

第八章 辐射场与原子系统的相互作用

本章采用半经典的密度矩阵理论研究原子系统与光辐射场相互作用。包括：原子的极化率、感应跃迁、自发跃迁、光放大、谱线加宽、增益饱和。

体系的 Schrodinger 方程：
$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V = \hat{H}$$

$$\hat{H} |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$$

Hamilton 算符含有与时间有关的微扰，即：

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + H'(t)$$

\hat{H}_0 ：系统（原子、分子）未受光场作用的非微扰哈密顿

$\hat{H}'(t)$ ：光辐射场与原子（分子）系统相互作用微扰哈密顿

补充内容：辐射场与原子系统的相互作用 —密度矩阵理论

➤密度矩阵

当系统的精确波函数不知道的情况下计算算符的平均值时，经常需要使用密度矩阵方法。

算符A的平均值为

$$\begin{aligned}\langle \hat{A} \rangle &= \int \psi^*(r, t) \hat{A} \psi(r, t) dv \\ &= \sum_{m, n} c_m^*(t) \left(\int u_m^*(r) \hat{A} u_n(r) dv \right) c_n(t) \\ &= \sum_{m, n} c_m^* c_n A_{mn}\end{aligned}\tag{3-4}$$

其中 $c_n(t)$ 是波函数 $\psi(r, t) = \sum c_n(t) u_n(r)$ 展开式中的系数。

$$A_{mn} = \int u_m^*(r) \hat{A} u_n(r) dv$$

假设系统的精确状态 $c_n(t)$ 是未知的，然而有足够的信息计算 $c_m^* c_n$ 的系综平均值（经典统计平均），

可以求算符A的平均值的系综平均为

$$\overline{\langle A \rangle} = \sum_{m,n} \overline{c_m^* c_n} A_{mn} \quad (3-5)$$

定义**密度矩阵** $\rho_{nm} = \overline{c_m^* c_n}$ (3-6)

(3.14-5)式也可以写成，即**算符A的平均值的系综平均**

$$\begin{aligned} \overline{\langle A \rangle} &= \sum_{m,n} \overline{c_m^* c_n} A_{mn} = \sum_n \rho_{nm} A_{mn} = \sum_n (\rho A)_{nn} \\ &= \text{tr}(\rho A) \end{aligned} \quad (3-8)$$

式中符号tr表示矩阵迹运算。

$\overline{\langle A \rangle}$ 表示两种平均过程：

$\langle \rangle$ 表示量子力学平均： $\langle A \rangle = \int \psi^*(r, t) A \psi(r, t) dv$

$\overline{\langle \rangle}$ 表示系综平均（相当于经典统计平均）：对系综内所有 N 个系统的平均。

$$\rho_{nm} = \overline{c_m^* c_n} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (c_m^s)^* c_n^s$$

密度矩阵用于描述系综状态的几率特性。对角项 ρ_{nn} 描述系综中一个系统处于态 u_n 的几率；非对角项 ρ_{nm} 等于 $c_m^* c_n$ 的系综平均。在讨论光与物质相互作用时，光场诱导分子（原子）极化与密度矩阵 ρ_{nm} 有关，而不需要知道精确的波函数。

将波函数展开式 $\psi(r, t) = \sum c_n(t)u_n(r)$ 代入薛定谔方程并进行简单运算可得

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_m(t) = \sum_n c_n(t) H_{mn} \quad (3-3)$$

将密度矩阵定义式(3-6)对时间求偏导,

$$\frac{\partial \rho_{nm}}{\partial t} = \overline{c_n \frac{\partial c_m^*}{\partial t}} + \overline{c_m^* \frac{\partial c_n}{\partial t}} \quad (3-4)$$

将(3-3)式代入(3-4)式, 可以导出

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{nm}}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} \overline{c_n \sum_k c_k^* H_{mk}^+} - \frac{i}{\hbar} \overline{c_m^* \sum_k c_k H_{nk}} \\
&= \frac{i}{\hbar} \left(\overline{\sum_k c_n c_k^* H_{mk}^+} - \overline{\sum_k c_m^* c_k H_{nk}} \right) \\
&= \frac{i}{\hbar} \sum_k (\rho_{nk} H_{km} - H_{nk} \rho_{km}) \quad (3-5a) \\
&= \frac{i}{\hbar} [(\rho H)_{nm} - (H \rho)_{nm}]
\end{aligned}$$

该式可以简写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\rho, H] \quad (3-5)$$

通常用此**密度矩阵运动方程**来描述原子系统与辐射场的相互作用。

第八章 辐射场与原子系统的相互作用

本章采用半经典的密度矩阵理论研究原子系统与光辐射场相互作用。包括：原子的极化率、感应跃迁、自发跃迁、光放大、谱线加宽、增益饱和。

8.1 原子极化率的密度矩阵推导

考虑一个二能级的原子系统（其能级能量计为 E_1 和 E_2 ）与角频率为 ω 的辐射场相互作用。假设相互作用哈密顿 \hat{H}' 是偶极型，可以写成

$$\omega \approx \omega_0 = (E_2 - E_1) / \hbar$$
$$\hat{H}' = -\mu E(t) \tag{8.1-1}$$

其中， μ 是偶极算符沿光场 \mathbf{E} 方向的分量。

取偶极算符的**对角矩阵元**为零,

$$\begin{aligned}\mu_{11} = \mu_{22} &= 0 \\ (\mu_{11} = \langle 1|er|1\rangle = \langle 2|er|2\rangle = 0)\end{aligned}\tag{8.1-2}$$

非对角矩阵元为 $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu$ (8.1-3)

($\mu_{12} = \langle 1|er|2\rangle = \mu$,相当于原子的跃迁矩阵元)

总哈密顿: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ (8.1-4)

被外场 $E(t)$ 感应的**原子偶极距的系综平均值**

$$\begin{aligned}\langle \mu \rangle &= \text{tr}(\rho\mu) = \rho_{12}\mu_{21} + \rho_{21}\mu_{12} + \rho_{11}\mu_{11} + \rho_{22}\mu_{22} \\ &= \mu(\rho_{12} + \rho_{21})\end{aligned}\tag{8.1-5}$$

为了求出密度矩阵元，利用密度矩阵运动方程(3.16-5)式可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{21}}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [(\hat{H}_0 + \hat{H}'), \rho]_{21} & \frac{\partial \rho_{nm}}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} [(\rho H)_{nm} - (H \rho)_{nm}] \\ &= -\frac{i}{\hbar} (\hat{H}'_{21} \rho_{11} + E_2 \rho_{21} - E_1 \rho_{21} - \rho_{22} \hat{H}'_{21}) \\ &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}'_{21} (\rho_{11} - \rho_{22}) + (E_2 - E_1) \rho_{21}] \end{aligned}$$

利用(8.1-6)式和共振频率 $\omega_0 = (E_2 - E_1) / \hbar$ 可得

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = -i\omega_0 \rho_{21} + i\frac{\mu}{\hbar} E(t)(\rho_{11} - \rho_{22}) \quad (8.1-6)$$

用类似方法可得 $\frac{d\rho_{22}}{dt} = -i\frac{\mu}{\hbar} E(t)(\rho_{21} - \rho_{21}^*)$

由归一化条件 $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ 得到

$$\frac{d}{dt} (\rho_{11} - \rho_{22}) = 2i\frac{\mu}{\hbar} E(t)(\rho_{21} - \rho_{21}^*) \quad (8.1-7)$$

碰撞项的考虑

当撤去微扰场 $E(t)$ 时，可以预料与极化有关的 ρ_{21} 矩阵元将因碰撞衰减。因此唯象地引入**横向驰豫时间 T_2** 。（ T_2 仅对位相损失有贡献，不包含能量交换。纵向驰豫时间 T_1 相当于能级寿命，与能量交换有关。

）计入横向驰豫时间后，(8.1-6)式改写为

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = -i\omega_0\rho_{21} + i\frac{\mu}{\hbar}E(t)(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\rho_{21}}{T_2} \quad (8.1-8)$$

类似的考虑，当撤去微扰场 $E(t)$ 时，粒子数差 $\Delta N = N(\rho_{11} - \rho_{22})$

将驰豫到它的平衡值 $\Delta N = N(\rho_{11} - \rho_{22})_0$ 时间常数计为 τ ，（ τ 也称为**纵向驰豫时间**，相当于能级寿命，与能量交换有关，有时用 T_1 表示。）

可以预料与极化有关的 ρ_{21} 矩阵元将因碰撞衰减。于是(8.1-6)式改写为，

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11} - \rho_{22}) = 2i \frac{\mu}{\hbar} E(t)(\rho_{21} - \rho_{21}^*) - \frac{(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\rho_{11} - \rho_{22})_0}{\tau} \quad (8.1-9)$$

考虑微扰场 $E(t)$ 为单色光的简单情况,

$$E(t) = E_0 \cos \omega t = \frac{E_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (8.1-10)$$

为了计算方便, 引入慢变化参量 σ_{21} 和 σ_{12}

$$\begin{aligned} \rho_{21}(t) &= \sigma_{21}(t)e^{-i\omega t} \\ \rho_{12}(t) &= \sigma_{12}(t)e^{i\omega t} = \rho_{21}^* \end{aligned} \quad (8.1-11)$$

利用(8.1-11)和(8.1-10)两式, (8.1-8)和(8.1-9)式可以写成

$$\frac{d\sigma_{21}}{dt} = i(\omega - \omega_0)\sigma_{21} + \frac{i\mu E_0}{2\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\sigma_{21}}{T_2} \quad (8.1-12)$$

在推导(8.1-12)式时，仅保留了含时间为的项 $\exp(-i\omega t)$ ，忽略了非同步项 $\exp(i\omega t)$ ，因为当近共振 $\omega \approx \omega_0$ 时，这一项的贡献比其它非同步项的贡献大得多。

$$\left(\text{通常 } \frac{1}{(\omega - \omega_0)} \gg \frac{1}{(\omega + \omega_0)}, \text{ 也称旋波近似}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_{11} - \rho_{22}) = \frac{i\mu E_0}{\hbar}(\sigma_{21} - \sigma_{21}^*) - \frac{(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\rho_{11} - \rho_{22})_0}{\tau} \quad (8.1-13)$$

而在推导 (8.1-13) 式中，仅保留了不含时间指数式的项，忽略了含 $\exp(i2\omega t)$ 和 $\exp(-i2\omega t)$ 的项

$$\left(\text{通常 } \frac{1}{(\omega - \omega_0)} \gg \frac{1}{(2\omega \pm \omega_0)}, \text{ 也称旋波近似}\right)。$$

将(8.1-11)式代入(8.1-5)式并利用 $\sigma_{21} = \sigma_{12}^*$

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= \rho_{12} \mu_{21} + \rho_{21} \mu_{12} + \rho_{11} \mu_{11} + \rho_{22} \mu_{22} \\ &= \mu(\rho_{12} + \rho_{21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{可得 } \langle \mu \rangle &= \mu(\sigma_{12} e^{i\omega t} + \sigma_{21} e^{-i\omega t}) \\ &= \mu(\sigma_{21}^* e^{i\omega t} + \sigma_{21} e^{-i\omega t}) \\ &= \mu[(\text{Re } \sigma_{21} - i \text{Im } \sigma_{21})(\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ &\quad + (\text{Re } \sigma_{21} + i \text{Im } \sigma_{21})(\cos \omega t - i \sin \omega t)] \\ &= 2\mu[\text{Re}(\sigma_{21}(t) \cos \omega t + \text{Im } \sigma_{21}(t) \sin \omega t) \end{aligned} \tag{8.1-14}$$

稳态解

为了得到密度矩阵的稳态解，令(8.1-12)和(8.1-13)两式的左边等于零，

即

$$\frac{d\sigma_{21}}{dt} = i(\omega - \omega_0)\sigma_{21} + \frac{i\mu E_0}{2\hbar}(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\sigma_{21}}{T_2}$$

$$\frac{d\sigma_{21}}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}(\rho_{11} - \rho_{22}) = 0$$

利用 $\sigma_{21} = \text{Re } \sigma_{21} + i \text{Im } \sigma_{21}$ ，求解方程可得，

$$\text{Im}\sigma_{21} = \frac{\Omega T_2 (\rho_{11} - \rho_{22})_0}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} \quad (8.1-15)$$

$$\text{Re}\sigma_{21} = \frac{(\omega_0 - \omega)\Omega T_2^2 (\rho_{11} - \rho_{22})_0}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} \quad (8.1-15)$$

$$\rho_{11} - \rho_{22} = (\rho_{11} - \rho_{22})_0 \frac{1 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} \quad (8.1-15)$$

式中 Ω 定义为 $\Omega = \mu E_0 / 2\hbar$

于是宏观极化强度为

$$P = N \langle \mu \rangle = \frac{\mu^2 \Delta N_0 T_2}{\hbar} E_0 \left(\frac{\sin \omega t + (\omega_0 - \omega) T_2 \cos \omega t}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} \right) \quad (8.1-16)$$

$$\Delta N = \Delta N_0 \frac{1 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} \quad (8.1-17)$$

式中 $\Delta N_0 = N(\rho_{11} - \rho_{22})_0$ 为零场时的粒子数差。

原子极化率可以表示成实部和虚部两部分

$$\chi = \chi' - i\chi''$$

则极化强度

$$P(t) = \text{Re}(\varepsilon\chi E_0 e^{i\omega t}) = E_0(\varepsilon_0\chi' \cos \omega t + \varepsilon_0\chi'' \sin \omega t) \quad (8.1-18)$$

比较(8.1-16)和(8.1-18)两式可得原子极化率

$$\chi''(\omega) = \frac{\mu^2 \Delta N_0 T_2}{\varepsilon_0 \hbar} E_0 \left(\frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} \right) \quad (8.1-19)$$

$$\chi'(\omega) = \frac{\mu^2 \Delta N_0 T_2}{\varepsilon_0 \hbar} E_0 \left(\frac{(\omega - \omega_0) T_2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} \right) \quad (8.1-19)$$

令归一化洛仑兹线型函数 $g(\nu)$ 为

$$g(\nu) = \frac{2T_2}{1 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 T_2^2} = \frac{(\Delta\nu / 2\pi)}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2} \quad (8.1-20)$$

半最大全宽度 $\Delta\nu = (\pi T_2)^{-1}$

洛仑兹线型是表征因碰撞、自发辐射等引起的激发态有限寿命 (τ, T_2) 起主导作用的跃迁特性。

于是 χ'' 和 χ' 表示为下列形式

$$\chi''(\nu) \propto \Delta N g(\nu) \quad (8.1-21)$$

$$\chi'(\nu) \propto \Delta N (\nu_0 - \nu) g(\nu)$$

$$\Delta N = \Delta N_0 \frac{1 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau}$$

图8.2表示在 $4\Omega^2 T_2 \tau \ll 1$ 的条件下（弱光强），洛仑兹吸收 (χ'') 曲线和色散 (χ') 曲线。

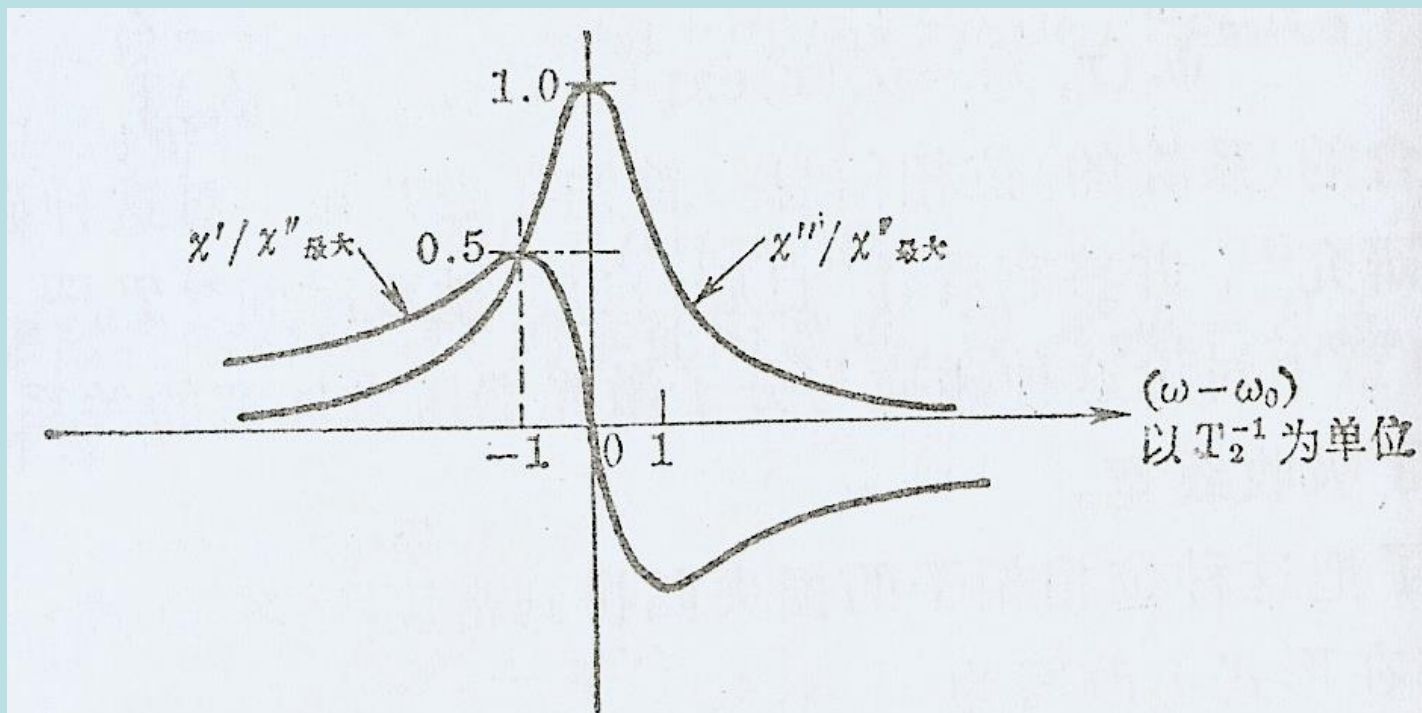


图 8.2 在忽略饱和 ($\mu^2 E_0^2 T_2 \tau / \hbar^2 \ll 1$) 情况下极化率的实部 (χ') 和虚部 (χ'') 的曲线

图8.2

饱和效应

由(8.1-17)、(8.1-19)和(8.1-21)可见，粒子布居数差 ΔN 、极化率 χ'' 和 χ' 都随场强的增大而减小，这种现象称为饱和效应。

$$\text{当 } 4\Omega^2 T_2 \tau > 1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 \text{ 时,} \quad (8.1-23)$$

$$\text{即 } \frac{\mu^2 E_0^2 T_2 \tau}{\hbar^2} > 1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 \quad (8.1-24)$$

时，这种饱和效应更加明显。

考虑饱和效应时的洛仑兹线型的宽度为

$$\Delta \nu_{sat} = \Delta \nu \sqrt{1 + \frac{\mu^2 E_0^2 T_2 \tau}{\hbar^2}}$$

$\Delta \nu = (\pi T_2)^{-1}$ 为零场时的线型宽度。

8.2 $\chi(\nu)$ 的意义

根据电磁场理论，电位移矢量可以表示为

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon_0 E + P + P_{transition} \\ &= \varepsilon E + \varepsilon_0 \chi E \\ &= \varepsilon \left[1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \chi(\omega) \right] E \\ &= \varepsilon'(\omega) E \end{aligned} \tag{8.2-1}$$

其中复介电常数变为

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon \left[1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \chi(\omega) \right] \tag{8.2-2}$$

可见，由于原子跃迁的影响，使得复介电常数 ε 按上式修正。

作为一个例子，讨论平面电磁波在介电常数为 $\varepsilon'(\omega)$ 的介质中的传播。

$$E(z, t) = \text{Re}[Ee^{i(\omega t - k'z)}] \quad (8.2-3)$$

式中 $k' = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'(\omega)} \approx k[1 + \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon}\chi(\omega)]$

(其中 $|\chi| \ll 1$)，其中 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

将极化率 χ 表示为实部 χ' 和虚部 χ'' ，

可得 $k' \cong k[1 + \frac{\chi'(v)}{2n^2}] - i\frac{k\chi''(v)}{2n^2}$ (8.2-4)

式中 $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$ 是远离共振处介质的折射率。

将(8.2-4)式代入 (8.2-3)式可以得到

$$E(z, t) = \text{Re}[Ee^{i\omega t - i(k+\Delta k)z + (\gamma/2)z}] \quad (8.2-5)$$

χ' 的意义

可见，原子极化结果使单位长度的位相延迟由 k 变为 $k + \Delta k$

$$\text{其中} \quad \Delta k = \frac{k\chi'(\nu)}{2n^2} \quad (8.2-6)$$

即 χ 的实部 χ' 与原子极化导致的位相改变有关。

χ'' 的意义

$$\text{利用关系式} \quad I(z) = \frac{c\varepsilon}{2n} |E(z)|^2, \quad n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

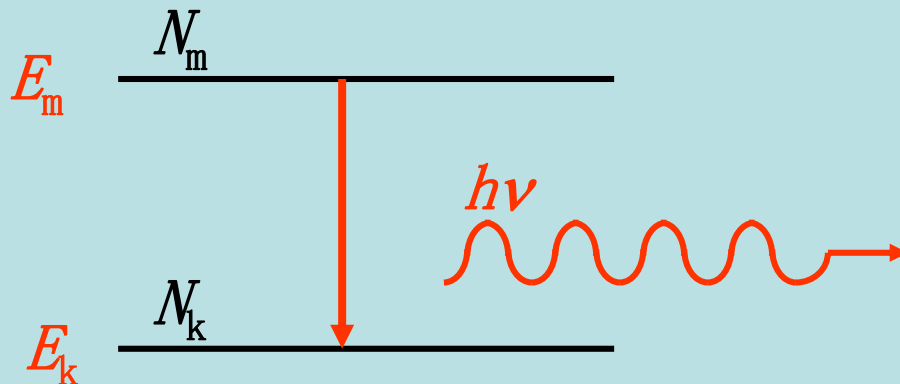
$$\text{从(8.2-5)式可得} \quad I(z) = I_0 e^{\gamma(\nu)z} \quad (8.2-10)$$

$$\text{其中} \quad \gamma(\nu) = -\frac{k\chi''(\nu)}{n^2} \quad (8.2-7)$$

光强随距离按指数形式衰减，即 χ 的虚部 χ'' 与原子极化导致的吸收有关。

补充知识

(1) 自发辐射



设 N_k 、 N_m — 单位体积中处于 E_k 、 E_m 能级的原子数。

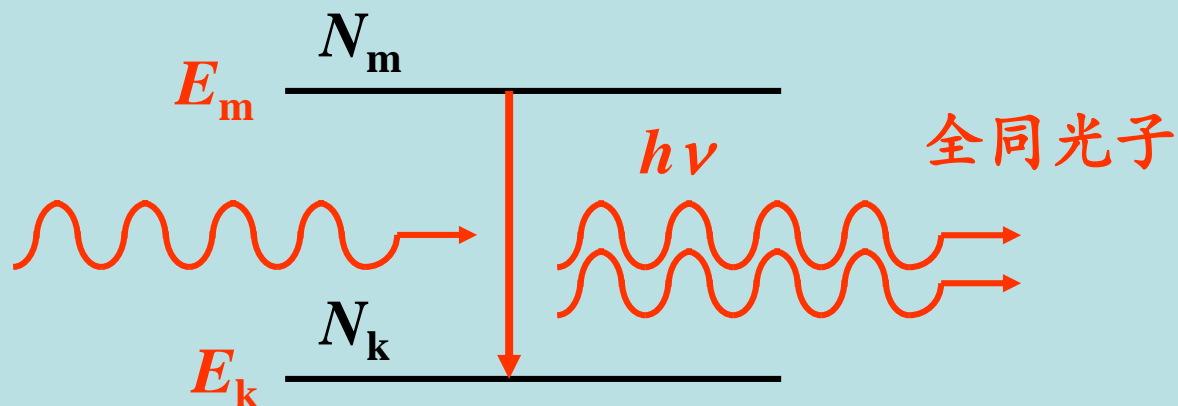
单位体积中单位时间内，从 $E_m \rightarrow E_k$ 自发辐射的原子数：

$$\left(\frac{dN_{mk}}{dt} \right)_{\text{自发}} = A_{mk} N_m$$

A_{mk} — 自发辐射系数，单个原子在单位时间内发生自发辐射过程的概率。

各原子自发辐射的光是独立的、无关的非相干光。

(2) 受激辐射



受激辐射光与外来光的频率、偏振方向、
相位及传播方向均相同
-----有光的放大作用。

单位体积中单位时间内，从 $E_m \rightarrow E_k$ 受激辐射的原子数：

$$\left(\frac{dN_{mk}}{dt} \right)_{\text{受激}} = W_{mk} N_m$$

令 $W_{mk} = B_{mk} \cdot I(\omega, T)$ B_{mk} ——受激辐射系数

W_{mk} ——单个原子在单位时间内发生受激辐射过程的概率。

由量子力学微扰法（**半经典理论**-原子系统采用量子理论，光场采用经典电磁场进行处理）可以得到**受激辐射跃迁几率**：

$$\omega_{k \rightarrow m} = \frac{4\pi e^2}{3\hbar^2} I(\omega_{mk}) |\vec{r}_{mk}|^2$$

比较得：

$$B_{km} = \frac{4\pi^2 e^2}{3\hbar^2} |\vec{r}_{mk}|^2$$

对自发辐射现象的严格理论描述需要采用**全量子理论**。

Einstein提出了一个半唯象的理论，简化处理了自发发射问题。

他借助于物体与辐射场在达到平衡时的热力学关系，建立了

自发发射、受激吸收、受激发射之间的关系。从而得到了**自**

发辐射跃迁几率：

$$A_{mk} = \frac{\hbar \omega_{mk}^3}{\pi^2 c^3} B_{mk} = \frac{4e^2 \omega_{mk}^3}{3\hbar c^3} |\vec{r}_{km}|^2$$

8.3 自发跃迁和感应跃迁

在上面的讨论中，我们使用的是半经典理论（原子变量量子化，光场用经典变量）处理光场与原子的相互作用。然而，在处理自发辐射时，必须使用全量子理论，即光场也必须被量子化。

如图8.3所示，考虑谐振腔中的原子体系，处于初始态为激发态能级2原子，与谐振腔的第 l 个模相互作用，由能级2跃迁到能级1，同时 l 模由 $|n_l\rangle$ 态跃迁到 $|n_l + 1\rangle$ 态。

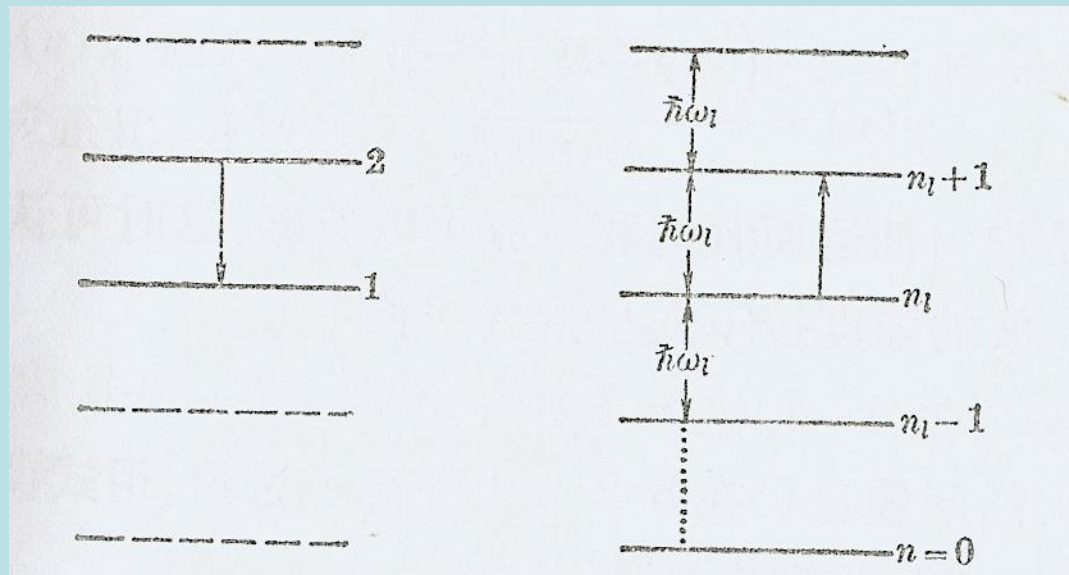


图8.3 在发射过程中所包含的原子能级（左）和辐射能级（右）

相互作用哈密顿为

$$\hat{H}' = -e\vec{E}_l(r,t) \cdot \vec{r} = -eE_{ly}(z,t)y \quad (8.3-1)$$

假设该平面波是平面波，根据(5.6-15)式可以将其量子化（用算符变量），

$$\hat{H}' = iey \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{V\varepsilon}} (a_l^+ - a_l) \sin k_l z \quad (8.3-2)$$

V 为谐振腔体积。

初态为 $|2, n_l\rangle$ ，即原子处于能级2而 l 模有 n_l 个量子；终态为 $|1, n_l + 1\rangle$ ，即原子处于能级1，而 l 模光场获得一个光子有 $n_l + 1$ 个量子。

初态和终态具有相同的能量，因而跃迁速率由(3.12-20)

$$W_{m \rightarrow k} = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{km}|^2 \delta(E_m - E_k)$$

并考虑到 $\langle n_l + 1 | a_l | n_l \rangle = 0$ ，可以得到

$$W' = \frac{2\pi e^2 \omega_l}{V\varepsilon} \left| \langle 1, n_l + 1 | y a_l^+ | 2, n_l \rangle \right|^2 \sin^2(k_l z) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_l) \quad (8.3-3)$$

由(2.2-27)可得 $\langle n_l + 1 | a_l^+ | n_l \rangle = \sqrt{n_l + 1}$

因而跃迁速率可以写成

$$W' = \frac{2\pi e^2 \omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon} (n_l + 1) \sin^2(k_l z) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_l) \quad (8.3-4)$$

式中 $y_{12}^2 = \left| \langle 1 | y | 2 \rangle \right|^2$

由此得到**感应发射**到第 l 模的速率

$$W'_i = \frac{2\pi e^2 \omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon} n_l \sin^2(k_l z) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_l) \quad (8.3-5)$$

跃迁到第 l 模的自发发射速率

$$W'_{spont} = \frac{2\pi e^2 \omega_l y_{12}^2}{V\epsilon} \sin^2(k_l z) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_l) \quad (8.3-6)$$

可见跃迁到单个模式的感应发射速率是自发发射速率的 n_l （该模式的量子数）倍。

自发辐射寿命

由自发跃迁到所有连续模而引起的寿命称为自发辐射寿命。

首先考虑如下几个因素：

- 低能态有 g_1 度简并，因而用 g_1 乘(8.3-6)式；
- (8.3-6)式中的因子 $\sin^2(k_l z)$ 取对大量数目的模式的平均值，此值为1/2；

●由(5.7-3)式可得单位频率的模数

$$p(\nu) = \frac{1}{V} \frac{dN_\nu}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 n^3}{c^3}$$

换算成在体积V内单位能量的模式数

$$p(E = h\nu_l) = \frac{8\pi\nu_l^2 V n^3}{hc^3}$$

将其乘(8.3-6)式, 并将上述因素考虑进去后, 对所有能量积分得到
自发辐射速率

$$W'_{spont} = \frac{1}{t_{spont}} = \frac{2n^3 e^2 y_{12}^2 \omega^3 g_1}{\epsilon hc^3} = \frac{2n^3 \mu^2 \omega^3 g_1}{\epsilon hc^3} \quad (8.3-7)$$

式中 $\mu = ey_{12}$, $\hbar\omega = E_2 - E_1$

可见, 自发辐射寿命 t_{spont} 与原子的跃迁偶极距 ($\mu = ey_{12}$) 成反比。

单色场引起的感应跃迁速率

在本章第一节中我们知道，由于碰撞等原因原子处于激发态的寿命总是有限的，因而描述原子系统对光场响应时需要引入线型函数 $g(\nu)$

为此将(8.3-5)式乘 $g(E)dE = (1/h)g(\nu)dE$

$$W'_i = \frac{2\pi e^2 \omega_l y_{12}^2}{V\varepsilon} n_l \sin^2(k_l z) \delta(E_2 - E_1 - \hbar\omega_l)$$

考虑能级1有 g_1 度简并，对整个能量积分可得

$$(W_{21})_i = \frac{\pi e^2 y_{12}^2 \omega_l n_l g_1}{hV\varepsilon} g(\nu_l) \quad (8.3-8)$$

利用模式数与光强之间的关系 $I_{\nu_l} = \frac{cn_l \hbar \nu_l}{nV}$ 和(8.3-7)式，(8.3-8)式可以得到

感应跃迁速率

感应跃迁速率

$$(W_{21})_i = \frac{\lambda^2 I_\nu}{8\pi h \nu n^2 t_{spont}} g(\nu) \quad (8.3-9)$$

可见，感应跃迁速率与入射光强 I_ν 成正比；并且与线型函数 $g(\nu)$ 有关，光的频率仅在谱线中心 $\sim \Delta \nu$ 范围内时，才能发生感应跃迁（受激发射）。

用类似推导方法可以得到**受激吸收跃迁(1→2)速率**

$$(W_{12})_i = (W_{21})_i \left(\frac{g_2}{g_1} \right) = \left(\frac{g_2}{g_1} \right) \frac{\lambda^2 I_\nu}{8\pi h \nu n^2 t_{spont}} g(\nu) \quad (8.3-10)$$

g_1 和 g_2 分别为能级 1 和 2 的简并度。

8.4 增益系数

考虑一个频率为 ν 的单色光波通过图8.3所示的原子集合：

处于能级2的原子密度为 N_2 （原子/米³），处于能级1的原子密度为 N_1 （原子/米³）。

单位时间，单位体积 $2 \rightarrow 1$ 的感应跃迁超过 $1 \rightarrow 2$ 跃迁的部分产生有效的感应辐射，其功率为

$$\text{功率/体积} = [N_2(W_{21})_i - N_1(W_{12})_i]h\nu \quad (8.4-1)$$

式中未计入自发辐射（相对较弱）。

根据(8.3-9)和(8.3-10)两式可得

$$\text{功率/体积} = \left[N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right] \frac{\lambda^2 g(\nu) I_\nu}{8\pi n^2 t_{spont}} \quad (8.4-2)$$

如果这个功率加到感应波上，则会使感应波的强度按下式增长

$$\text{功率/体积} = \frac{dI_\nu(z)}{dz} = \gamma(\nu)I_\nu(z) \quad (8.4-3)$$

合并(8.4-2)和(8.4-3)两式可以得到**增益系数**

$$\gamma(\nu) = \frac{[N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1] \lambda^2}{8\pi n^2 t_{spont}} g(\nu) \quad (8.4-4)$$

粒子数反转： $[N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1]$ 为通过光学泵浦等抽运方式实现的粒子数反转。在均匀抽运和忽略饱和效应时，可以认为 N_1 和 N_2 与 z 无关，光波强度按指数增长（光放大），

$$I_\nu(z) = I_\nu(0)e^{\gamma(\nu)z} \quad (8.4-5)$$

举例：计算红宝石晶体中的增益

红宝石晶体： Al_2O_3

掺杂离子： Cr_2O_3 掺杂铬离子浓度为 2.4×10^{19} 厘米⁻³

已知粒子数反转： $[N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1] = 5 \times 10^{17}$ 厘米⁻³

$$t_{spont} = 3 \times 10^{-3} \text{秒}$$

$$\lambda = 0.6943 \text{微米}$$

$$n = 1.77$$

$$\Delta\nu = 1/g(\nu_0) \approx 2 \times 10^{11} \text{赫兹 (在300K)}$$

$$\text{可得增益常数} \quad \gamma(\nu_0) \approx 5 \times 10^{-2} \text{厘米}^{-1}$$

8.6 均匀加宽和非均匀加宽

加宽用来表征原子系统对光场响应的有限宽度，因此需要引入线型函数 $g(\nu)$ 。

比如主要体现在：

- 吸收与频率关系曲线
- 激光介质增益与频率的关系曲线

根据线型函数主要有两种加宽机制：均匀加宽和非均匀加宽

均匀加宽

在均匀加宽的情况下，**原子是不可区分的**，并有相同的跃迁能量 $E_2 - E_1$

均匀加宽机制主要有：

- 原子与声子(或其它原子)的非弹性碰撞；（碰撞加宽）
- 因自发辐射或无辐射跃迁导致的激发态有限寿命；（自然加宽）
- 晶格振动加宽（晶格振动使激活离子能级展宽）；

由8.1节可知，均匀加宽为洛仑兹线型

$$\chi''(\omega) \propto \left(\frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + \frac{\mu^2 E_0^2}{\hbar^2} T_2 \tau} \right) \quad (8.6-1)$$

$$\Delta\nu_{sat} = \Delta\nu \sqrt{1 + \frac{\mu^2 E_0^2 T_2 \tau}{\hbar^2}} \quad (8.6-2)$$

其中 $\Delta\nu = (\pi T_2)^{-1}$ 。 T_2 为横向驰豫时间，表征原子相干性损失的时间常数，可以表示为

$$\frac{1}{T_2} = \sum_i \frac{1}{\tau_i} \quad (8.6-3)$$

式中求和是对所有破坏光场与原子相互作用的过程（碰撞、跃迁等）。

非均匀加宽

与均匀加宽不同，在非均匀加宽的情况下，原子是可区分的。

非均匀加宽机制主要有：

- 晶体中的杂质离子：离子周围不同环境导致的能级（跃迁频率）展宽。
- 低气压中的分子都属于非均匀加宽：由于气体分子（原子）的多普勒运动导致的不同分子具有不同的跃迁频率（运动速度）。（多普勒加宽）

多普勒效应：波源相对于介质在运动，介质感应到的频率不同于波源频率的现象。

考虑多普勒效应，跃迁中心频率为 ν_0 、以速度为 v_x 运动的原子的跃迁频率修正为，

$$\nu = \nu_0 + \frac{v_x}{c} \nu_0 \quad (8.6-4)$$

式中 v_x 是沿着观察者与运动原子的连线方向的速度分量， c 为光速。

由此可知，沿 x 方向传播的光波与中心频率为 ν_0 并具有速度 V_x 的运动原子相互作用时，原子的中心频率表现为(8.6-4)式，当沿光波传播方向时， $V_x > 0$ ；反向时 $V_x < 0$ 。

原子质量为 M 的气体在平衡温度 T 时，**麦克斯韦速度分布函数**为

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{M}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right] \quad (8.6-5)$$

于是 $f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z$ 为原子的速度矢量在 $\vec{v} + dv_x dv_y dv_z$ 内的几率。

原子的跃迁频率在 $\nu \rightarrow \nu + d\nu$ 之间的几率 $g(\nu)d\nu$

应等于速度分量 $v_x = (\nu - \nu_0)(c/\nu_0) \rightarrow (\nu + d\nu - \nu_0)(c/\nu_0)$

范围内的几率，与 v_y 和 v_z 无关。

将 $v_x = (v - v_0)(c/v_0)$ 代入 $f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z$ 中, 然后对所有 v_y 和 v_z 值进行积分, 即可得到几率 $g(v)dv$

$$g(v)dv = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{M}{2kT}(v_y^2 + v_z^2)\right] dv_y dv_z \cdot \exp\left[-\frac{M}{2kT}(c^2/v_0^2)(v - v_0)^2\right] \left(\frac{c}{v_0}\right)dv \quad (8.6-7)$$

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{M}{2kT}v_z^2\right] dv_z = \left(\frac{2\pi kT}{M}\right)^{1/2}$$

可以得到归一化**多普勒加宽线型**为

$$g(v) = \frac{c}{v_0} \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{M}{2kT}(c^2/v_0^2)(v - v_0)^2\right] \quad (8.6-8)$$

此函数称为高斯型。 $g(v)$ 的宽度 Δv_D 定义为 $g(v)$ 的半最大值处的全宽度。

由(8.6-8)可得,

$$\Delta \nu_D = 2\nu_0 \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2} \ln 2} \quad (8.6-9)$$

于是(8.6-8)式可以重新写为

$$g(\nu) = \frac{2(\ln 2)^{1/2}}{\pi^{1/2} \Delta \nu_D} \exp[-4(\ln 2)(\nu - \nu_0)^2 / \Delta \nu_D^2] \quad (8.6-10)$$

多普勒加宽的特点: 不同原子向谱线的不同频率发射, 或者说, 不同原子只对谱线内与它的中心频率相对应的部分有贡献, 因而可以辨别谱线上的某一频率范围是由哪一部分原子发射的。

起因于固体中的晶格缺陷等的谱线加宽也是非均匀加宽, 但是不属于多普勒加宽, 加宽线型函数很难从理论上求出, 通常由实验测定它的谱线宽度。

8.6 在均匀加宽和非均匀加宽中的增益饱和

由于饱和效应，激光介质的增益将随场强的增加而减小。对于均匀和非均匀两种加宽，其增益饱和效应的程度以及与光谱线型的关系是不同的。

均匀加宽情况

由(8.4-4)式可知均匀加宽时的增益为

$$\gamma(\nu) = \Delta N \frac{\lambda^2}{8\pi n^2 t_{spont}} g(\nu) \quad (8.7-1)$$

其中归一化线型函数 $g(\nu)$ 为

$$g(\nu) = \frac{2T_2}{1 + 4\pi^2 (\nu - \nu_0)^2 T_2^2} \quad (8.7-2)$$

粒子数反转密度 $\Delta N = [N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1]$ 为

$$\Delta N = \Delta N_0 \frac{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau} \quad (8.7-3)$$

式中 $\Omega^2 = (\mu E_0 / 2\hbar)^2 g_1$

将(8.7-2)和(8.7-3)两式代入(8.7-1)式，可得**均匀加宽的增益因子**

$$\gamma(\nu) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2 g(\nu)}{8\pi n^2 t_{spont}} \left(\frac{1}{1 + \frac{I_\nu}{I_s(\nu)}} \right) = \frac{\gamma_0(\nu)}{1 + \frac{I_\nu}{I_s(\nu)}} \quad (8.7-4)$$

式中 $\gamma_0(\nu)$ 为未饱和 ($E_0 = 0$) 增益； I_ν 为光强 (瓦/米²)

$$I_\nu = \frac{cn\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

在频率 ν 处，当增益降低到未饱和增益 $\gamma_0(\nu)$ 的1/2时的光强称为饱和强度 $I_s(\nu)$

$$I_s(\nu) = \frac{4\pi n^2 h \nu}{(\tau / t_{spont}) \lambda^2 g(\nu)} \quad (8.7-5)$$

饱和强度与线型函数 $g(\nu)$ 成反比，即光波频率越偏离谱线中心，越不易产生饱和。 τ 为粒子数反转寿命，一般等于激光上能级寿命，但不一定等于自发辐射寿命 t_{spont} 。

举例：计算在红宝石激光器中的增益饱和。

已知：取 $\tau = t_{spont}$ ，在300K下，

$$1/g(\nu) = \Delta\nu \approx 2 \times 10^{11} \text{赫兹},$$

$$\lambda = 0.6943 \text{微米}。$$

代入(8.7-5)式，可得 $I_s(\nu) \approx 467 \text{瓦/厘米}^2$

非均匀加宽情况

在非均匀加宽的原子系统中，不同原子向谱线的不同频率发射，或者说，不同原子只对谱线内与它的中心频率相对应的部分有贡献。因此，我们可以把这种原子系统设想为是由各种类型的原子组成，每类原子的中心频率用 ν_ξ 标记。

取非均匀加宽函数 $p(\nu_\xi)$ ，原子的中心频率取值为 ν_ξ 到 $\nu_\xi + d\nu_\xi$ 之间的几率为 $p(\nu_\xi)d\nu_\xi$

在一个给定的 ν_ξ 内的原子可以认为是均匀加宽（自发辐射引起的自然加宽），其线型函数计为

$$g^\xi(\nu)$$

在 $d\nu_\xi$ 范围内的原子的粒子数反转为 $\Delta N_0 p(\nu_\xi) d\nu_\xi$

其中 ΔN_0 （原子/米³）是总的未饱和粒子数反转。

这类原子对增益因子的贡献可以用(8.7-4)式导出为

$$\gamma_{\xi}(\nu) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2}{8\pi n^2 t_{spont}} \left[\frac{p(\nu_{\xi}) d\nu_{\xi}}{\frac{1}{g^{\xi}(\nu)} + \frac{I_{\nu} \phi \lambda^2}{4\pi n^2 h \nu}} \right] \quad (8.7-9)$$

式中 $\phi = \tau / t_{spont}$

将各类 ν_{ξ} 的原子对 $\gamma(\nu)$ 的贡献相加可得非均匀加宽的增益因子

$$\gamma(\nu) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2}{8\pi n^2 t_{spont}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\nu_{\xi}) d\nu_{\xi}}{\frac{1}{g^{\xi}(\nu)} + \frac{I_{\nu} \phi \lambda^2}{4\pi n^2 h \nu}} \quad (8.7-10)$$

假设在每个 ξ 类中的所有原子都相同（均匀加的），则该类原子的线型函数 $g^{\xi}(\nu)$ 可以用(8.1-20)式表示为洛仑兹函数，

$$g^{\xi}(\nu) = \frac{(\Delta\nu/2\pi)}{(\nu - \nu_{\xi})^2 + (\frac{\Delta\nu}{2})^2} \quad (8.7-11)$$

式中 $\Delta\nu$ 为**非均匀加宽谱线的均匀线宽**。

将上式代入(8.7-10)式可得

$$\gamma(\nu) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2 \Delta\nu}{16\pi^2 n^2 t_{spont}} \bullet \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\nu_{\xi}) d\nu_{\xi}}{(\nu - \nu_{\xi})^2 + (\Delta\nu/2)^2 + (\phi\lambda^2 I_{\nu} \Delta\nu / 8\pi^2 n^2 h\nu)} \quad (8.7-12)$$

通常， $p(\nu_{\xi})$ 的宽度要比 (8.7-12) 式中的被积函数其余各项都大很多，因此在被积函数峰值范围内，它实际上是一常数。因此可以把 $p(\nu_{\xi})_{\nu_{\xi}=\nu} = p(\nu)$ 提到积分符号之外，从而得到

将上式代入(8.7-10)式可得

$$\gamma(\nu) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2 \Delta \nu}{16\pi^2 n^2 t_{spont}} \bullet \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\nu_\xi) d\nu_\xi}{(\nu - \nu_\xi)^2 + (\Delta \nu / 2)^2 + (\phi \lambda^2 I_\nu \Delta \nu / 8\pi^2 n^2 h \nu)} \quad (8.7-13)$$

利用定积分， $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}$ 可得非均匀加宽的增益因子

$$\begin{aligned} \gamma(\nu) &= \frac{\Delta N_0 \lambda^2 p(\nu)}{8\pi n^2 t_{spont}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\phi \lambda^2 I_\nu / 2\pi^2 n^2 h \nu \Delta \nu)}} \\ &= \gamma_0(\nu) \frac{1}{\sqrt{1 + (I_\nu / I_s)}} \end{aligned} \quad (8.7-15)$$

其中 I_s 为非均匀加宽的饱和强度。

$$I_s = \frac{2\pi^2 n^2 h \nu \Delta \nu}{\phi \lambda^2} \quad (8.7-16)$$

均匀加宽和非均匀加宽的增益饱和的比较

将(8.7-15)和(8.7-15)式与(8.7-4)和(8.7-5)式比较可以得到下述结论:

1. 非均匀加宽系统的饱和比较“慢”（平方根）。
2. 在非均匀加宽情形中，饱和强度与线型中的位置无关。即
 I_s 与 $g(\nu)$ 无关，而在均匀加宽中， I_s 与 $g(\nu)$ 有关。
3. 在非均匀加宽饱和中存在烧孔效应，而在均匀加宽中则无此效应。

烧孔效应

考虑频率为 ν 的强场和频率为 ν' 的弱场同时作用于介质，增益 $\gamma(\nu')$ 的形式。

均匀加宽情况

按照(8.7-1)式，在 ν' 处的增益为

$$\gamma(\nu') = \Delta N \frac{\lambda^2}{8\pi n^2 t_{spont}} g(\nu')$$

式中 ΔN 是频率为 ν 的强场存在时的粒子数反转

[见(8.7-3)式
$$\Delta N = \Delta N_0 \frac{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 T_2 \tau}]$$

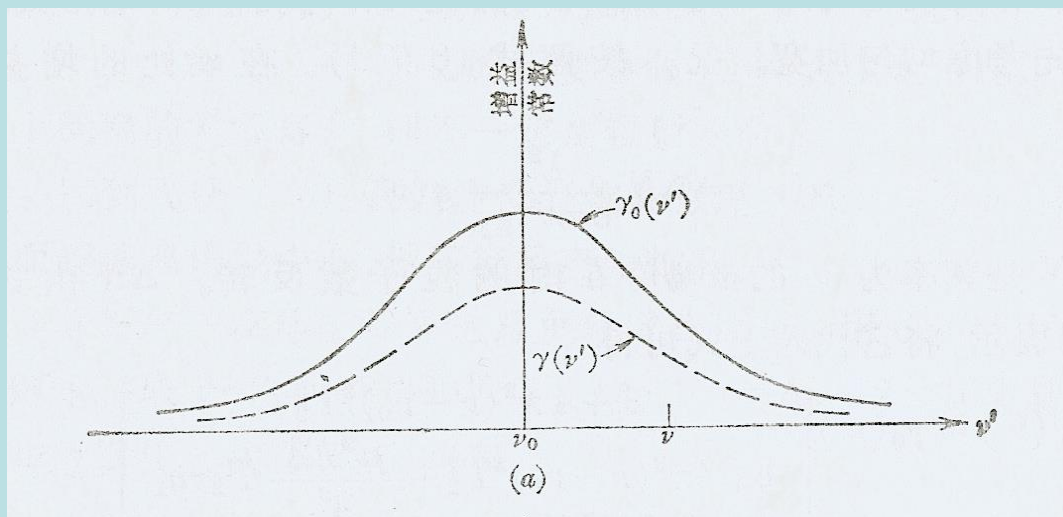
将其代入上式可得

$$\gamma(\nu') = \gamma_0(\nu') \left[\frac{1 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 T_2^2}{1 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2 T_2^2 + \frac{\mu^2 E_0^2}{\hbar^2} T_2 \tau g_1} \right] \quad (8.7-17)$$

式中 E_0 是频率为 ν 的强场振幅， $\gamma_0(\nu')$ 是未饱和($E_0=0$) 增益函数，

$$\gamma_0(\nu') = \Delta N_0 \frac{\lambda^2}{8\pi n^2 t_{spont}} g(\nu')$$

由此可见， $\gamma(\nu')$ 和未饱和增益函数 $\gamma_0(\nu')$ 有相同的频率关系，但其随频率为 ν 的光强增加而减小的倍数为(8.7-17)式中方括号内的因子。



图(8.4a)

非均匀加宽情况

将(8.7-11)式代入(8.7-10)可得关于频率为 ν 的强光的增益因子

$$\gamma(\nu) = \frac{\Delta N_0 \lambda^2}{8\pi n^2 t_{spont}} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_{\xi} p(\nu_{\xi}) g^{\xi}(\nu) \bullet$$
$$\left[\frac{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 + (\nu - \nu_{\xi})^2}{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 + (\nu - \nu_{\xi})^2 + \frac{\phi \lambda^2 \Delta\nu I_{\nu}}{8\pi^2 n^2 h\nu}} \right]$$

方括号外：为未饱和增益 $\gamma_0(\nu)$

方括号内：是饱和项，表示由于频率为 ν 的饱和场使增益减小的倍数。

由于它仅来自自发辐射自然加宽，所以其宽度相对于多普勒非均匀加宽谱线的宽度相对较小，因此，在多普勒加宽增益饱和中，可以当作局部减小因子处理。

类推可得频率为 ν' 的弱探测光的增益等于未饱和增益 $\gamma_0(\nu')$ 乘上这个局部减小因子，即

$$\gamma(\nu') = \gamma_0(\nu') \left[\frac{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 + (\nu - \nu')^2}{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 + (\nu - \nu')^2 + \frac{\phi\lambda^2\Delta\nu I_\nu}{8\pi^2 n^2 h\nu}} \right] \quad (8.7-18)$$

其中未饱和增益 $\gamma_0(\nu')$ 为

$$\gamma_0(\nu') = \frac{\Delta N_0 \lambda^2}{8\pi n^2 t_{spont}} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_\xi p(\nu_\xi) g^\xi(\nu')$$

当 ν' 远离 ν 时，(8.7-18)式方括号近似等于1，而当 ν' 接近或等于 ν 时，随光强增加而降低。即仅在强光频率 ν 附近处发生饱和作用。

在频率 $\nu' = \nu$ 处的 $\Delta\nu_{hole}$ 宽度内，增益随光强增加而降低（饱和），在饱和频率 ν 处，增益减小到原来值的 $(1 + I_\nu / I_s)^{-1}$ 倍，其余位置， $\gamma(\nu')$ 与 $\gamma_0(\nu')$ 相同。这种局部增益饱和的范围，被称为“孔”，这种饱和效应称为“烧孔”效应。

其中 $\Delta\nu_{hole}$ 为烧孔宽度

$$\Delta\nu_{hole} = \Delta\nu \sqrt{1 + \frac{I_\nu}{I_s}} \quad (8.7-19)$$

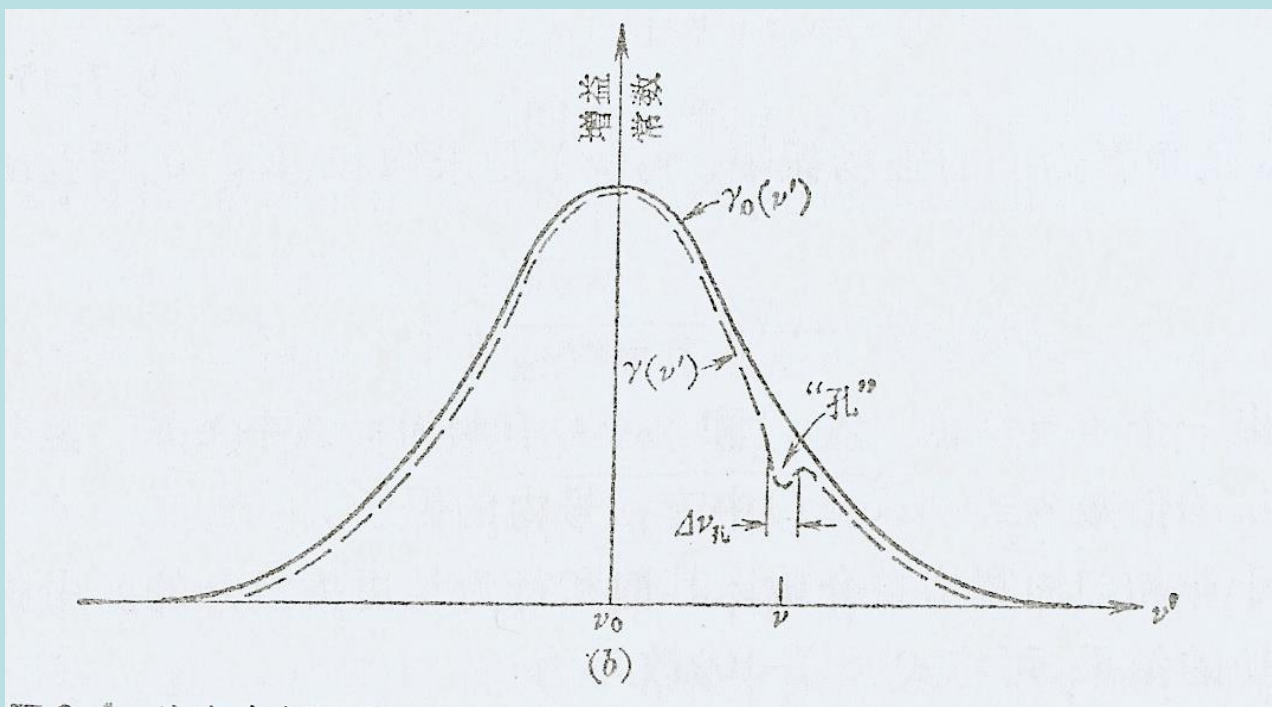


图8.4b