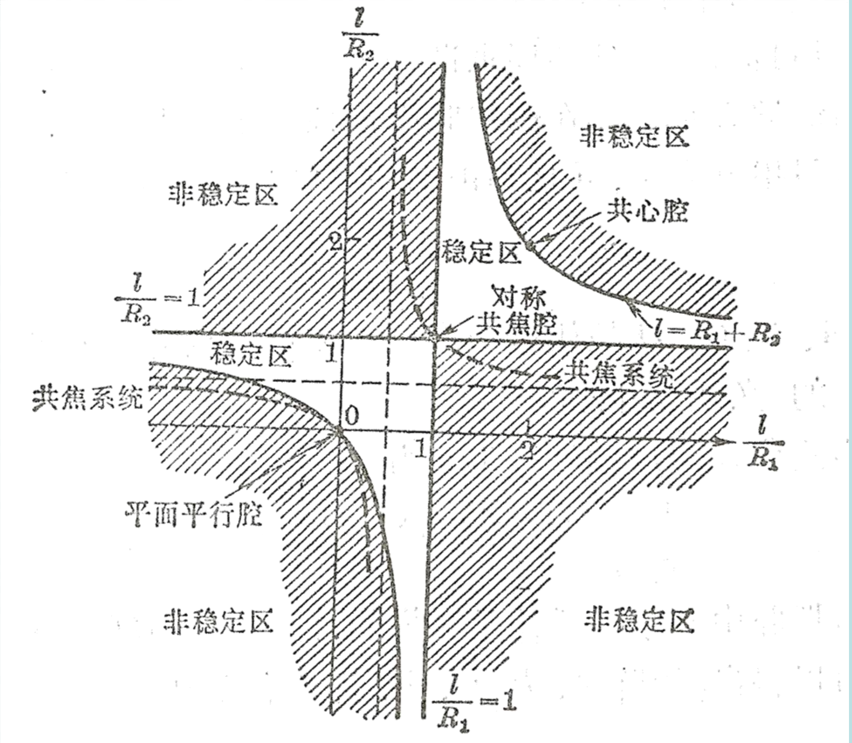
图 7.2 在对称谐振腔镜面处的光斑尺寸与共焦腔 ($l/R=1$) 镜面光斑尺寸之比值

光学谐振腔的稳定条件

在(6.1-16)式中我们已经推导出了光学谐振腔的稳定条件：

$$0 \le \left(1-\frac{l}{R_1}\right)\left(1-\frac{l}{R_2}\right) \le 1 \qquad \textbf{(7.2-2)}$$

稳定条件可以方便地用稳定图7.4来表示。由稳定图可见，共心腔（$R_1+R_2=l$），对称共焦腔($R_1=R_2=l$ ）和平面平行腔（$R_1=R_2=\infty$）都靠近非稳定区，因此只要参量有微小的偏离就会引起严重的损耗。



7.4 光学谐振腔的稳区图。阴影（高损耗）区不满足稳定条件 $\le\left(1-\frac{l}{R_1}\right)\left(1-\frac{l}{R_2}\right)\le 1$，而空白(低损耗)区满足稳定条件。$R_1$

在广义谐振腔中的模式---自洽场方法

除了上面所讨论的简单谐振腔（由两个球面镜组成），根据需要经常采用较为复杂的谐振腔：行波腔，折叠腔等。

复杂谐振腔稳定模式条件：高斯光束经过往返一周后能够自再现。利用ABCD定律(6.7-6)式， $q_1 = q_2 = q$

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D} \qquad \textbf{(7.2-3)}$$

式中A，B，C，D是往返一次的光线矩阵元。

由**(7.2-3)**式求解可以得到，

$$\frac{1}{q^{(\pm)}} = \frac{(D-A) \pm \sqrt{(D-A)^2 + 4BC}}{2B} \qquad \textbf{(7.2-4)}$$

通常谐振腔中单个元件是么模的（直线段、球面反射镜等），即，

$$A_i D_i - B_i C_i = 1$$

比如直线段，
$$\begin{vmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

和球面反射镜，
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{vmatrix}$$

都是么模的，
$$AD - BC = 1$$

于是可以得到总的矩阵（各单独矩阵的乘积）也为么模矩阵，

由此，(7.2-4)式可以写成

$$\frac{1}{q^{(\pm)}} = \frac{D-A}{2B} \pm i\frac{\sqrt{1-(\frac{D+A}{2})^2}}{B} \qquad \textbf{(7.2-5)}$$

按照(7.1-2)式，高斯光束的稳定条件是光斑尺寸的平方 ω^2 为实数。利用关系式

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i\frac{\lambda}{\pi\omega^2 n}$$

与上式比较可得复杂谐振腔的稳定条件：

$$\left|\frac{D+A}{2}\right| \le 1 \qquad \textbf{(7.2-6)}$$

7.3 共振频率

以上我们讨论了谐振腔的空间特性（谐振腔的横模）与谐振腔参数的关系，下面讨论已知横模的共振频率（谐振腔的纵模）。

根据模式在谐振腔往返一次位相延迟2π整数倍的要求来确定共振频率（或谐振腔长度等于导波半波长的整数倍）。这样能够在谐振腔的轴线方向建立稳定的驻波，从而形成激光振荡。

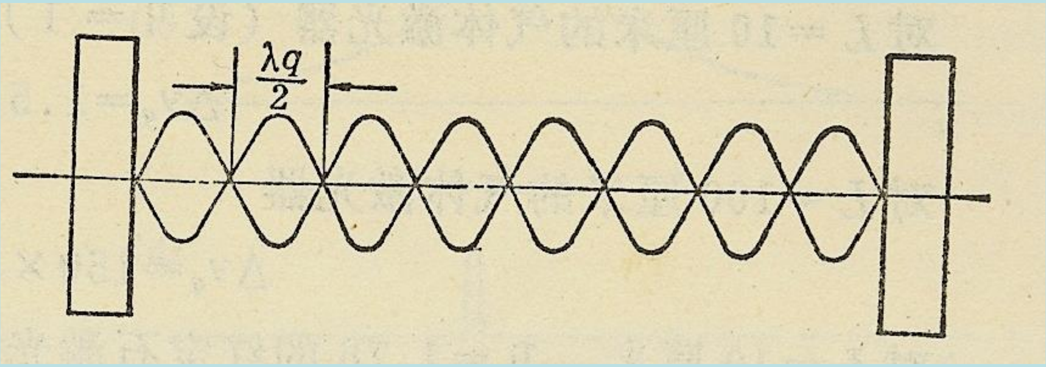


图7.A 驻波谐振腔中的驻波

考虑在z_1和z_2处的两个反射镜构成的球面谐振腔，则同一横模（m、n）的共振频率可以由共振条件求出

$$\theta_{m,n}(z_2)-\theta_{m,n}(z_1)=q\pi \tag{7.3-1}$$

其中q为某一整数，而相移 $\theta_{m,n}(z)$ 可以由**(7.1-4a)**式求出，

$$\theta_{m,n}(z) = kz - (m+n+1)\tan^{-1}(z/z_0) \qquad \textbf{(7.3-2)}$$

其中 $z_0 = \dfrac{\pi\omega_0^2 n_0}{\lambda}$ ，$\boldsymbol{n_0}$为折射率。

于是共振条件(7. 3-1)式写成

$$k_q l - (m+n+1)(\tan^{-1}(z_2/z_0) - \tan^{-1}(z_1/z_0)) = q\pi \qquad \textbf{(7.3-3)}$$

式中 $l = z_2 - z_1$ 为谐振腔长度。由此可得

$$k_{q+1} - k_q = \frac{\pi}{l}$$

利用关系式 $k = 2\pi\nu n_0 / c$ 可以得到谐振腔相邻两个纵模（腔内纵向场分布---驻波场）的频率之差 （称为纵模间隔）： $\Delta\nu_q$

$$\nu_{q+1} - \nu_q = \frac{c}{2n_0 l} \qquad \textbf{(7.3-4)}$$

7.4 光学谐振腔中的损耗

通常用三种不同参量描述谐振腔的损耗：单程损耗，光子寿命，品质因数 **Q**。

光子寿命

定义在经过时间 τ_c后，腔内的光能（光子数）衰减为初始光能（光子数）的 **1/e**，即

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{t_c}} \qquad \textbf{(7.4-A)}$$

将上式两边对时间微分，考虑到光能与光子数有关系 $E = Nh\nu$

可以得到

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{E(t)}{t_c} \qquad \textbf{(7.4-1)}$$

时间 t_c 被定义为腔内光子寿命。

单程损耗

设谐振腔单程损耗为L，谐振腔长度为 l，则光在谐振腔单程度越时间为 nl/c ，则单位时间内因单程损耗导致光强的衰减可以写成

$$\frac{dE}{dt} = -LE/(nl/c) = -\frac{cL}{nl}E$$

将上式与(7.4-1)式比较可得光子寿命与单程损耗之间的关系为

$$t_c = \frac{nl}{cL} \tag{7.4-2}$$

设反射镜的反射率为 R_1 和 R_2，平均损耗分布常数为 α，则单程平均损耗为

$$L = \alpha l - \ln\sqrt{R_1 R_2}$$

于是光子寿命也可以写成

$$t_c = \frac{nl}{c(\alpha l - \ln\sqrt{R_1 R_2})_{R_1 R_2 \to 1}} \approx \frac{nl}{c[\alpha l - (1 - \sqrt{R_1 R_2})]} \qquad \textbf{(7.4-3)}$$

品质因数Q

谐振腔品质因数定义为

$$Q = -\frac{\omega E}{dE/dt} \qquad \textbf{(7.4-4)}$$

E 为光子能量，而 $-dE/dt$ 为耗散功率。

比较(7.4-4)和(7.4-1)式可得品质因数和光子寿命的关系

$$Q = \omega t_c \tag{7.4-5}$$

品质因数Q与谐振腔的洛仑兹响应曲线的半高全宽度$\Delta \nu_{1/2}$ 的关系为

$$\Delta \nu_{1/2} = \frac{\nu}{Q} = \frac{1}{2\pi t_c} \tag{7.4-6}$$

$\Delta \nu_{1/2}$也称作谐振腔本征模的谱线宽度（或谐振腔纵模的谱线宽度）。

可见，高Q值（或长光子寿命）谐振腔，有窄的频率宽度。利用(7.4-3)式，上式可以写成

$$\Delta \nu_{1/2} = \frac{c(\alpha - \frac{1}{l}\ln\sqrt{R_1 R_2})}{2\pi n} \tag{7.4-7}$$

光学谐振腔中的几种损耗

1．不完全反射所引起的损耗

谐振腔：全反射镜 99.99%

输出镜（部分反射）95%

2．激光介质中的吸收和散射

吸收损耗：激光介质中激发态吸收；

散射损耗：固体激光介质的不均匀等引起的散射损耗。

3．衍射损耗

对于给定的一组反射镜，横模的阶次m，n越高，衍射损耗越大。因为高阶横模能量分布相对扩散。图7.7给出了平行平面腔和共焦腔的几个低阶模的衍射损耗，可见球面腔的衍射损耗比平面腔低得多。

图7.7

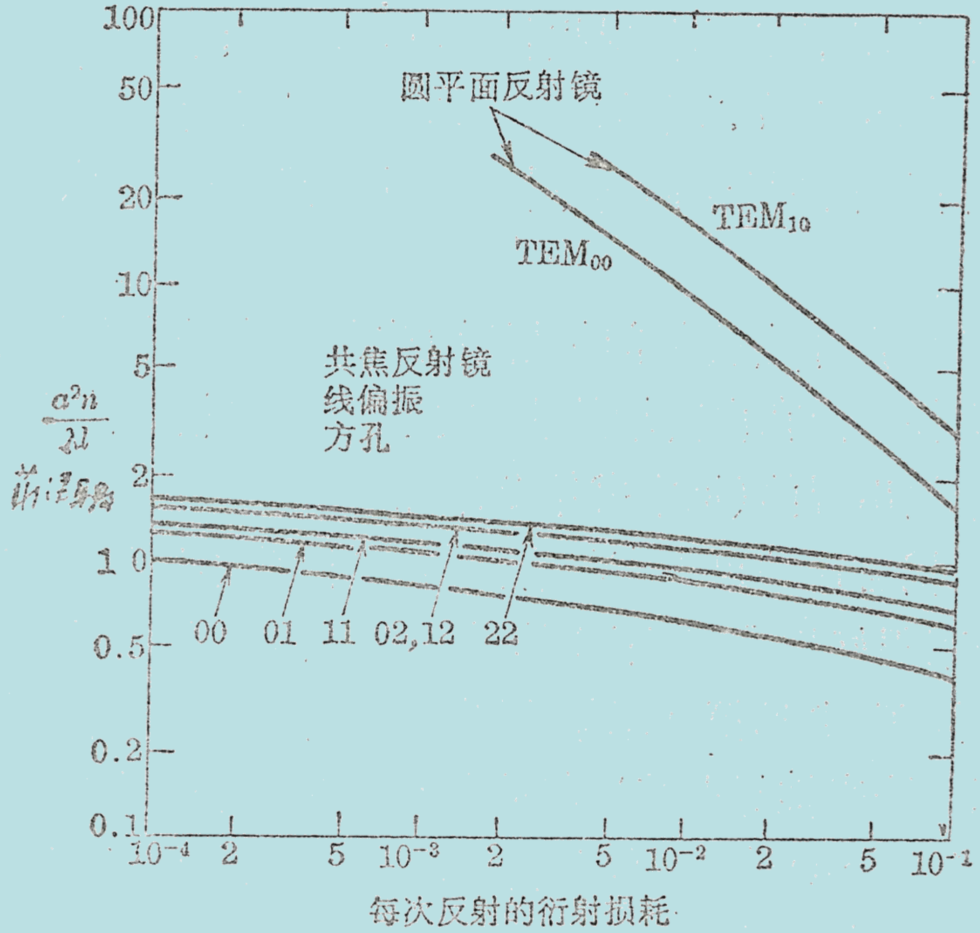


图 7.7　平面平行腔和共焦腔几个低阶模式的衍射损耗；a 是反射镜半径，l 是反射镜间隔。箭头所指的一对数字是横模的阶次 m，n[5]

高阶横模抑制：在谐振腔内放置适当孔径的光阑，允许大部分基模（0,0,q）能量通过，同时又能够增加高阶模的损耗，从而抑制高阶模的振荡。