

# 第九章 激光振荡

## 9.1 激光振荡条件

本节从高斯光束的ABCD定律出发，讨论谐振腔内激光振荡条件：

光束在谐振腔内往返一周，它的形状、振幅和位相必须再现。

引入下列高斯光束复函数表征在 $z$ 处的光束：

$$q(z) \exp[-i\theta(z)] \quad (9.1-1)$$

$q(z)$  参量是**光束的复半径**，由（6.7-5）式定义为：

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi n \omega^2(z)} \quad (9.1-2)$$

而  $\exp[-i\theta(z)]$  是波在  $z$  处的复振幅， $\theta$  可以写成：

$$\theta = \theta_r + i\theta_i$$

$\exp[2\theta_i(z)]$  描述光束功率； $\theta_r$  描述光束的位相。

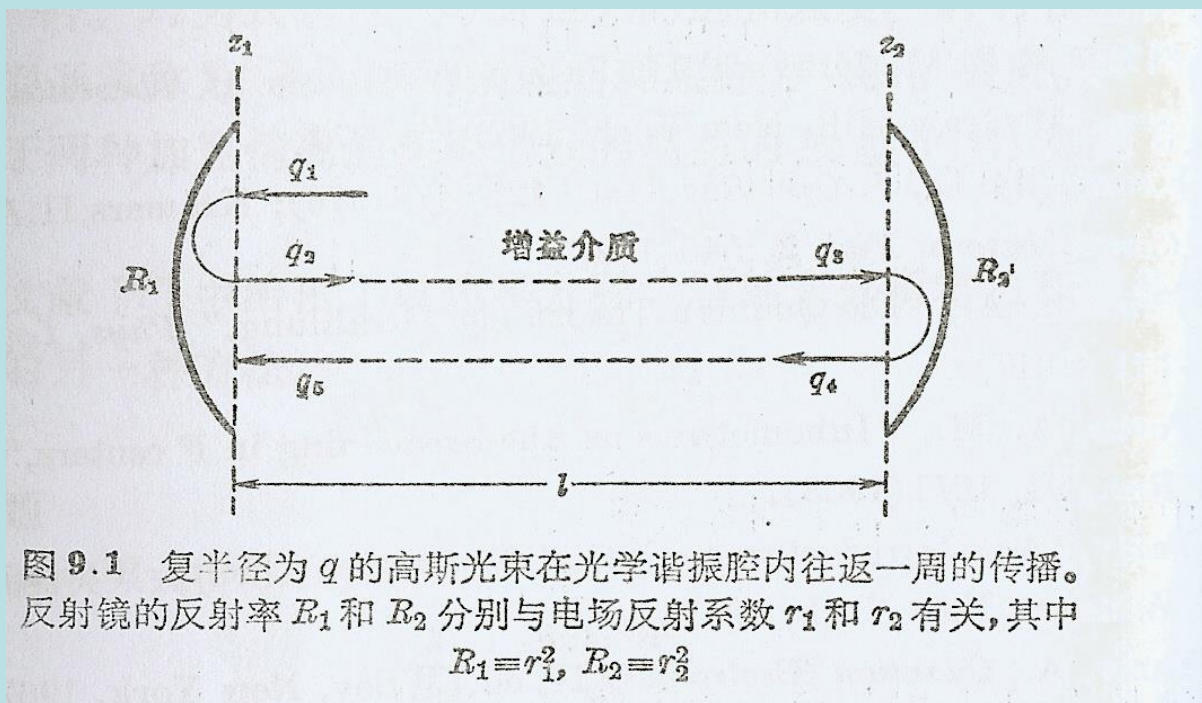


图 9.1

如图9.1所示光学谐振腔，高斯光束经过往返一周，高斯光束

$$\text{复函数为: } q_5 e^{-i\theta_5} = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} e^{-i(\theta_1 + \theta)} \quad (9.1-7)$$

$$\text{其中 } e^{-i\theta} = e^{-i2\theta_l} r_1 r_2 e^{-i(\theta_{m1} + \theta_{m2})} \quad (9.1-8a)$$

根据 (6.6-14) 式，在  $z_1$  和  $z_2$  之间的均匀介质中的  $\theta$  值为：

$$\theta_l = k(z_2 - z_1) - [(n + m + 1)(\tan^{-1}(z_2 / z_0) - \tan^{-1}(z_1 / z_0))] \quad (9.1-5)$$

式中  $k'$  为(8.2-4)描述的复传播常数， $l = z_2 - z_1$ 。

$r_1 r_2 e^{-i(\theta_{m1} + \theta_{m2})}$  为两个球面反射镜的传输因子， $|r|^2$  为反射镜

的反射率 (R)， $\theta_m$  为反射引起的相移。

考虑基模情况 (  $n = m = 0$  ) ,

$$e^{-i\theta_l} = e^{-i2[k'l - \tan^{-1}(z_2/z_0) + \tan^{-1}(z_1/z_0)]} r_1 r_2 e^{-i(\theta_{m1} + \theta_{m2})} \quad (9.1-8)$$

当下列条件成立时, 光束在谐振腔内往返一周, 它的形状和复振幅能够再现, 从而产生自再生振荡。

$$\begin{aligned} q_5 &= q_1 \\ \theta_5 &= \theta_1 + 2m\pi \end{aligned} \quad m \text{ 为整数} \quad (9.1-9)$$

$q_5 = q_1$  相当于第7章第二节中由  $q = \frac{Aq + B}{Cq + D}$  讨论谐振腔的

稳定条件 (高斯光束经过往返一周后能够自再现:  $\left| \frac{D+A}{2} \right| \leq 1$ ) 。

由(9.1-9)式的第二个条件  $\theta_5 = \theta_1 + 2m\pi$  和(9.1-8)式可以导出

激光振荡条件:

$$e^{-i2[k'l - \tan^{-1}(z_2/z_0) + \tan^{-1}(z_1/z_0)]} r_1 r_2 e^{-i(\theta_{m1} + \theta_{m2})} = e^{-i2m\pi} \quad (9.1-10)$$

(9.1-10)式显示稳态振荡时, 在谐振腔内每往返一周要求光束的振幅和位相又回到它的初始值。由此振荡条件可以确定激光的  
阈值粒子数反转和振荡频率。

## ➤ 阈值粒子数反转

对(9.1-10)式两边复指数取模可以得到

$$\left| e^{-i\theta_l} \right| = 1 \quad (9.1-11)$$

此式保证经过往返一周后，光束的振幅又回到它原来的数值。

将(9.1-5)式代入(9.1-11)式可得，

$$\left| e^{-i2k'l} r_1 r_2 \right| = 1 \quad (9.1-12)$$

复传播常数  $k'$  可以由(8.2-4)式给出

$$k' = k \left[ 1 + \frac{\chi'(\nu)}{2n^2} \right] - ik \frac{\chi''(\nu)}{2n^2} - i \frac{\alpha}{2} \quad (9.1-13)$$

式中  $\alpha$  为介质的分布吸收系数，由除了激光共振跃迁外的所有其它

损耗过程引起的。激光跃迁的贡献包含在  $\chi'(\nu)$  和  $\chi''(\nu)$  内。

由(9.1-13)式得到介质的指数增益系数

$$\gamma = -k \frac{\chi''(\nu)}{n^2} \quad (9.1-14)$$

因此由 (9.1-12)式可以得到**振荡条件**

$$e^{(\gamma_t - \alpha)l} r_1 r_2 = 1 \quad (9.1-14a)$$

$$\gamma_t = \alpha - \frac{1}{l} \ln r_1 r_2 \quad (9.1-15)$$

式中下角标t表示阈值。

利用(8.4-4)式  $\gamma(\nu) = \frac{[N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1] \lambda^2}{8\pi n^2 t_{spont}} g(\nu)$  ， 振荡条件可以表示

为**阈值反转粒子数密度**:

$$\Delta N_t = [N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1]_t = \frac{8\pi n^2 t_{spont}}{g(\nu_0) \lambda^2} (\alpha - \frac{1}{l} \ln r_1 r_2)$$

$$= \frac{8\pi n^2 t_{spont} \Delta\nu}{\lambda^2} \left( \alpha - \frac{1}{l} \ln r_1 r_2 \right) = \frac{8\pi n^3 \nu^2 t_{spont} \Delta\nu}{c^3 t_c} \quad (9.1-16)$$

式中  $\Delta\nu = 1/g(\nu_0)$ ,  $t_c = \frac{nl}{c[\alpha l - \ln r_1 r_2]}$ 。

$\Delta N_t$  与损耗成正比；与自发辐射寿命和加宽线型宽度成正比。

例：估算He-Ne激光器的阈值反转

激光波长  $\lambda = 6.328 \times 10^{-5}$  厘米；

加宽宽度  $\Delta\nu = 1/g(\nu_0) \sim 1.5 \times 10^9$  赫兹；

$\alpha = 0$  ;  $r_1 r_2 \sim 0.98$  ;  $t_{spont} \sim 10^{-7}$  秒 ;  $l = 10$  厘米

代入(9.1-16)式可得：

$$\Delta N_t \sim 1.9 \times 10^9 \text{ 厘米}^{-3}$$



## ➤ 振荡频率

$$e^{-i2[k'l - \tan^{-1}(z_2/z_0) + \tan^{-1}(z_1/z_0)]} r_1 r_2 e^{-i(\theta_{m1} + \theta_{m2})} = e^{-i2m\pi}$$

激光振荡频率可以通过(9.1-10)式求得，令等式两边位相部分相等，即可满足光束往返一周位相延迟  $2\pi$  的整数倍

$$\frac{\omega n}{c} l \left[ 1 + \frac{\chi'(\nu)}{2n^2} \right] - \tan^{-1} \frac{z_2}{z_0} + \tan^{-1} \frac{z_1}{z_0} + \frac{\theta_{m1} + \theta_{m2}}{2} = m\pi \quad (9.1-17)$$

令其中  $\chi' = 0$ ，可以得到空腔的第  $m$  个共振频率为

$$\nu_m = \frac{mc}{2nl} + \frac{c}{2\pi nl} \left( \tan^{-1} \frac{z_2}{z_0} - \tan^{-1} \frac{z_1}{z_0} - \frac{\theta_{m1} + \theta_{m2}}{2} \right) \quad (9.1-18)$$

将空腔共振频率  $\nu_m$  代入(9.1-17)式可以得到

$$\nu \left[ 1 + \frac{\chi'(\nu)}{2n^2} \right] = \nu_m \quad (9.1-19)$$

利用(8.1-19)和 (9.1-14)两式可以分别得到,

$$\chi'(\nu) = \frac{2(\nu_0 - \nu)}{\Delta\nu} \chi''(\nu) \quad \gamma(\nu) = -k \frac{\chi''(\nu)}{n^2}$$

将它们代入(9.1-19)式, 可以得到

$$\nu \left[ 1 - \frac{(\nu_0 - \nu)}{\Delta\nu} \frac{\gamma_t(\nu)}{k} \right] = \nu_m \quad (9.1-20)$$

通常, 空腔共振频率  $\nu_m$  与原子共振频率  $\nu_0$  不等, 而激光振荡频率  $\nu$  将更加靠近空腔共振频率  $\nu_m$ , 而不是  $\nu_0$ 。因此可以用  $\gamma_t(\nu_m)$  代替上式中的  $\gamma_t(\nu)$ , 得到**振荡频率**

$$\nu \approx \nu_m - (\nu - \nu_0) \frac{c\gamma_t(\nu_m)}{2\pi n\Delta\nu}$$

将(9.1-15)式的增益表达式代入可得

$$\nu \approx \nu_m - (\nu - \nu_0) \frac{c[\alpha - \frac{1}{l} \ln(r_1 r_2)]}{2\pi n \Delta \nu}$$

利用(7.4-6)可以将上式改写成

$$\nu \approx \nu_m - (\nu - \nu_0) \left( \frac{\Delta \nu_{1/2}}{\Delta \nu} \right) \quad (9.1-21a)$$

其中  $\Delta \nu_{1/2}$  为无源谐振腔的谱线全宽度。

因为激光振荡频率靠近空腔共振频率  $\nu_m$ ，将等式右端的  $\nu$  用  $\nu_m$  代入，有源谐振腔振荡频率可以写成

$$\nu \approx \nu_m - (\nu_m - \nu_0) \left( \frac{\Delta \nu_{1/2}}{\Delta \nu} \right) \quad (9.1-21)$$

## 频率牵引

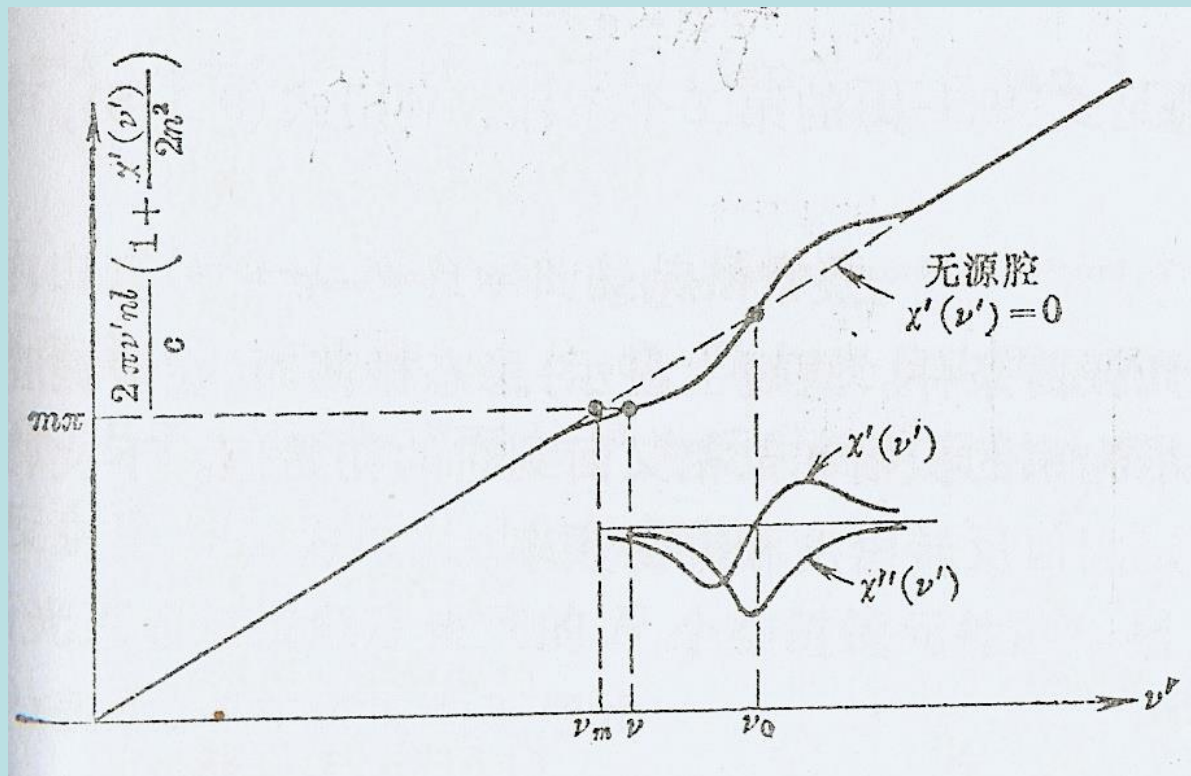


图9.2 频率牵引示意图（考虑(9.1-17)和(9.1-21)两式）

假如空腔共振频率  $\nu_m$  与原子共振频率  $\nu_0$  不等，激光振荡频率  $\nu$  将更加靠近空腔共振频率，将由  $\nu_m$  移向  $\nu_0$ ，这种现象称为**频率牵引**。**频率牵引**起因于介质的色散  $\chi'(\nu)$ 。图9.2说明了原子色散是如何将激光振荡频率  $\nu$  由无源腔的  $\nu_m$  牵引向原子共振频率  $\nu_0$ 。

举例-----He-Ne激光器的频率牵引：

激光波长  $\lambda = 6.328 \times 10^{-5}$  厘米；

加宽宽度  $\Delta\nu \sim 1.5 \times 10^9$  赫兹；

$\alpha = 0$ ；  $L = 30$  厘米；

$\Delta\nu_{1/2} \sim 1.6 \times 10^6$  赫兹；

假如  $\nu_m - \nu_0 = 10^8$  赫兹；

代入(9.1-21)式可得，  $\nu_m - \nu = 10^5$  赫兹；

可见由频率牵引使激光频率  $\nu$  由无源腔的  $\nu_m$  向原子共振频率  $\nu_0$  移动的量是很小的（相差三个量级），激光频率更加靠近无源腔的  $\nu_m$ 。

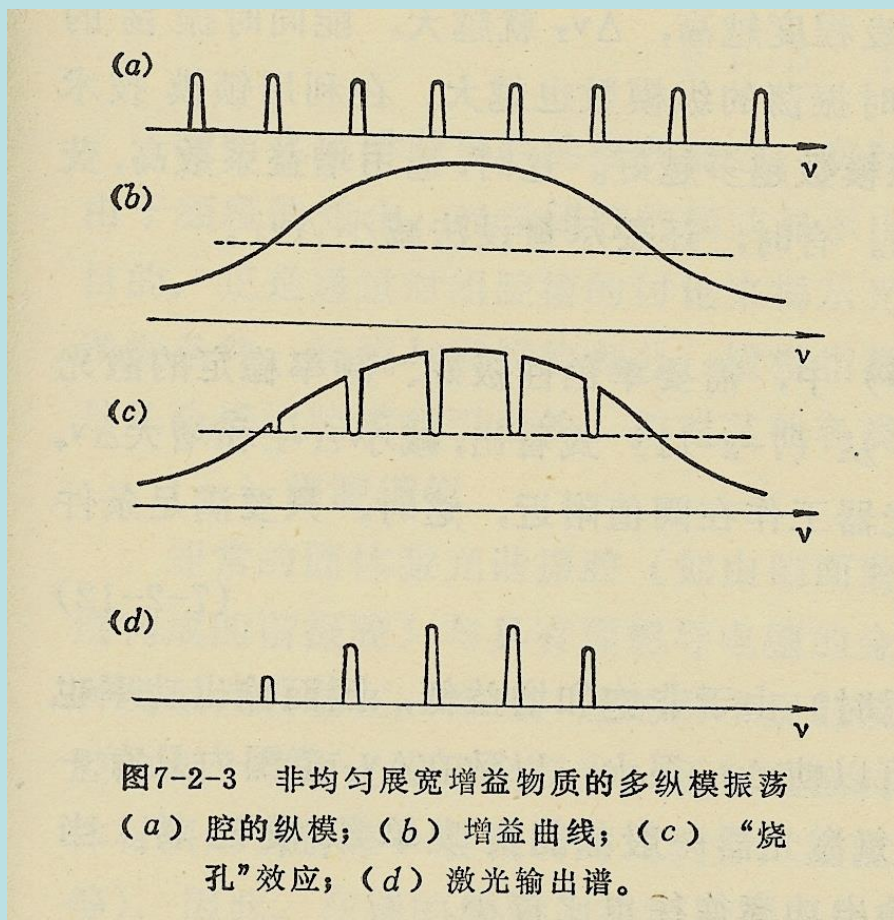
## 补充内容---纵模振荡

谐振腔内能够形成的稳定振荡，其频率必须满足(7.3-3)式给出的谐振腔的共振条件，

$$kz - (m + n + 1)(\tan^{-1}(z_2 / z_0) - \tan^{-1}(z_1 / z_0)) = q\pi$$

然而，并非所有满足该式的频率振荡（纵模）都能形成激光振荡。事实上，在无限个满足上式的纵模中，只有同时满足振荡的阈值条件（ $\gamma_0 \geq \gamma_t$ ）的纵模，才可能形成激光振荡。

## 非均匀加宽增益物质的多纵模振荡



如图9.A给出了非均匀加宽增益物质的多纵模振荡。

在阈值条件内的纵模将仅仅在增益曲线上相应频率处烧空，而不影响其它频率的振荡，从而满足振荡阈值条件的纵模，都能形成激光振荡。

图9.A

## 均匀加宽增益物质的单纵模振荡

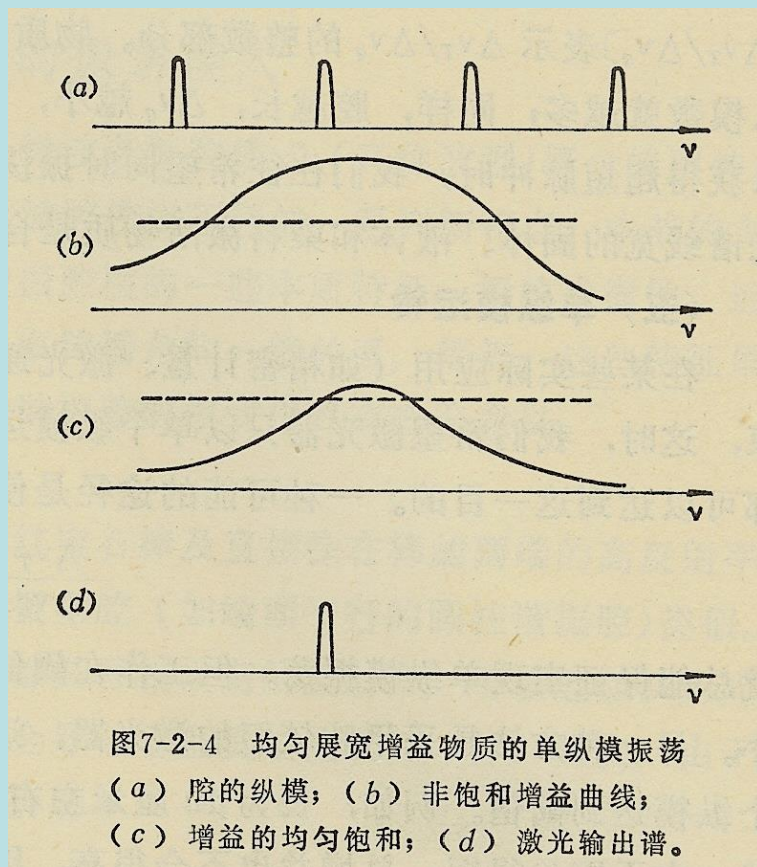


图9.B

图9.B给出了均匀加宽增益物质的单纵模振荡。随着激发程度的增加，增益逐渐增大，首先在谱线中心频率 $\nu_0$ 附近达到振荡阈值。这时最靠近 $\nu_0$ 的一个纵模 $\nu_q$ 将首先起振。随着振荡增强，发生增益的均匀饱和效应，整个增益曲线都将下降，直到在频率 $\nu_q$ 处的饱和增益等于阈值增益（即 $\gamma(\nu_q) = \gamma_t$ ）为止。

这样，距离 $\nu_0$ 较远的其它纵模都不能形成振荡，因而为单纵模振荡。



## 空间烧空导致的多模振荡

如果考虑到谐振腔内驻波场的空间分布，可以发现，即使在均匀加宽增益介质情况，仍可以形成**多纵模振荡**。当纵模  $\nu_q$  首先形成振荡时，由于波节处驻波振荡场强为零，因此在各波节附近，激活物质并不发生增益饱和，只有波腹处才发生增益饱和，形成空间烧空。

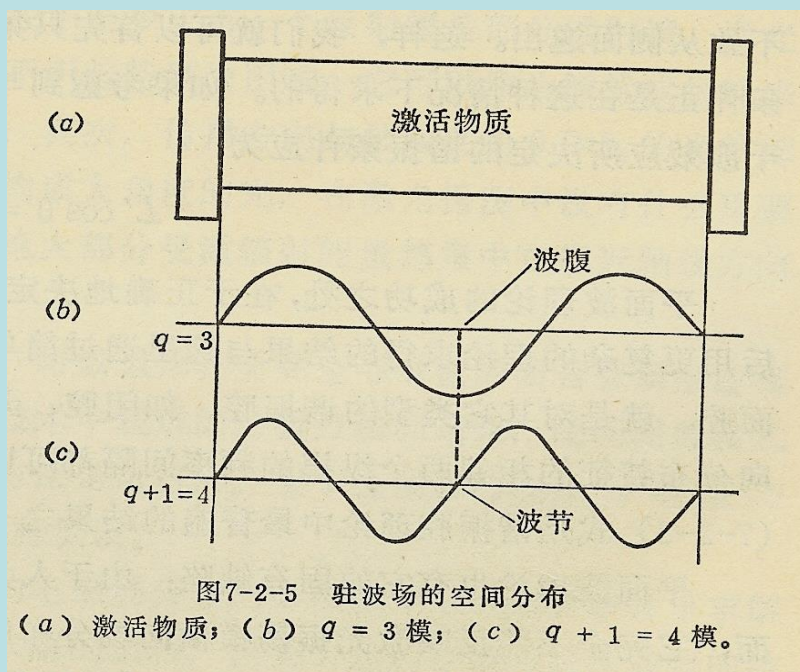


图9.C 驻波场的空间分布

这样，在除了波腹以外的其它空间位置上，增益仍将高于阈值。由于不同纵模对应的驻波场的波腹和波节的位置各不相同，因而满足阈值条件的各纵模可以各自利用空间不同区域内的反转布居粒子数形成多纵模振荡。

## 实现单纵模运转的方法

- (1) **短腔长法**: 缩短谐振腔长使纵模间隔大于增益曲线。
- (2) **色散腔法**: 在谐振腔内加入棱镜或光栅构成色散腔, 使只有某一特定频率的纵模能够振荡。
- (3) **标准具法**: 在谐振腔内插入一参数合适的标准具, 使只有单一纵模能通过标准具振荡。

**方法一**: 采用弱激发(泵浦), 使激光器工作在阈值附近, 保证只有一个纵模的增益超过阈值。缺点是增益低使得激光输出功率低。

**方法二**: 根据(7.3-4)式, 可见通过采用短的谐振腔, 可以使

$$\Delta\nu_q = \nu_{q+1} - \nu_q = \frac{c}{2n_0l}$$

增加, 以致在阈值增益宽度内只有一个纵模达到阈值, 从而形成单纵模运转。

例如腔长为10厘米左右的He-Ne激光器一般都可以实现单纵模运转。

**短腔长→短增益介质→小增益→低输出功率**

## 9.2 激光器的输出功率

### 跃迁速率方程

考虑如图9.4所示的四能级原子系统（能级3未标出）。

能级0是基态。激光跃迁是在能级2 $\rightarrow$ 1间的跃迁。

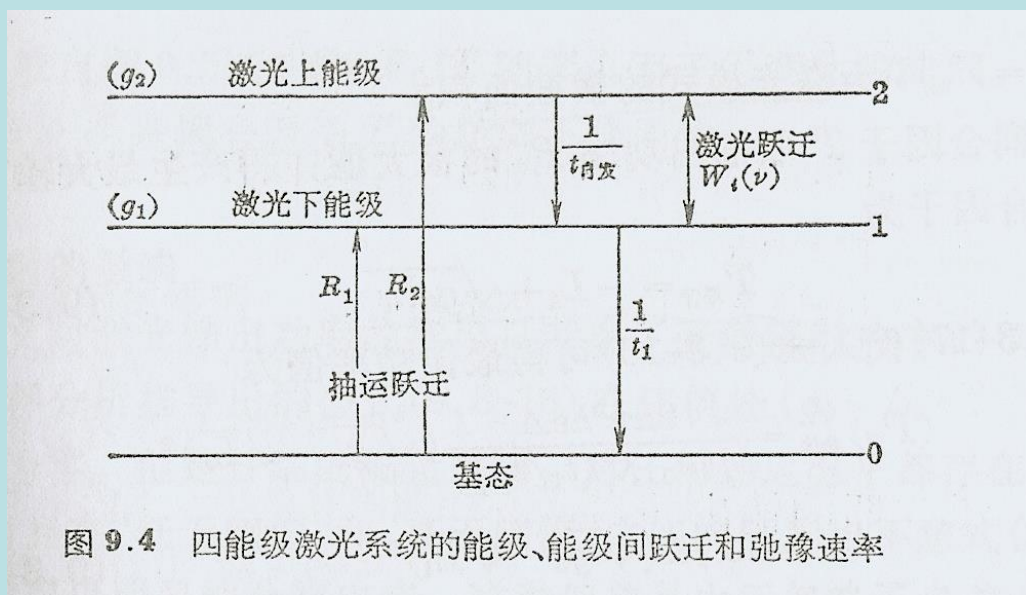


图9.4

能级1和2寿命分别为： $t_1$ ， $t_2$

$$\frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_{21}} + (\text{向其它能级的跃迁速率}) \quad (9.3-1)$$

$$\frac{1}{t_{21}} = \frac{1}{t_{spont}} + \left(\frac{1}{t_{21}}\right)_{nonradiative}$$

能级1和2的原子密度分别为： $N_1$ ， $N_2$  简并度分别为： $g_1$ ， $g_2$

向能级1和2的抽运速率分别为： $R_1$ （不希望产生的）， $R_2$

由(8.3-9，10)式，能级1和2之间感应跃迁速率可写成

$$(W_{21})_i = W_i(\nu) = \frac{\lambda^2 I_\nu}{8\pi h \nu n^2 t_{spont}} g(\nu) \quad (9.3-2)$$

$$(W_{12})_i = W_i(\nu) \left(\frac{g_2}{g_1}\right) \quad (9.3-3)$$

## 粒子数布居速率方程

考虑在均匀加宽介质中，由于光泵、自发辐射和受激辐射跃迁、各种弛豫等过程，与激光相关的粒子数布居速率方程可以写成：

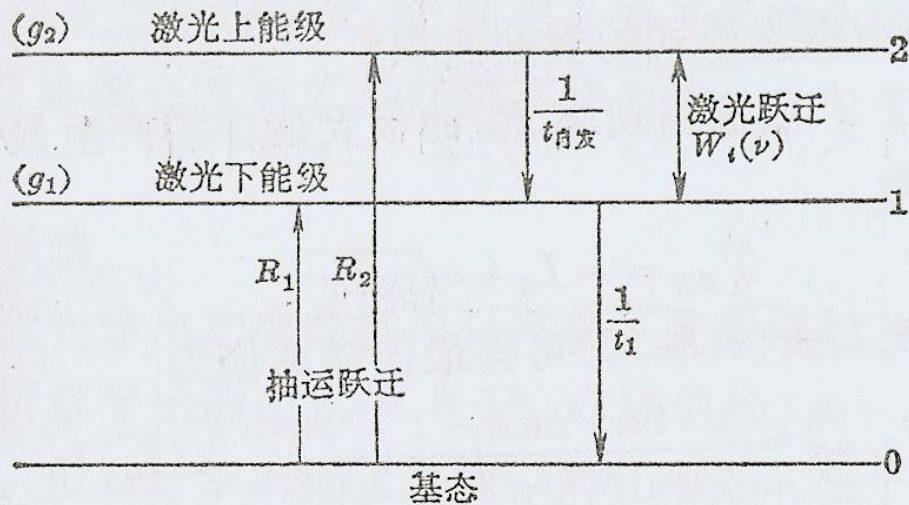


图 9.4 四能级激光系统的能级、能级间跃迁和弛豫速率

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= R_2 - \frac{N_2}{t_2} - (N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1) W_i(\nu) \\ \frac{dN_1}{dt} &= R_1 - \frac{N_1}{t_1} + \frac{N_2}{t_{21}} + (N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1) W_i(\nu) \end{aligned} \quad (9.3-4)$$

解方程组(9.3-4)求得平衡态反转粒子数为

$$\Delta N = N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 = \frac{R_2 t_2 - (R_1 + \delta R_2) t_1 \frac{g_2}{g_1}}{1 + [t_2 + (1 - \delta) t_1 \frac{g_2}{g_1}] W_i(\nu)} \quad (9.3-5)$$

其中 
$$\delta = \frac{t_2}{t_{21}} \quad (9.3-6)$$

由(9.3-5)式可以求得不存在光场时 ( $W_i(\nu) = 0$ ) 的平衡态反转粒子数为

$$\Delta N_0 = (N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1)_0 = R_2 t_2 - (R_1 + \delta R_2) t_1 \frac{g_2}{g_1} \quad (9.3-7)$$

利用上式, (9.3-5)式可以写成 
$$\Delta N = \frac{\Delta N_0}{1 + \phi t_{21} W_i(\nu)} \quad (9.3-8)$$

其中 
$$\phi = \delta [1 + (1 - \delta) \frac{t_1 g_2}{t_2 g_1}] \quad (9.3-9)$$

$\phi$  的意义: 反映了反转粒子数与驰豫速率和简并度的依赖关系;

对于给定的原子系统,  $\phi$  为常数。

## 产生增益的条件

考虑一简单的情况， $t_2 = t_{21}$  ( $\delta = 1$ )和  $R_1 = 0$  的情况下

$$\Delta N_0 = (N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1)_0 = R_2 (t_2 - t_1 \frac{g_2}{g_1})$$

因此，当满足下列条件时，

$$t_2 > t_1 \frac{g_2}{g_1} \quad (9.3-10)$$

能够产生增益 ( $\Delta N_0 > 0$ ) 。

当  $g_1 > g_2$  时，即使  $t_2 < t_1$  (亦即  $N_2 < N_1$ )，只要满足  $t_2 > t_1 \frac{g_2}{g_1}$

仍可以产生增益 ( $\Delta N_0 > 0$ )。这是因为当  $g_1 > g_2$  时， $2 \rightarrow 1$  的受激辐射速率大于  $1 \rightarrow 2$  的受激吸收速率，即  $W_{2 \rightarrow 1} > W_{1 \rightarrow 2}$ 。

(参见(9.3-2)和(9.3-3)两式)

大多数实用的激光系统，都满足  $\frac{t_1 g_2}{t_2 g_1} \ll 1$  的条件。一旦这个

条件成立，则有  $\phi \approx \delta = t_2 / t_{21}$ ，且(9.3-8)式变为

$$\Delta N = \frac{\Delta N_0}{1 + t_2 W_i(\nu)} \quad (9.3-11)$$

该式是分析激光输出功率的出发点。

## 功率和最佳耦合

考虑谐振腔内存在增益介质情况。将(9.3-11)式代入(8.4-4)式得到

$$\gamma(\nu) = \frac{[N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1] \lambda^2}{8\pi n^2 t_{spont}} g(\nu) = \frac{\gamma_0}{1 + W_i(\nu) t_2} \quad (9.3-12)$$



式中 
$$\gamma_0 = \Delta N_0 \frac{\lambda^2}{8\pi n^2 t_{spont}} g(\nu)$$

激光振荡在稳态情况下，增益必须等于阈值增益（损耗） $\gamma = \gamma_t$

否则场强将随时间增加（ $\gamma > \gamma_t$ ）或减少（ $\gamma < \gamma_t$ ）。

阈值增益为

$$\gamma_t = \alpha - \frac{1}{l} \ln r_1 r_2 \quad (9.3-12a)$$

代入(9.3-12)式可得

$$W_i(\nu) = \frac{1}{t_2} \left( \frac{\gamma_0 l}{\alpha l - \ln r_1 r_2} - 1 \right) \quad (9.3-13)$$

## 原子发射的总功率为

$$P_e = \Delta N h \nu V_m W_i(\nu)$$

其中  $V_m$  为模体积。

由(9.1-16)式，阈值处反转粒子数

$$\begin{aligned} \Delta N_t &= \frac{8\pi n^2 t_{spont}}{g(\nu_0) \lambda^2} \left( \alpha - \frac{1}{l} \ln r_1 r_2 \right) \\ &= \frac{8\pi n^3 \nu^2 t_{spont}}{c^3 t_c g(\nu_0)} \end{aligned} \quad (9.3-14)$$

在稳态时，反转粒子数和增益均处于阈值处，即

$$\gamma = \gamma_t \quad \Delta N = \Delta N_t$$

于是得到**高于阈值时原子的受激发射功率**

$$\begin{aligned} P_e &= \Delta N_t h\nu V_m W_i \\ &= \frac{8\pi n^2 hc (V_m / l) (\alpha l - \ln r_1 r_2)}{g(\nu_0) \lambda^3 (t_2 / t_{spont})} \left( \frac{\gamma_0 l}{\alpha l - \ln r_1 r_2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (9.3-15)$$

**(9.3-15)**式中的几个因子的含义:

考虑低增益激光器, 两个反射镜的反射率相等:

$$R_1 = R_2 = R \approx 1 \quad ; \quad \text{因此} \quad -\ln r_1 r_2 = -\ln \sqrt{R_1 R_2} \approx T$$

(其中  $T = 1 - R$  为反射镜透过率)

$\alpha l \rightarrow L_i$  : 内部损耗因子 (为强度的单程损耗)

$-\ln r_1 r_2 \rightarrow T$  : 有用耦合因子 (内部功率耦合到输出的比值)

$\gamma_0 l \rightarrow g_0$  : 未饱和单程增益因子 (单程增益比值)

于是**激光器的有用输出功率**为

$$P_o = P_e \frac{T}{L_i + T} = \frac{8\pi n^2 hc A}{g(\nu_0) \lambda^3 (t_2 / t_{spont})} \left( \frac{g_0}{L_i + T} - 1 \right) T \quad (9.3-16)$$

式中  $A = V_m / l$  为激光模式的截面积。

对耦合因子**T**取输出功率的极大值，可以得到**最大输出功率的耦合因子**

$$T_{optimum} = -L_i + \sqrt{g_0 L_i} \quad (9.3-17)$$

将(9.3-17)式代入(9.3-16)式，可得**最佳功率值**为

$$\begin{aligned} (P_o)_{optimum} &= \frac{8\pi n^2 hc A}{g(\nu_0) \lambda^3 (t_2 / t_{spont})} (\sqrt{g_0} - \sqrt{L_i})^2 \\ &= 2I_s A (\sqrt{g_0} - \sqrt{L_i})^2 \end{aligned} \quad (9.3-18)$$

式中  $I_s$  为饱和强度。

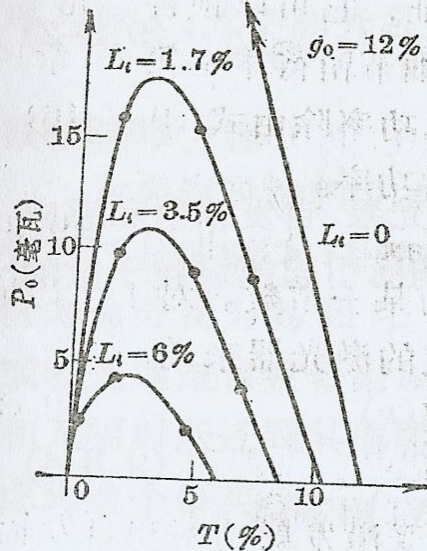


图 9.5 在 6328 埃 He-Ne 激光器中, 对于不同的内部损耗值  $L_i$ , 有用输出功率  $P_0$  与反射镜透过率  $T$  之间的关系曲线<sup>[8]</sup>

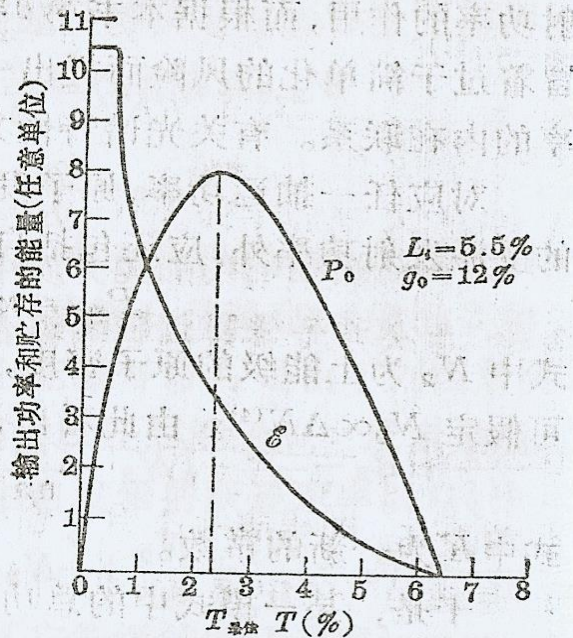


图 9.6 输出功率  $P_0$  和贮存的能量  $E$  与反射镜透过率  $T$  之间的关系曲线

图9.5

图9.6

图9.5 (9.3-16)式的理论曲线, 在6328埃He-Ne激光器中, 对于不同的内部损耗  $L_i$  值, 有用的输出功率  $P_0$  与反射镜透过率  $T$  之间的关系曲线。图9.6 输出功率  $P_0$  和储存能量  $E$  与反射镜透过率  $T$  之间的关系曲线。

## 自发辐射的影响

上面的关于激光输出功率(9.3-16)式只考虑了受激辐射功率的贡献，

在阈值处的输出功率为零（ $g_0 = L_i + T$ ）。

实际测量表明，对任何抽运电平都存在激光功率。其偏差是由于忽略了自发辐射。

$$\text{自发辐射功率的贡献为 } P_{spont} = \kappa N_2 h\nu / t_{spont} \quad (9.3-19)$$

式中  $N_2$  为上能级的原子密度， $\kappa$  为一常数。

为简单，假定  $N_2 \propto \Delta N$ ，对给定激光器，有

$$P_{spont} = K \Delta N \quad (9.3-20)$$

$K$ 为一新常数。

因此，某一模式中**总功率等于受激发射功率和自发辐射功率之和**

$$P_e = \Delta N h \nu V_m W_i + K \Delta N = \frac{\Delta N_0}{1 + W_i t_2} (h \nu V_m W_i + K) \quad (9.3-21)$$

式中的**K**可以由下面的推导得出。

由**(8.3-4)**式可得关于第**m**个模式

$$W' = \frac{2\pi e^2 \omega_l y_{12}^2}{V \epsilon} (n_l + 1) \sin^2(k_l z) \delta(E_2 - E_1 - \hbar \omega_l)$$

$$\text{感应发射速率/自发辐射速率} = \frac{h \nu V_m W_i}{K} = n_m$$

$n_m$  为该模式中的量子数。

$$\text{根据(9.3-2)式} \quad (W_{21})_i = W_i(\nu) = \frac{\lambda^2 I_\nu}{8\pi h \nu n^2 t_{spont}} g(\nu)$$

$$\text{和关系式} \quad I_{\nu_m} = \frac{c n_m h \nu_m}{n V_m} \quad \text{和} \quad \Delta \nu = g(\nu_0)^{-1}$$

$$\text{可得} \quad K = \frac{h \nu c^3}{8\pi n^3 \nu^2 \Delta \nu t_{spont}} \quad (9.3-22)$$

讨论:

## 1. 低于阈值情况

由(9.1-15)式得到阈值  $\gamma_t$  的关系式  $\gamma_t l = \alpha l - \ln r_1 r_2$

由(9.3-13)式可以看出, 低于阈值时

$$W_i(\nu) = \frac{1}{t_2} \left( \frac{\gamma_0 l}{\alpha l - \ln r_1 r_2} - 1 \right) = 0$$

代入(9.3-21)式可得,

$$(P_e)_{\text{per mode}(\Delta N_0 < \Delta N_t)} = \frac{h\nu V_m \Delta N_0}{t_{\text{spont}} p} \quad (9.3-23)$$

式中,  $p$  为在频率宽度  $\Delta\nu$  和  $V_m$  模体积内的模式数, 参见(5.7-3)式。

$$p = \frac{8\pi n^3 \nu^2 \Delta\nu V_m}{c^3} \quad (9.3-24)$$



由此可见，低于阈值的总发射功率  $\frac{h\nu V_m \Delta N_0}{t_{spont}}$  大致均匀地分配

在腔内  $p$  个模式中。

利用(9.1-16)式

$$\begin{aligned}\Delta N_t &= \frac{8\pi n^2 t_{spont} \Delta \nu}{\lambda^2} \left( \alpha - \frac{1}{l} \ln r_1 r_2 \right) \\ &= \frac{8\pi n^3 \nu^2 t_{spont} \Delta \nu}{c^3 t_c}\end{aligned}$$

可以将(9.3-23)式改写为

$$(P_e)_{per\ mode(\Delta N_0 < \Delta N_t)} = \frac{\Delta N_0}{\Delta N_t} \frac{h\nu}{t_c} = \frac{g_0}{L_i + T} \frac{h\nu}{t_c} \quad (9.3-25)$$

式中， $t_c$  为无源谐振腔模式的衰减寿命。该式表明在**阈值处**， $\Delta N_0 = \Delta N_t$

**每个模的自发辐射功率等价于该模中储存的能量  $h\nu$ （一个量子的能量）。**

## 2. 高于阈值情况

对于高于阈值情况，有  $h\nu V_m W_i \gg K$ ，而且  $\Delta N_0 = \Delta N_t$ 。于是，功率等于自发辐射功率与受激辐射功率之和：

$$\begin{aligned}(P_e)_{above\ threshold(\Delta N_0 > \Delta N_t)} &= \frac{h\nu V_m \Delta N_t}{t_2} \left[ \frac{\Delta N_0}{\Delta N_t} - 1 \right] + \frac{h\nu}{t_c} \\ &= \frac{h\nu V_m \Delta N_t}{t_2} \left[ \frac{g_0}{L_i + T} - 1 \right] + \frac{h\nu}{t_c}\end{aligned}\quad (9.3-26)$$

可以略去很小的自发辐射项  $\frac{h\nu}{t}$ ，由低于阈值的(9.3-25)式和

(9.3-26)式可知，输出功率随抽运速率  $\Delta N_0$  成线性变化。

由低于阈值的(9.3-25)式和(9.3-26)式可以得到，

$$\frac{[dP_e / d(\Delta N_0)]_{(\Delta N_0 > \Delta N_t)}}{[dP_e / d(\Delta N_0)]_{(\Delta N_0 < \Delta N_t)}} = \frac{V_m t_c \Delta N_t}{t_2} = \frac{8\pi n^3 \nu^2 \Delta \nu V_m}{c^3 (t_2 / t_{spont})} = \frac{p}{(t_2 / t_{spont})} \quad (9.3-27)$$

### 低于阈值和高于阈值时的辐射功率

为简单起见，考虑  $t_2 = t_{spont}$

在低于阈值时，辐射功率分布在  $p$  ( $p \geq 10^8$ ) 个无规跃迁模式中。  
在抽运功率增加到高于阈值时，辐射集中到一个模式中（假定均匀加宽）。

举例：典型的激光器数值。

$$\nu = 3 \times 10^{14}; n = 1; \Delta \nu = 5 \times 10^9; V_m = 1 \text{ cm}; t_2 = t_{spont}$$

可以求得 
$$p = \frac{8\pi n^3 \nu^2 \Delta \nu V_m}{c^3} \approx 4 \times 10^8$$

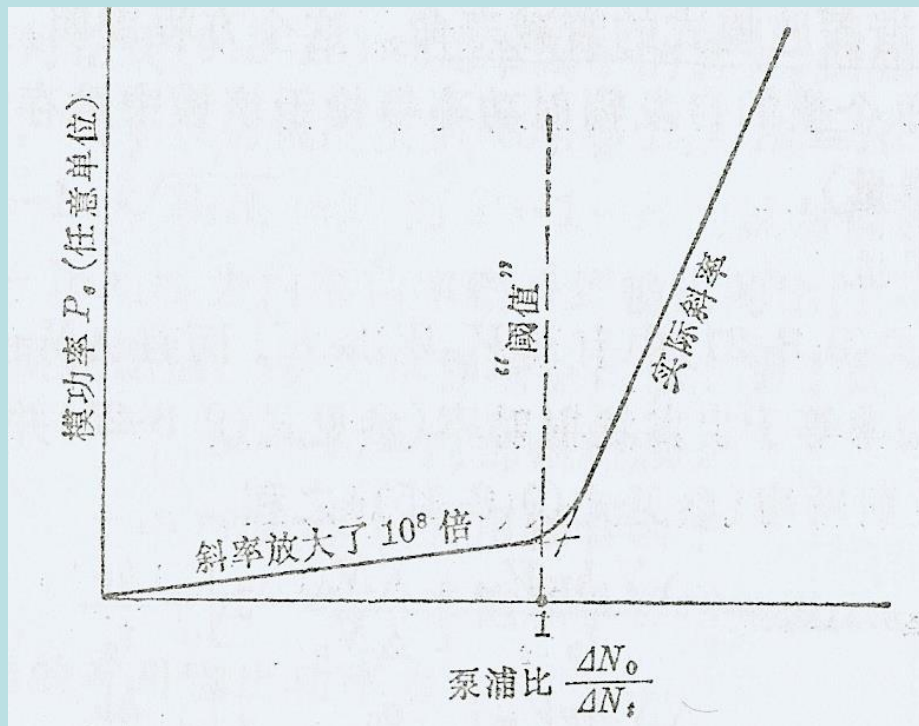


图9.7

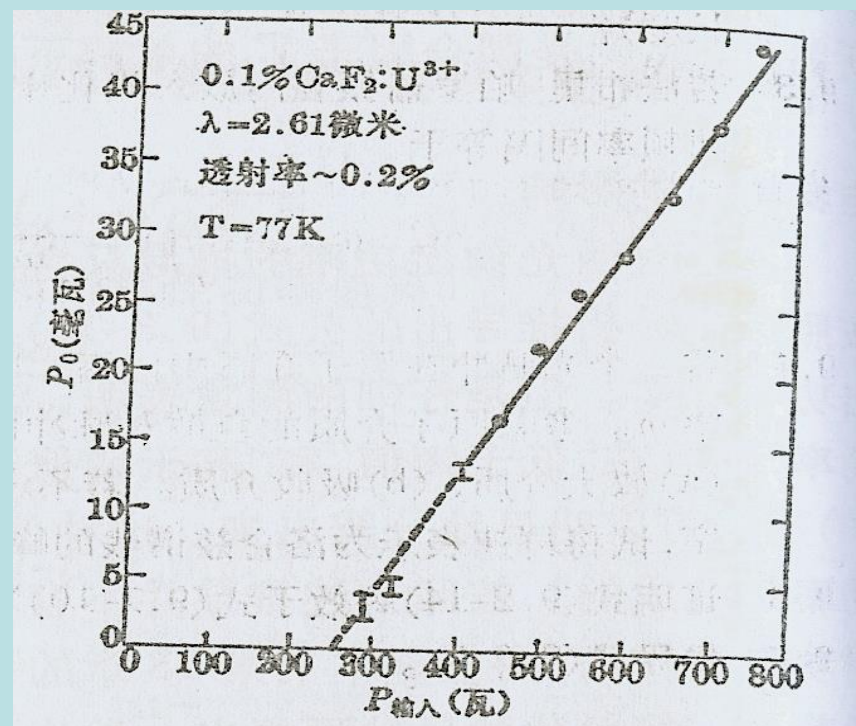


图9.8

图9.7 根据(9.3-25)和(9.3-26)式计算出的原子发射到激光模式中的功率---抽运比 ( $\Delta N_0 / \Delta N_t$ ) 的关系。

图9.8 输出功率与抽运功率之间的关系

## 激光谱线极限宽度

考虑低于阈值时，宽的白色噪声源通过洛仑兹滤波器后产生的噪声谱：

$$(\Delta\nu)_{\Delta N_0 < \Delta N_t} = \frac{\pi h\nu (\Delta\nu_{1/2})^2}{(P_e)_{\Delta N_0 < \Delta N}} \times \frac{N_2}{N_2 - N_1 g_2 / g_1} \quad (9.3-28)$$

式中  $\Delta\nu_{1/2}$  为(7.4-7)式的谐振腔的洛仑兹响应曲线的半高全宽度，

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{\nu}{Q} = \frac{c(\alpha - \frac{1}{l} \ln \sqrt{R_1 R_2})}{2\pi n}$$

高于阈值时，激光的谱线宽度由下式给出

$$(\Delta\nu)_{\Delta N_0 > \Delta N_t} = \frac{\pi h\nu (\Delta\nu_{1/2})^2}{(P_e)_{\Delta N_0 > \Delta N}} \times \frac{N_{2t}}{(N_2 - N_1 g_2 / g_1)_t} \quad (9.3-29)$$

低于阈值向高于阈值转化时，由于辐射功率由  $(P_e)_{\Delta N_0 < \Delta N}$  变为  $(P_e)_{\Delta N_0 > \Delta N}$  引起谱线宽度显著变窄。

(9.3-29)给出的激光理论极限线宽  $\Delta \nu_{laser}$  (即  $\Delta \nu_{\Delta N_0 > \Delta N}$ )

只是理论极限，实际测量的激光线宽经常被加宽（激光腔长的热起伏等原因所致的共振频率快速移动），远远大于激光的极限线宽。

举例：氦-氖激光器 (p315)

$$\nu = 4.74 \times 10^{14} \text{ 赫兹 (6328埃)}$$

$$l = 100 \text{ cm} ; \alpha l = 1\% ; P_e = 1 \text{ mW} ; N_2 \gg N_1$$

$$\text{经过计算 } \Delta \nu_{1/2} \approx 5 \times 10^5 \text{ 赫兹}$$

$$\Delta \nu_{laser} \approx 5 \times 10^{-4} \text{ 赫兹 (理论极限值)}。$$

实际测量值~ $10^3$  赫兹。更接近  $\Delta \nu_{1/2}$